ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 2 2016

УДК 512.542

КРИТЕРИЙ ОТСУТСТВИЯ ЛОКАЛЬНОЙ СБАЛАНСИРОВАННОСТИ НЕКОТОРЫХ ПРОСТЫХ ГРУПП ЛИЕВА ТИПА[1]

В. И. Зенков

Конечная простая неабелева группа K называется локально сбалансированной (локально 1-сбалансированной) относительно простого числа p, если $O_{p'}(C_G(x)) = 1$ для любого элемента x порядка p из $G \simeq \mathrm{Aut}\,(K)$. Описанию не локально сбалансированных конечных простых неабелевых групп посвящена известная теорема 7.7.1 из “Классификации конечных простых групп” трех авторов Д. Горенстейна, Р. Лайонса, Р. Соломона. Однако в формулировке п. (d) этой теоремы имеется пробел, который присутствует и в доказательстве этого пункта. В данной статье доказана следующая

Теорема. *Пусть G — конечная почти простая группа, $K = \mathrm{Soc}\,(G)$ — группа лиева типа над полем характеристики r и x — элемент простого порядка $p \neq r$ из G, индуцирующий на K не внутренне-диагональный автоморфизм. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $O_{p'}(C_G(x)) \neq 1$;

(2) *x индуцирует на K полевой автоморфизм и* $(|C_K(x)|, p) = 1$.

Теорема дает критерий не локально 1-сбалансированности групп лиева типа из п. (d) теоремы 7.7.1 с не внутренне-диагональным автоморфизмом, на основе которого для любой конечной простой неабелевой группы лиева типа строится счетная серия контрпримеров к п. (d) теоремы 7.7.1.

Ключевые слова: конечная группа, простая группа, группа лиева типа, сбалансированная группа.

V. I. Zenkov. A criterion for the failure of local balance of some simple groups of Lie type.

A finite simple nonabelian group K is called locally balanced (locally 1-balanced) with respect to a prime p if $O_{p'}(C_G(x)) = 1$ for any element x of order p from $G \simeq \mathrm{Aut}\,(K)$. Finite simple nonabelian groups that are not locally balanced were described in the famous Theorem 7.7.1 from *The Classification of the Finite Simple Groups* by Gorenstein, Lyons, and Solomon. However, there is a gap in statement (d) of that theorem, which is also present in the proof. In this connection, we prove the following theorem.

Theorem. *Suppose that G is a finite almost simple group, $K = \mathrm{Soc}\,(G)$ is a group of Lie type over a field of characteristic r, and x is an element of a prime order $p \neq r$ from G that induces on K a non-inner-diagonal automorphism. Then the following conditions are equivalent*:

(1) $O_{p'}(C_G(x)) \neq 1$;

(2) *x induces a field automorphism on K and* $(|C_K(x)|, p) = 1$.

The theorem gives a criterion for the local 1-imbalance of groups of Lie type from statement (d) of the mentioned Theorem 7.7.1 with a non-inner-diagonal automorphism. The criterion can be used to construct a countable series of counterexamples to this statement for any simple nonabelian group of Lie type.

Keywords: finite group, simple group, group of Lie type, balanced group.

MSC: 20D06, 20G07

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-147-149

Конечная простая неабелева группа K называется локально сбалансированной относительно простого числа p, если $O_{p'}(C_G(x)) = 1$ для любого элемента x порядка p из $G \simeq \mathrm{Aut}\,(K)$. В противном случае группа K не локально сбалансирована (не локально 1-сбалансирована).

В частности, если K — группа лиева типа над полем характеристики r и $r \neq p$, то в [1, теорема 7.7.1(d)] для элемента $x \in G$ порядка р такого, что $O_{p'}(C_G(x)) \neq 1$, утверждается, что x индуцирует на $\mathrm{Inn}\,(K)$ внутренне-диагональный автоморфизм.

[1]Работа выполнена при поддержке Комплексной программы фундаментальных исследований УрО РАН (проект 15-16-1-5) и проекта повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (Соглашение между Министерством образования и науки РФ и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013 № 02.A03.21.0006).

Как показывает следующая теорема, это утверждение неверно и нуждается в корректировке. В данной статье нами доказана

Теорема. *Пусть G — конечная почти простая группа, $K = \mathrm{Soc}\,(G)$ — группа лиева типа над полем характеристики r и x — элемент простого порядка $p \neq r$ из G, индуцирующий на K не внутренне-диагональный автоморфизм. Тогда следующие условия эквивалентны*:
(1) $O_{p'}(C_G(x)) \neq 1$;
(2) *x индуцирует полевой автоморфизм на K и* $(|C_K(x)|, p) = 1$.

Доказательство. (2) $\Rightarrow$ (1). Допустим, что справедливо (2). Тогда согласно [2, утверждение (9-1)] подгруппа $C_K(x)$ имеет тот же лиев тип, что и K, но определена над полем порядка $\sqrt[p]{q}$, где $q = r^n$. В частности, $C_K(x) \neq 1$ и $C_K(x) \lhd C_G(x)$. Так как по условию $(|C_K(x)|, p) = 1$, то $C_K(x) \leq O_{p'}(C_G(x))$. Значит, $O_{p'}(C_G(x)) \neq 1$ и импликация (2) $\Rightarrow$ (1) доказана.

Импликация (1) $\Rightarrow$ (2). Допустим, что справедливо (1). По условию теоремы элемент x индуцирует на K не внутренне-диагональный автоморфизм. Тогда согласно [2, утверждение (9-1)] x индуцирует на K графовый, графово-полевой или полевой автоморфизм, причем $|x| = 2, 3$ в случае графового или графово-полевого автоморфизма.

Положим $C = C_G(x)$, $T = O_{p'}(C)$, $K_0 = C_K(x)$ и $K_1 = O^{r'}(K_0)$. По условию теоремы $T \neq 1$.

Рассмотрим $F^*(T) = F(T)E(T)$ — обобщенную подгруппу Фиттинга группы T, где $F(T)$ — подгруппа Фиттинга группы T, а $E(T)$ — слой группы T, т. е. произведение попарно коммутирующих субнормальных квазипростых подгрупп группы T. Так как $T \lhd C$, а подгруппы $F(T)$ и $E(T)$ характеристичны в T, то $F(T) \leq F(C)$ и $E(T) \leq E(C)$, причем компоненты из $E(T)$ являются компонентами в C. Поскольку $E(C) = E(C \cap K)$ в силу разрешимости группы $\mathrm{Out}\,(K)$, то $E(C) = E(K_1')$.

Допустим, что x индуцирует на K полевой или графово-полевой автоморфизм, причем K_1 — неразрешимая подгруппа. Тогда согласно [1, теорема 7.1.4] имеем $F^*(K_0) = K_1'$ — простая группа и $C_G(K_1') = \langle x \rangle$. Таким образом, $F(T) \leq F(C) \leq C_G(E(C)) = C_G(K_1') = \langle x \rangle$. Но $F(T)$ — p'-подгруппа, а $|x| = p$. Значит, $F(T) = 1$. Следовательно, $E(T) = K_1'$ — p'-подгруппа из $K_0 \cap T$. Так как $K_1 = O^{r'}(K_0)$ и $p \neq r$, то $(|K_1|, p) = 1$. Согласно [2, утверждения (9-1)(1d) и (2e)] имеем $C_K(x) \leq G_1$, где $G_1 \simeq R \leq \mathrm{Inndiag}(K_1)$. Поскольку $\pi(K_1) = \pi(\mathrm{Inndiag}(K_1))$, то $\pi(C_K(x)) = \pi(K_1)$. Следовательно, $(|C_K(x)|, p) = 1$ и в случае полевого автоморфизма утверждение (1) $\Rightarrow$ (2) доказано. Если же автоморфизм графово-полевой, то ввиду [2, утверждение (9-1)] имеем $p = 2, 3$, причем случай $p = 2$ невозможен в силу неразрешимости $E(T)$. Если же $p = 3$, то согласно [2, утверждение (7-3)] имеем $K \simeq D_4(q)$, а согласно [2, утверждение (9-1)] имеем $K_0 \simeq {}^3D_4(\sqrt[3]{q})$. Так как $r \neq 1$ и $(q_0^2 - 1) \Big| |K_0|$, где $q_0 = \sqrt[3]{q}$, то $(|K_0|, 3) = 3$. Противоречие с тем, что $K_1' \leq O_{p'}(C_G(x))$.

Если K_1 — разрешимая подгруппа из C, то согласно [3, теорема 2.13] имеем $K_0 \simeq L_2(2)$, $L_2(3)$, $U_3(2)$ $Sz(2)$. Если при этом x индуцирует графово-полевой автоморфизм на K, то согласно [2, утверждение (9-1)(2)] $K_0 \simeq U_3(2)$ $Sz(2)$ и $p = 2$, что невозможно в силу $p \neq r$. Если же x индуцирует полевой автоморфизм на K, то $K \simeq L_2(2^p)$, $L_2(3^p)$, $U_3(2^p)$ или $Sz(2^p)$.

Если $K \simeq L_2(2^p)$, $L_2(3^p)$ или $U_3(2^p)$, то $C_K(x)$ — $\{2, 3\}$-группа. Следовательно, условия $T \neq 1$ и $|\mathrm{Out}\,(K)| \Big| (3p)$ влекут, что $p > 3$ и, следовательно, $(|C_K(x)|, p) = 1$.

Таким образом, в случае полевого или графово-полевого автоморфизма теорема доказана.

Пусть x индуцирует на K графовый автоморфизм. Тогда согласно [2, утверждение (9-1)] $p = 2, 3$, причем в случае $p = 3$ имеем $K \simeq D_4(q)$ или ${}^3D_4(q)$ и группа K имеет два класса $\langle x_1 \rangle$ и $\langle x_2 \rangle$ подгрупп порядка 3, где $C_K(x_1) \simeq G_2(q)$, а $C_K(x_2) \simeq PGL_3^{\varepsilon}(q)$, $q \equiv \varepsilon (\mathrm{mod}\, 3)$, $\varepsilon = \pm 1$. Так как $(|C_K(x_i)|, 3) = 3$ для $i = 1, 2$ и $F(C_K(x_i)) = 1$, или 3-группа при $\varepsilon = -1$ и $q = 2$, то условие $T \neq 1$ влечет, что $t \,\big|\, |T|$, для некоторого простого числа $t \geq 5$. Согласно [4, табл. 3] элемент y порядка t из T индуцирует на K полевой автоморфизм. Но тогда y действует нетривиально на K_0. Противоречие с тем, что $y \in F(T)$, так как $|y| \geq 5$ и $[F(T), E(T)] = [F(T), E(C)] = 1$.

Пусть $p=2$. Тогда $q=r^n\geq 3$ ввиду условия $p\neq r$. В случае $q>3$ согласно [1, табл. 4.5.1] подгруппа $E(K_0)$ имеет не более двух компонент и $C_G(E(K_0))=\langle x\rangle$. Так как $F(T)\leq F(C)\leq C_G(E(C))\leq\langle x\rangle$ и $F(T)$ — p'-группа, то $F(T)=1$. Но тогда условие $T\neq 1$ влечет, что $E(T)\neq 1$. Противоречие, так как $E(T)$ — неразрешимая подгруппа из $O_{p'}(C_G(x))=O(C_G(x))$.

Если $q=r=3$, то согласно [1, табл. 4.5.1] $C_G(K_0)=\langle x\rangle$. Тогда условие $T\neq 1$ влечет, что $F^*(T)=F(T)E(T)\neq 1$. Так как T — $2'$-группа, то $E(T)=1$ и $1\neq F^*(T)=F(T)\leq F(C)$. Но согласно [1, табл. 4.5.1] $F(C)$ — 2-группа. Противоречие с тем, что $1\neq F(T)$ — $2'$-группа.

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть G — конечная группа присоединенного лиева типа L. Тогда существует бесконечное множество конечных почти простых групп того же типа L, которые не являются локально 1-сбалансированными, и для каждой такой подгруппы G_1 найдется элемент x простого порядка p такой, что $(|C_{\mathrm{Soc}\,(G_1)}|,p)=1$ и каждая такая группа, по теореме, будет не локально 1-сбалансированной.*

Доказательство. Пусть $G=L(q)$ — группа присоединенного лиева типа L над полем из q элементов. Рассмотрим группу $G_1=L(q^p)\rtimes\langle x\rangle$, где p — простое число и элемент x порядка p индуцирует на $L(q^p)$ полевой автоморфизм порядка p. Тогда согласно [2, утверждение (9-1)] имеем $\pi(C_{G_1}(x))=\pi(G)\cup\{p\}$. Так как множество простых чисел счетно, а $\pi(G)$ конечно, то найдется счетное число простых чисел таких, что для такого простого числа p имеем $(|C_{L(q^p)}(x)|,p)=1$, где $L(q^p)=\mathrm{Soc}\,(G_1)$. Тогда для группы G_1 выполняются условия теоремы и п. (2) теоремы, а значит, и п. (1), по которому $L(q^p)$ не является локально 1-сбалансированной.

Следствие доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups, number 3. Providence: Amer. Math. Soc., 1991. 417 p.
2. **Gorenstein D., Lyons R.** The local structure of finite groups of characteristic 2-type // Mem. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 42, no. 276. P. 1–731.
3. **Горенстейн Д.** Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985. 352 с.
4. **Burgoyne N., Griss R., Lyons R.** Maximal subgroups and automorphisms of Chevalley groups // Pacif. J. Math. 1977. Vol. 71. P. 365–403.

Зенков Виктор Иванович
д-р физ.-мат. наук,
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: zenkov@imm.uran.ru

Поступила 12.02.2016