

УДК 517.977.56

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПОЗИЦИОННОГО ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НЕИЗВЕСТНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ¹

А. А. Дряженков, М. М. Потапов

Для одномерного волнового уравнения рассматривается задача одностороннего граничного Нейман-управления. Информация о начальном состоянии процесса отсутствует. Вместо этого на управляемой границе в режиме реального времени регистрируются значения Дирихле-наблюдений. Ставится задача полного успокоения процесса с помощью граничных управлений позиционного типа. Предложен экономичный алгоритм численного решения этой задачи, оптимальный по времени гарантированного успокоения. Приводятся результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: волновое уравнение, задача позиционного управления, численное решение.

A. A. Dryazhenkov, M. M. Potapov. Numerical solution of the positional boundary control problem for the wave equation with unknown initial data.

The problem of one-sided boundary Neumann control is considered for the one-dimensional wave equation. Information about the initial state of the process is absent. Instead, the values of Dirichlet observations are received in real time at the controlled boundary. The aim is to bring the process to a complete rest by means of positional boundary controls. To solve this problem, we propose an efficient numerical algorithm with an optimal guaranteed damping time. Some results of numerical experiments are presented.

Keywords: wave equation, positional control problem, numerical solution.

MSC: 49N30, 35Q93, 35L20, 49M25, 35D35

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-138-146

1. Введение

Рассматривается следующая задача одностороннего граничного Нейман-управления для одномерного уравнения колебаний с однородным условием Неймана на неуправляемом краю:

$$y_{tt} = y_{xx} - q(x)y, \quad (t, x) \in Q = (0, T) \times (0, l), \quad (1.1)$$

$$-y_x|_{x=0} = u(t), \quad y_x|_{x=l} = 0, \quad 0 < t < T, \quad (1.2)$$

$$y|_{t=0} = v^0(x), \quad y_t|_{t=0} = v^1(x), \quad 0 < x < l. \quad (1.3)$$

Коэффициент $q(x)$ предполагается непрерывным. Целью приложения управления $u = u(t)$ является приведение системы (1.1)–(1.3) в состояние покоя в момент времени $t = T$:

$$y|_{t=T} = 0, \quad y_t|_{t=T} = 0, \quad 0 < x < l. \quad (1.4)$$

Задачам вида (1.1)–(1.4) и численным методам их решения посвящена книга [1]. Уравнения с переменными коэффициентами при старших производных могут быть сведены к уравнению вида (1.1) путем стандартных замен функции y и пространственной переменной x , которые использовались, в частности, в [2] для уточнения неравенств наблюдаемости. В [1; 2] функции $v(x) = (v^0(x), v^1(x))$ считались известными, что существенно использовалось при построении приближений к искомым граничным управлениям $u(t)$, решающим задачу (1.1)–(1.4) за

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-01-00539).

время $T > 2l$. В данной работе начальное состояние $v(x) = (v^0(x), v^1(x))$ процесса (1.1)–(1.3) предполагается *неизвестным*, и дополнительная информация о решении $y(t, x)$, по которой управляющей стороне нужно конструировать соответствующее управляющее воздействие $u(t)$, поступает в режиме реального времени в виде граничного Дирихле-наблюдения:

$$g(t) = y(t, 0), \quad 0 < t < T. \quad (1.5)$$

Управления должны строиться также в режиме реального времени, синхронно с поступающими наблюдениями (1.5), и их значения $u(\tau)$ в момент τ могут зависеть только от предыстории наблюдений $g_\tau(t) = g(t)$, $0 < t < \tau$. В терминах [3, с. 425] такая постановка относится к задачам позиционного управления с запоминанием информации.

В данной работе рассматриваются *сильные* обобщенные решения $y(t, x)$ [4] задачи (1.1)–(1.3), которым соответствуют следующие функциональные классы начальных состояний, управлений и наблюдений:

$$v \in H^1(0, l) \times L^2(0, l), \quad u \in L^2(0, T), \quad g \in H^1(0, T). \quad (1.6)$$

Здесь $L^2(0, l)$ и $L^2(0, T)$ — пространства Лебега, а $H^1(0, l) = W_2^1(0, l)$ и $H^1(0, T) = W_2^1(0, T)$ — пространства Соболева. Хорошо известно, что сильное обобщенное решение $y(t, x)$ непрерывно на замкнутом прямоугольнике $[0, T] \times [0, l]$ и обладает следующими дополнительными свойствами:

$$\begin{aligned} y &\in C([0, T]; H^1(0, l)), & y &\in C([0, l]; H^1(0, T)), \\ y_t &\in C([0, T]; L^2(0, l)), & y_x &\in C([0, l]; L^2(0, T)). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Следуя [3, с. 425–427; 5; 6], перейдем к формальной постановке задачи позиционного управления (1.1)–(1.5).

О п р е д е л е н и е 1. Наблюдением с помехой уровня $\sigma \geq 0$ называется функция $g^\sigma = g^\sigma(t) \in H^1(0, T)$, удовлетворяющая условию

$$\|g^\sigma - g\|_{H^1(0, T)} \leq \sigma. \quad (1.8)$$

Предысторией наблюдения с помехой уровня σ к моменту τ называется функция $g_\tau^\sigma = g_\tau^\sigma(t) \in H^1(0, \tau)$ такая, что $g_\tau^\sigma(t) = g^\sigma(t)$, $t \in (0, \tau)$.

Зафиксируем натуральное число N и разобьем интервал $(0, T)$ на N равных частей $\Theta_i = (t_i, t_{i+1})$, $t_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N-1$, с шагом $h = T/N$. Рассмотрим управление $\tilde{u}(t)$, принимающее на каждом из частичных интервалов постоянные значения $\tilde{u}(t) \equiv \tilde{u}_i$, $t \in \Theta_i$, $i = 0, 1, \dots, N-1$. Обозначим через $\tilde{y}(t, x)$ решение задачи (1.1)–(1.3), соответствующее кусочно-постоянному управлению $u(t) = \tilde{u}(t)$, а через \tilde{g}_τ^σ — предысторию наблюдения к моменту τ для этой задачи в присутствии помехи уровня σ .

О п р е д е л е н и е 2. Позиционной стратегией называется произвольное однопараметрическое семейство $S_N = (N, \{\tilde{U}_i\}_{i=1}^{N-1})$, $N = 1, 2, \dots$, функционалов $\tilde{U}_i : H^1(0, t_i) \rightarrow \mathbb{R}$. Движением системы (1.1)–(1.3) под действием позиционной стратегии S_N с помехой уровня σ называется решение $\tilde{y}(t, x)$, соответствующее управлению $\tilde{u}(t)$, принимающему постоянные значения на частичных интервалах разбиения: $\tilde{u}(t) = \tilde{u}_i = \tilde{U}_i(\tilde{g}_\tau^\sigma) \big|_{\tau=t_i}$ при $t \in \Theta_i$, $i = 1, 2, \dots, N-1$. Значение $\tilde{u}(t) = \tilde{u}_0 \in \mathbb{R}$ управления на начальном участке $t \in \Theta_0 = (0, h)$, на котором предыстория наблюдений еще отсутствует, выбирается произвольным образом.

Несложно показать, что для любой стратегии S_N движение $\tilde{y}(t, x)$ существует и может быть построено последовательным продолжением решения задачи (1.1)–(1.3) в расширяющиеся прямоугольники $(0, t_{i+1}) \times (0, l)$, $i = 0, 1, \dots, N-1$. Следующее определение представляет собой модификацию аналогичных определений из [5; 6], усиленную дополнительным требованием сходимости по управлению.

О п р е д е л е н и е 3. Последовательность позиционных стратегий S_{N_k} , $k = 1, 2, \dots$, решает задачу гарантирующего управления (1.1)–(1.5), если для любого начального состояния $v(x)$ из пространства (1.6) последовательность определяемых этими стратегиями кусочно-постоянных управлений $\tilde{u}^{N_k}(t)$ сходится к некоторому управлению $u_*(t) = u_*(t; v)$, решающему задачу успокоения (1.1)–(1.4) для данного $v(x)$:

$$\|\tilde{u}^{N_k} - u_*\|_{L^2(0,T)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty, \quad \sigma \rightarrow 0. \quad (1.9)$$

В данной работе предложен трехэтапный численный метод построения стратегий S_{N_k} , решающих за время $T > 4l$ задачу (1.1)–(1.5) в смысле определения 3. В разд. 2 приводится описание первого этапа, в разд. 3 – второго и третьего. В разд. 4 доказывается, что за время $T < 4l$ задача неразрешима даже в простейшем случае, когда $q(x) \equiv 0$, что свидетельствует об оптимальности предлагаемого алгоритма по времени гарантированного успокоения. В разд. 5 приводятся результаты численных экспериментов.

2. Описание первого этапа

На первом этапе работы алгоритма строится управление $u(t)$ на промежутке $t \in (0, 2l)$, на котором полученной информации о предыстории наблюдения $g_t(\cdot)$ еще недостаточно для восстановления начального состояния $v(x)$, что препятствует немедленному началу процесса активного и гарантированного успокоения (см. подробности в разд. 4). Компромиссным вариантом на первом этапе представляется выбор управления из соображений минимизации энергии или, по крайней мере, ее невозрастания.

Домножив уравнение (1.1) на y_t и проинтегрировав по прямоугольнику $(0, t) \times (0, l)$, с учетом условий (1.2) и (1.5), получим следующее соотношение, представляющее собой закон изменения энергии $E(t)$ [1, с. 125]:

$$E(t) - E(0) = \int_0^t u(\tau) g'(\tau) d\tau, \quad E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l (y_t^2(t, x) + y_x^2(t, x) + q(x) y^2(t, x)) dx. \quad (2.1)$$

Продифференцировав первое из соотношений (2.1) по t , получим выражение для производной энергии: $E'(t) = u(t) g'(t)$. Направим действия управляющей стороны на минимизацию производной энергии в каждый момент $t \in (0, 2l)$:

$$u(t) g'(t) \rightarrow \min_{u(t) \in \mathbb{R}}, \quad 0 < t < 2l. \quad (2.2)$$

Установим зависимость между $u(t)$ и $g'(t)$, полезную для решения задачи (2.2). Для этого проинтегрируем уравнение (1.1) по части характеристики $\tau + s = t$, расположенной внутри прямоугольника $(\tau, s) \in (t/2, t) \times (0, l)$:

$$g'(t) = u(t) + A(t), \quad A(t) = - \int_0^{t/2} q(x) y(t-x, x) dx + y_t\left(\frac{t}{2}, \frac{t}{2}\right) + y_x\left(\frac{t}{2}, \frac{t}{2}\right), \quad 0 < t < 2l. \quad (2.3)$$

Значение выражения $A(t)$ в (2.3) зависит лишь от предыстории $u(\tau)$, $\tau < t$, поэтому после подстановки (2.3) в (2.2) приходим к задаче минимизации функционала $E'(t) = u(t) (u(t) + A(t))$, решением которой является $u(t) = -A(t)/2$. Подставив $A(t) = -2u(t)$ в (2.3), получим выражение для управления непосредственно через наблюдение:

$$u(t) = -g'(t), \quad 0 < t < 2l. \quad (2.4)$$

Для доказательства существования сильного обобщенного решения $y(t, x)$ смешанной задачи (1.1)–(1.3), удовлетворяющего дополнительным условиям (1.5) и (2.4), достаточно доказать

существование решения задачи (1.1)–(1.3), в которой левое граничное условие замещено однородным условием вида

$$y_x(t, 0) - y_t(t, 0) = 0, \quad 0 < t < 2l. \quad (2.5)$$

Приведем одну из возможных схем рассуждений. Продолжим данные задачи (1.1)–(1.3) на промежуток $x \in (-2l, 0)$ следующим образом: $q(x) \equiv 0$, $v^0(x) \equiv v^0(0)$, $v^1(x) \equiv 0$ и на левом конце $x = -2l$ поставим условие первого рода: $y(t, -2l) = v^0(0)$, $t \in (0, 2l)$. Существование и единственность сильного обобщенного решения $Y(t, x)$ такой задачи в прямоугольнике $(t, x) \in (0, 2l) \times (-2l, l)$ доказаны в [7], а дополнительные свойства регулярности следов типа (1.7) устанавливаются аналогично [1, с. 104–114]. Интегрирование дифференциального уравнения (1.1) по части характеристики $\tau = x + t$, $-t < x < 0$, приводит к желаемому равенству (2.5) в точке $x = 0$: $Y_t(t, 0) = Y_x(t, 0)$, $0 < t < 2l$. Единственность решения $y(t, x)$ следует из единственности продолженного решения $Y(t, x)$.

Построим семейство стратегий S_N , $N = 1, 2, \dots$, определяющих кусочно-постоянные управления $\tilde{u}(t) = \tilde{u}^N(t)$, сильно сходящиеся при $N \rightarrow \infty$ к $u_*(t) = -g'_*(t)$ в пространстве $L^2(0, 2l)$. Для фиксированного номера N выберем функционалы \tilde{U}_i со значениями \tilde{u}_i из соображений аппроксимации условия (2.4):

$$\tilde{u}_0 = 0, \quad \tilde{u}_i = -\frac{g(t_i) - g(t_{i-1})}{2h} + \frac{1}{2}\tilde{u}_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (2.6)$$

Заявленная выше сходимостъ следует из соотношения (2.3), оценок слабых обобщенных решений задачи (1.1)–(1.3), компактности вложения $L^2(0, 2l) \subset (H^1(0, 2l))^*$, имеющей место при общепринятом отождествлении $(L^2)^* \simeq L^2$, и теоремы Банаха — Штейнгауза [8, с. 198].

З а м е ч а н и е 1. Возможны и другие, отличные от (2.6), конструкции приближенных управлений, обладающие требуемым свойством сходимости, однако к их выбору следует подходить осторожно. Например, простая и, казалось бы, естественная конструкция позиционных управлений вида $\tilde{u}_i = -(g(t_i) - g(t_{i-1}))/h$ не будет сходиться к интересующему нас пределу $u_*(t) = -g'_*(t)$.

З а м е ч а н и е 2. Подстановка (2.4) в (2.1) для предельного управления $u_*(t)$ приводит к равенству $E(t) = E(0) - \int_0^t u_*^2(\tau) d\tau$, из которого следует строгое убывание энергии системы (1.1)–(1.3) для нетривиальных управлений $u_*(t)$.

3. Описание второго и третьего этапов

Выбор стратегии управления при $t > 2l$ основывается на том, что нулевые терминальные условия (1.4) вместе с правым однородным граничным условием (1.2) определяют единственное тривиальное решение дифференциального уравнения (1.1) в треугольнике $|t - T| < x < l$, а именно справедлива следующая

Лемма. Для любого начального состояния $v(x)$ и управления $u(t)$ соответствующее им решение $y(t, x)$ системы (1.1)–(1.3) удовлетворяет условию успокоения (1.4) тогда и только тогда, когда продолжение этого решения в трапецию $0 < x < l$, $0 < t < T + x$ удовлетворяет на правом конце $x = l$ однородным условиям и Неймана (1.2) и Дирихле:

$$y|_{x=l} = 0, \quad T - l < t < T + l. \quad (3.1)$$

Целью второго этапа $2l < t < 2l + \varepsilon$ является приведение системы в момент $3l + \varepsilon$ в состояние с нулевым правым граничным значением, а целью третьего этапа $2l + \varepsilon < t < 4l + \varepsilon$ — сохранение нулевого значения в соответствии с (3.1) до момента $5l + \varepsilon$. В результате исходная задача успокоения (1.1)–(1.4) будет решена за время $T = 4l + \varepsilon$. Параметр $\varepsilon > 0$ считается заданным. Как и для первого этапа, сначала укажем схему построения управления для предельного непрерывного случая, а затем опишем ее аппроксимацию. Теоретически второй этап

необходим только в том в случае, когда $y(3l, l) \neq 0$, однако с учетом возможности регулировать его протяженность ε , удобства работы с единообразными конструкциями управлений и присутствия погрешностей вычислений и измерений будем считать, что второй этап активируется всегда. В соответствии с леммой целью управления на втором этапе является достижение равенства $y(3l + \varepsilon, l) = 0$ при соблюдении условия $y(t, l) \in H^1(0, 3l + \varepsilon)$. Конструкции предельных управлений $u_*(t)$ связаны со следующей задачей для волнового уравнения с данными Коши на прямой $x = l$:

$$\psi_{tt} = \psi_{xx} - q(x)\psi, \quad t \in \mathbb{R}, \quad 0 < x < l, \quad (3.2)$$

$$\psi|_{x=l} = \Phi(t), \quad \psi_x|_{x=l} = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

Значения функции $\Phi(t)$ свяжем с граничными значениями $y(t, l)$ решения задачи (1.1)–(1.3) и условием (3.1):

$$\Phi(t) \equiv y(l, l), \quad t \leq l; \quad \Phi(t) = y(t, l), \quad t \in (l, 3l]; \quad (3.4)$$

$$\Phi(t) = \varphi(t), \quad t \in (3l, 3l + \varepsilon]; \quad \Phi(t) \equiv 0, \quad t > 3l + \varepsilon,$$

а интерполянт $\varphi(t)$ выберем из условий $\varphi \in H^1(3l, 3l + \varepsilon)$, $\varphi(3l) = y(3l, l)$, $\varphi(3l + \varepsilon) = 0$.

Присутствующая в (3.4) функция $y(t, l)$, $t \in (l, 3l]$, является результатом последовательного решения двух прямых задач для уравнения (1.1). В первой задаче находятся следы $y(l, \cdot)$, $y_t(l, \cdot)$ по известным значениям (1.2), (1.5) управлений $u_*(t)$ и наблюдений $g_*(t)$ на левой границе $x = 0$ при $0 < t < 2l$, которые определяют решение $y(t, x)$ в характеристическом треугольнике $0 < x < l$, $x < t < 2l - x$. Второй задачей является начально-краевая задача (1.1), (1.2) в трапеции $0 < x < l$, $l < t < 2l + x$, в которой в качестве начальных данных при $t = l$ используются найденные при решении первой задачи следы $y(l, \cdot)$, $y_t(l, \cdot)$. Решив задачу (3.2), (3.3), положим

$$u_*(t) = -\psi_x(t, 0), \quad 2l < t < 4l + \varepsilon. \quad (3.5)$$

Нетрудно показать, что в прямоугольнике $0 < x < l$, $2l < t < T = 4l + \varepsilon$ решение $y(t, x)$ начально-краевой задачи (1.1)–(1.3) при $u(t) = u_*(t)$ и решение $\psi(t, x)$ задачи Коши (3.2), (3.3) совпадают, т.е. значения управления по правилу (3.5) на заключительном этапе определены корректно.

Для построения семейства стратегий S_N на промежутке $t \in (2l, T = 4l + \varepsilon)$ используется дискретизация. Для приближенного решения задачи (3.2), (3.3) можно взять аппроксимационную схему из [9]. Для простоты предположим, что равномерное разбиение пространственного промежутка $[0, l]$ возможно с тем же самым шагом $h = T/N$, т.е. $T/N = l/M$ при некотором натуральном M . Обозначим через $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, M$, узлы этого разбиения, а через Q_i^j – ячейки, привязанные к узлам t_j, x_i , $j = 0, \pm 1, \dots$, $i = 0, 1, \dots, M$:

$$Q_i^j = \{t_j - h/2 < t < t_j + h/2, \quad x_i - h/2 < x < x_i + h/2\} \cap Q.$$

Определим ступенчатые функции $e_i^j(t, x)$ вида

$$e_i^j(t, x) = 1, \quad (t, x) \in Q_i^j; \quad e_i^j(t, x) = 0, \quad (t, x) \notin Q_i^j.$$

Приближенное решение задачи (3.2), (3.3) будем искать в виде линейной комбинации

$$\tilde{\psi}(t, x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^M \psi_i^j e_i^j(t, x),$$

коэффициенты которой определяются из условий

$$\psi_i^j = \frac{1}{2}(\Phi(t_j + (l - x_i)) + \Phi(t_j - (l - x_i))) + \frac{1}{2} \int_{x_i}^l d\eta \int_{t_j - (\eta - x_i)}^{t_j + (\eta - x_i)} q(\xi) \tilde{\psi}(\eta, \xi) d\xi. \quad (3.6)$$

Соотношения (3.6) выбраны с учетом формулы Даламбера, выражающей значения решения $\psi(t, x)$ задачи (3.2), (3.3) в узлах $(t = t_j, x = x_i)$ через данные (3.3) при $x = l$. Производную $\psi_x(t, x)$ аппроксимируем аналогичным образом, ориентируясь на продифференцированную по x формулу Даламбера:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(t, x) &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^M \Psi_i^j e_i^j(t, x), \quad \Psi_i^j = \frac{1}{2} (-\Phi'(t_j + (l - x_i)) + \Phi'(t_j - (l - x_i))) \\ &- \frac{1}{2} \int_{x_i}^l q(t_j - (\eta - x_i)) \tilde{\psi}(\eta, t_j - (\eta - x_i)) d\eta - \frac{1}{2} \int_{x_i}^l q(t_j + (\eta - x_i)) \tilde{\psi}(\eta, t_j + (\eta - x_i)) d\eta. \end{aligned}$$

Значения приближенного управления на втором и третьем этапах будем задавать по правилу $\tilde{u}(t) = -\tilde{\Psi}(t - h/2, 0)$, $2l < t < 4l + \varepsilon$, которому в стратегии S_N соответствует выбор функционалов \tilde{U}_i , ставящих в соответствие предыстории наблюдений g_τ значения $-\Psi_0^i$. Предполагается, что при вычислении нужных нам граничных значений $y(t, l)$, $t \in (l, 3l]$, являющихся результатом первого этапа управления, обе вспомогательные задачи аппроксимируются аналогичным образом.

Сходимость приближенных управлений \tilde{u} к u_* и их устойчивость по отношению к возмущениям наблюдений g следуют из сходимостей решений соответствующих прямых задач в классе сильных обобщенных решений (1.7), которые устанавливаются по аналогии с [9].

З а м е ч а н и е 3. Практически реализовать описанную стратегию S_N можно так, что объем вычислений для каждого очередного значения функционала \tilde{U}_i не превысит $O(N)$ и при этом потребуется объем машинной памяти, ограниченный величиной того же порядка $O(N)$.

Подытожим результаты разд. 2 и 3 следующей теоремой, схема доказательства которой была приведена выше.

Теорема 1. Пусть $T = 4l + \varepsilon$, l/T является рациональным числом и выбраны две последовательности натуральных чисел N_k и M_k такие, что $M_k/N_k = l/T$ и $M_k, N_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда построенная последовательность стратегий S_{N_k} решает задачу гарантирующего управления (1.1)–(1.5) в смысле определения 3.

З а м е ч а н и е 4. Если в условии теоремы 1 отказаться от требования рациональности отношения l/T , то придется рассматривать аппроксимационные схемы для задачи (3.2), (3.3) и двух предшествующих ей вспомогательных задач с различными шагами по t и по x . К сожалению, для таких схем мы не можем предложить алгоритм со столь же экономичными (или хотя бы сопоставимыми) вычислительными характеристиками, которые указаны в замечании 3, и поэтому предпочитаем считать требование рациональности выполненным, тем более что это легко обеспечивается соответствующим выбором длины T временного промежутка.

З а м е ч а н и е 5. Построенные выше стратегии S_N при $\tau > 2l$ используют не всю предысторию наблюдения к моменту τ , а только ее начальную часть: $g_\tau(t)$, $t < 2l$. Можно предложить модификации алгоритма, обладающие характеристиками из замечания 3, в которых используемая часть наблюдений будет или меняться с течением времени, или усредняться с остальными частями. В рамках рассматриваемой постановки задачи эти модификации ничем не отличаются от предлагаемого алгоритма, однако они могут быть интересны с точки зрения других постановок, например для уменьшающегося с течением времени уровня зашумления наблюдений.

4. Неразрешимость задачи при $T < 4l$

Отметим, что в рассматриваемых классах сильных обобщенных решений задача управления (1.1)–(1.4) при $T > T_* = 2l$ разрешима для любых известных начальных состояний $v(x)$, а

для любого $T \leq T_*$ найдется начальное состояние $v_T(x)$, которое невозможно успокоить в смысле условия (1.4) за время T . Доказательства этих утверждений проводятся аналогично [10; 11]. Значение T_* обычно называют критическим моментом времени для системы (1.1)–(1.3) [1, с. 132]. Понятно, что на классе *неизвестных* начальных состояний $v(x)$ рассматриваемая задача гарантирующего позиционного управления (1.1)–(1.5) также неразрешима при $T \leq T_*$. В следующей теореме будет показано, что разрешимость этой задачи, вообще говоря, отсутствует и при $T \in (T_*, 2T_*)$. Учитывая доказанную в разд. 2 и 3 разрешимость при $T > 2T_* + \varepsilon = 4l + \varepsilon$ для сколь угодно малых $\varepsilon > 0$, значение $T = 2T_*$ можно будет трактовать как аналог критического момента для класса управлений, являющихся неупреждающими относительно наблюдения $g(t)$.

Теорема 2. *В задаче (1.1)–(1.5) не существует последовательности стратегий, гарантирующей успокоение процесса за время $T < 2T_* = 4l$ в смысле определения 3.*

Доказательство. Докажем, что такой стратегии не существует даже в простейшем случае $q(x) \equiv 0$, в котором возможны явные аналитические конструкции позиционных управлений $u(t)$, реагирующих на непрерывно поступающие и абсолютно точные ($\sigma = 0$) наблюдения $g(t)$. По данному $T < 4l$ найдем некоторое $\varepsilon \in (0, l)$ такое, что $T - l < 3l - 2\varepsilon$, и предположим существование последовательности стратегий S_{N_k} , способных для любого начального состояния $v(x)$ сформировать позиционные управления \tilde{u}^{N_k} , асимптотически гарантирующие успокоение системы за время T , т. е. обладающие свойством сходимости (1.9). Применим эти стратегии к процессу с нулевым начальным состоянием $v_0(x) = (v_0^0(x) = 0, v_0^1(x) = 0)$ и обозначим через $u_{*0}(t)$ и $y_0(t, x)$ соответствующие предельное управление и решение задачи (1.1)–(1.3).

Рассмотрим вспомогательную смешанную задачу с начальными данными на слое $t = l - \varepsilon$:

$$\begin{aligned} w_{tt} &= w_{xx}, & (t, x) \in Q, \\ w_x|_{x=0} &= 0, & w_x|_{x=l} = 0, & 0 < t < T, \\ w|_{t=l-\varepsilon} &= 0, & w_t|_{t=l-\varepsilon} &= H(x - (l - \varepsilon)), & 0 < x < l, \end{aligned}$$

где $H(x)$ — функция Хевисайда. Возьмем пару следов $v_1(x) = (w(0, \cdot), w_t(0, \cdot))$ в качестве начального условия системы (1.1)–(1.3) и обозначим через $u_{*1}(t)$ и $y_1(t, x)$ соответствующие ему предельное управление и решение смешанной задачи (1.1)–(1.3). Заметим, что $w(t, 0) = 0$ при $t \in (0, 2l - 2\varepsilon)$. Отсюда и из левого граничного условия для функции $w(t, x)$ следует, что кусочно-постоянные управления, построенные с помощью стратегии S_{N_k} для начальных состояний $v_0(x)$ и $v_1(x)$, будут совпадать для каждого фиксированного k на интервале $t \in (0, 2l - 2\varepsilon)$, а тогда в силу (1.9) будут совпадать и предельные управления: $u_{*0}(t) = u_{*1}(t)$, $t \in (0, 2l - 2\varepsilon)$.

Далее заметим, что функция $d(t, x) = y_0(t, x) + w(t, x) - y_1(t, x)$ удовлетворяет уравнению (1.1), правому граничному условию (1.2), нулевому начальному условию (1.3), а также левому краевому условию (1.2), являющемуся однородным при $t < 2l - 2\varepsilon$. Отсюда имеем вырождение $d(t, x) \equiv 0$, $t < 2l - 2\varepsilon + x$, и, в частности, $y_0(t, l) + w(t, l) = y_1(t, l)$, $t \in (T - l, 3l - 2\varepsilon)$. В силу леммы и с учетом того, что T — время гарантированного успокоения для любых $v(x)$, будем иметь $y_0(t, l) = y_1(t, l) = 0$, $t > T - l$, т. е. $w(t, l) = 0$, $t \in (T - l, 3l - 2\varepsilon)$. Однако, решая задачу для $w(t, x)$, можно убедиться, что $w(3l - 2\varepsilon, l) = \varepsilon \neq 0$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

5. Вычислительные эксперименты

В данном разделе приводятся результаты вычислительных экспериментов для задачи (1.1)–(1.5) при $l = 1$ и $q(x) = 0$. В (1.3) были взяты следующие два начальных состояния:

$$v_0(x) = (v_0^0(x) = -1, v_0^1(x) = 1), \quad v_1(x) = (v_1^0(x) = 1, v_1^1(x) = 1), \quad 0 < x < l.$$

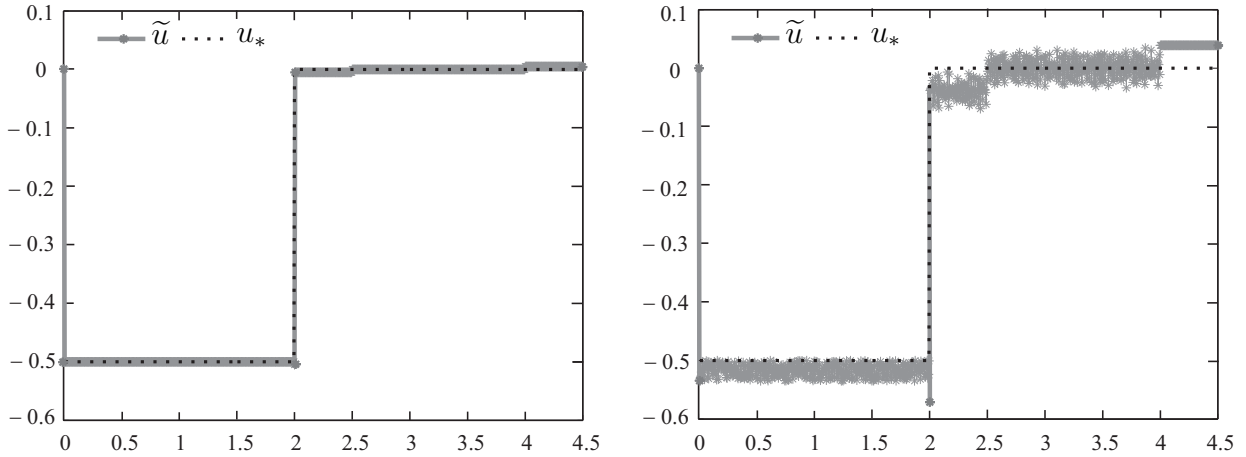


Рис. 1. Графики $\tilde{u}(t)$ и $u_*(t)$ для $v(x) = v_0(x)$ в случаях $\delta = 0$ (слева) и $\delta = 5\%$ (справа).

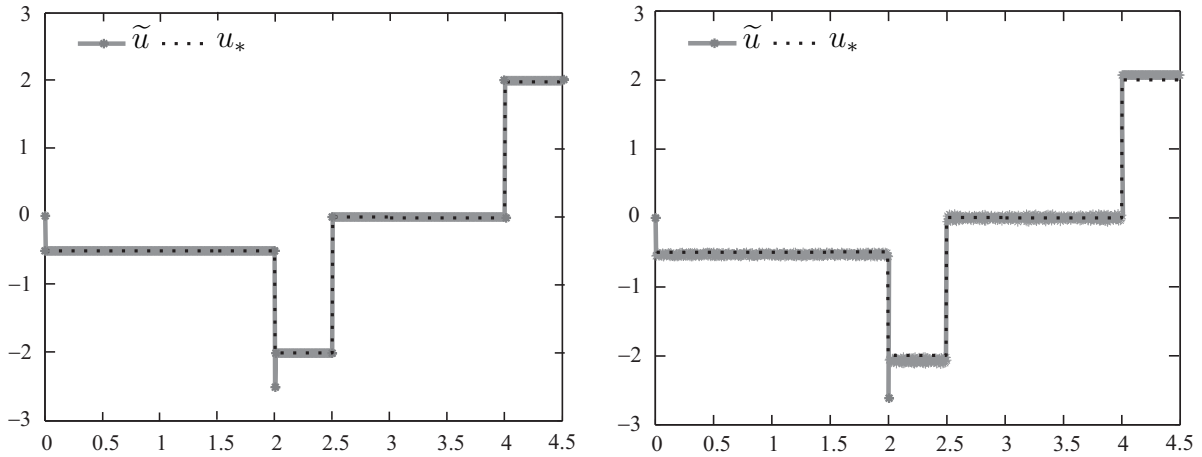


Рис. 2. Графики $\tilde{u}(t)$ и $u_*(t)$ для $v(x) = v_1(x)$ в случаях $\delta = 0$ (слева) и $\delta = 5\%$ (справа).

Качественное различие между ними состоит в том, что из *известного* состояния $v_0(x)$ систему можно перевести в состояние покоя (1.4) за критическое время $T = T_* = 2$, а из *известного* состояния $v_1(x)$ это возможно лишь за время $T > 2$. Этим можно объяснить заметную разницу во времени перевода этих *неизвестных* состояний в состояние покоя с помощью позиционных управлений, формируемых предложенным в работе алгоритмом.

Длительность второго этапа, на котором производится перевод правых граничных значений $y(t, l)$ на нулевой уровень, мы приняли равной $\varepsilon = 1/2$, а в качестве конечного момента времени взяли $T = 4l + \varepsilon = 9/2$. Интерполяционная функция $\varphi(t)$ из (3.4) была выбрана линейной. Отметим, что отношение $l/T = 2/9$ является рациональным числом, а количества N_k и M_k интервалов разбиения на $(0, T)$ и $(0, l)$ выбирались как $N_k = 9k$, $M_k = 2k$.

Предельное позиционное управление для начального состояния $v(x) = v_0(x)$ имеет вид

$$u_*(t) = -1/2, \quad t \in (0, 2); \quad u_*(t) = 0, \quad t \in (2, 9/2),$$

а для начального состояния $v(x) = v_1(x)$ оно записывается как

$$u_*(t) = -1/2, \quad t \in (0, 2); \quad u_*(t) = -2, \quad t \in (2, 5/2);$$

$$u_*(t) = 0, \quad t \in (5/2, 4); \quad u_*(t) = 2, \quad t \in (4, 9/2).$$

Заметим, что в первом случае процесс удастся успокоить досрочно за время $t = 2$, а во втором — лишь за время $T = 9/2$.

Пусть $\sigma = \|g_*^\sigma - g_*\|$ — абсолютный уровень помехи из (1.8) для наблюдения $g_*(t)$, соответствующего предельному управлению $u_*(t)$, а $\delta = \sigma/\|g_*\|$ — ее относительный уровень. На рис. 1 для $v(x) = v_0(x)$ изображены графики приближенного и точного управлений $\tilde{u}(t)$ и $u_*(t)$ для $M = 200$, $N = 900$ в случаях $\delta = 0$ и $\delta = 5\%$. Уровни погрешностей по управлению, на наш взгляд, оказались вполне приемлемыми и в относительных единицах составили $\|\tilde{u} - u_*\|/\|u_*\| = 7,14\%$ для $\delta = 0$ и $10,6\%$ для $\delta = 5\%$. На рис. 2 приведены аналогичные графики для начального состояния $v_1(x)$. Управление при этом было найдено с погрешностью $2,38\%$ для $\delta = 0$ и погрешностью $5,18\%$ для $\delta = 5\%$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Приближенное решение двойственных задач управления и наблюдения / Ф.П. Васильев, М. А. Куржанский, М. М. Потапов, А. В. Разгулин. М. : МАКС Пресс : Издат. отд. фак. ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова, 2010. 384 с.
2. Потапов М.М., Дряженков А.А. Оптимизация порогового момента в неравенстве наблюдаемости для волнового уравнения с краевым условием упругого закрепления // Тр. МИАН. 2012. Т. 277. С. 215–229.
3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М. : Наука, 1974. 456 с.
4. Ильин В.А. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, вып. 2. С. 97–154.
5. Осипов Ю.С. Пакеты программ: подход к решению задач позиционного управления с неполной информацией // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61, вып. 4. С. 25–76.
6. Кряжимский А.В., Осипов Ю.С. Идеализированные пакеты программ и задачи позиционного управления с неполной информацией // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 139–157.
7. Крицков Л.В., Абдукаримов М.Ф. Граничное управление смещением на одном конце при свободном втором для процесса, описываемого телеграфным уравнением с переменным коэффициентом // Докл. АН. 2013. Т. 450, № 6. С. 640–643.
8. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Изд. 4-е, перераб. М. : Наука, 1976. 543 с.
9. Иванов Д.А., Потапов М.М. Приближенное решение задачи быстрогодействия для волнового уравнения с граничными управлениями // Тр. МИАН. 2015. Т. 291. С. 112–127.
10. Дряженков А.А., Потапов М.М. Конструктивные неравенства наблюдаемости для слабых обобщенных решений волнового уравнения с условием упругого закрепления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2014. Т. 54, № 6. С. 928–941.
11. Дряженков А.А. Неравенство наблюдаемости для волнового уравнения с условием упругого закрепления в случае критического интервала времени // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15: Вычисл. математика и кибернетика. 2014. № 3. С. 18–22.

Дряженков Андрей Александрович
аспирант
МГУ им. М. В. Ломоносова
e-mail: andrja@yandex.ru

Поступила 19.12.2015

Потапов Михаил Михайлович
д-р физ.-мат. наук, доцент
профессор
МГУ им. М. В. Ломоносова
e-mail: mpotapov@tochka.ru