ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 2 2016

УДК 517.929

УРАВНЕНИЕ РИККАТИ ДЛЯ АВТОНОМНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Ю. Ф. Долгий

Рассматривается задача оптимальной стабилизации для автономных линейных систем дифференциальных уравнений с неограниченным последействием. Обосновано сведение проблемы разрешимости операторного уравнения Риккати к аналогичной проблеме для функционально-дифференциального уравнения Риккати. Описан класс систем дифференциальных уравнений с неограниченными последействиями, для которых функционально-дифференциальные уравнения Риккати допускают аналитические решения.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с последействием, оптимальное стабилизирующее управление, квадратичный критерий качества, уравнение Риккати.

Yu. F. Dolgii. The Riccati equation for autonomous linear systems with unbounded aftereffect.

The problem of optimal stabilization for autonomous linear systems of differential equations with unbounded aftereffect is considered. The reduction of the solvability problem for the Riccati operator equation to the analogous problem for the Riccati functional–differential equation is proved. A class of systems of differential equations with unbounded aftereffect for which the Riccati functional–differential equation can be solved analytically is described.

Keywords: differential equations with aftereffect, optimal stabilizing control, quadratic performance index, Riccati equation.

MSC: 34K06, 34K20, 34K30

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-129-137

Введение

Основы теории оптимальной стабилизации для систем с ограниченным последействием заложены в работах Н. Н. Красовского [1]. Проблема стабилизируемости таких систем исследовалась в работе Ю. С. Осипова [2]. Прогресс в развитии теории оптимальной стабилизации для систем с последействием связан, прежде всего, с развитием аппроксимационных методов [2]. Постановка задачи оптимальной стабилизации в гильбертовом пространстве состояний приводит к операторному уравнению Риккати [3]. Этот подход реализуется в данной работе для систем с неограниченным последействием. Проблема нахождения точных решений операторного уравнения Риккати оказалась достаточно сложной [4]. В работе [5] показано, что проблему нахождения решения операторного уравнения Риккати для автономной линейной системы дифференциальных уравнений с ограниченным последействием можно свести к аналогичной проблеме для функционально-дифференциального уравнения Риккати. В данной статье установлено, что аналогичный результат имеет место для неограниченного последействия. Проблема нахождения точных решений функционально-дифференциального уравнения Риккати также оказалась достаточно сложной. В случае ограниченного последействия в [5] предложен обратный метод построения решений функционально-дифференциального уравнения Риккати для специального класса систем. В данной статье для аналогичных систем с неограниченным последействием предложен прямой метод построения решений функционально-дифференциального уравнения Риккати.

1. Оптимальная стабилизация автономных линейных систем с неограниченным последействием

Пусть $\mathbb{C} = \mathbb{C}\left((-\infty, 0], \mathbb{R}^n\right)$ — пространство непрерывных равномерно ограниченных на отрицательной полуоси функций со значениями в пространстве $\mathbb{R}^n$ и нормой

$$\|x(\cdot)\|_C = \sup_{t\in(-\infty,0]} |x(t)|;$$

$\mathbb{H} = \mathbb{L}_2\left((-\infty, 0], \mathbb{R}^n, \mu\right)$ — пространство функций, интегрируемых с квадратом на отрицательной полуоси, со скалярным произведением

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \int\limits_{-\infty}^{0} \mathbf{y}^\top(\vartheta)\mathbf{x}(\vartheta)d\mu(\vartheta)$$

и нормой $\|\mathbf{x}\|_H = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}$. Здесь мера определяется функцией $\mu(\vartheta) = \vartheta$, $-\infty < \vartheta < 0$, $\mu(0) = 1$. Рассмотрим произвольное разбиение Δ отрицательной полуоси точками последовательности $\{\vartheta_j\}_{j=1}^{+\infty}$, $-\infty < \vartheta_{j+1} < \vartheta_j < 0$, $j = \overline{1, +\infty}$, $\vartheta_0 = 0$. Матричнозначная функция $\eta : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ имеет ограниченную вариацию на $(-\infty, 0]$, определяемую формулой $Var\,\eta = \sup\limits_{\Delta} \sum_{j=0}^{+\infty} |\eta(\vartheta_{j+1}) - \eta(\vartheta_j)|, \eta(0) = 0_n$. Объект управления описывается автономной линейной системой дифференциальных уравнений с неограниченным последействием

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int\limits_{-\infty}^{0} d[\eta(s)]x(t+s) + Bu, \tag{1.1}$$

где $t \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$, $x : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}^n$; $u \in \mathbb{R}^m$ — управление; B — постоянная матрица.

Требуется найти управление, формируемое по принципу обратной связи, которое обеспечивает устойчивую работу системы (1.1) и минимизирует заданный критерий качества переходных процессов

$$J = \int\limits_{0}^{+\infty} \Big(x^\top(t)C_x x(t) + u^\top(t)C_u u(t)\Big)\, dt, \tag{1.2}$$

где C_x и C_u — положительно определенные матрицы. Управление, решающее эту задачу, называется оптимальным стабилизирующим управлением.

При $u = 0$ задача Коши для системы (1.1) корректна, т. е. для любой начальной функции $\varphi \in \mathbb{C}$ существует единственное решение $x(t, \varphi), t > 0$, системы (1.1), непрерывно зависящее от $\varphi \in \mathbb{C}$ при каждом t на любом конечном отрезке положительной полуоси [6, с. 120]. Используя определение полугруппы для автономной линейной системы дифференциальных уравнений с последействием [7, с. 201] и формулу общего решения для этой системы [7, с. 180], запишем представления эволюционных операторов:

$$(\mathbf{T}(t)\varphi)(\vartheta) = \varphi(t+\vartheta), \quad -\infty < \vartheta \le -t, \quad t \ge 0,$$

$$(\mathbf{T}(t)\varphi)(\vartheta) = V(t+\vartheta)\varphi(0) + \int\limits_{-\infty}^{-0} d_\alpha\Bigg[\int\limits_{0}^{t+\vartheta} V(t+\vartheta-z)\eta(\alpha-z)dz\Bigg]\varphi(\alpha) = V(t+\vartheta)\varphi(0)$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{0} \Bigg(V(t+\vartheta)\eta(\alpha) - \eta(\alpha-t-\vartheta) - \int\limits_{\alpha-t-\vartheta}^{\alpha} \frac{dV(t+\vartheta+\beta-\alpha)}{d\beta}\eta(\beta)d\beta\Bigg)\varphi(\alpha)d\alpha,$$

$-t < \vartheta \le 0$, $t > 0$, $\varphi \in \mathbb{C}$, где V — фундаментальная матрица системы (1.1).

В дальнейшем полугруппу $\{\mathbf{T}(t),\, t \geq 0\}$ будем рассматривать в гильбертовом пространстве состояний $\mathbb{H}$. Неограниченный замкнутый инфинитезимальный оператор $\mathbf{A}$ этой полугруппы имеет область определения $\mathfrak{D}(\mathbf{A}) = \mathbb{W}_2^1\left((-\infty, 0], \mathbb{R}^n\right)$ и задается формулами

$$(\mathbf{A}\mathbf{x})(\vartheta) = \frac{d\mathbf{x}(\vartheta)}{d\vartheta}, \quad \vartheta \in (-\infty, 0), \quad (\mathbf{A}\mathbf{x})(0) = \int\limits_{-\infty}^{0} d[\eta(s)]\mathbf{x}(s).$$

Допустимые управления $\mathbf{u}[\mathbf{x}]$, $\mathbf{x} \in \mathbb{H}$, формируемые по принципу обратной связи, порождаются линейными непрерывными отображениями $\mathbb{H} \to \mathbb{R}^m$. Требуется в классе допустимых управлений найти оптимальное стабилизирующее управление, которое обеспечивает устойчивость уравнения

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}u, \quad t > 0,$$

и минимизирует заданный критерий качества переходных процессов

$$\mathbf{J} = \int\limits_{0}^{+\infty} \Big(\langle \mathbf{C}_x \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t \rangle + u^\top(t) C_u u(t) \Big)\, dt.$$

Здесь ограниченный оператор $\mathbf{B} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{H}$ и ограниченный самосопряженный положительный оператор $\mathbf{C}_x : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ определяются формулами

$$(\mathbf{B}u)(\vartheta) = 0, \quad \vartheta \in (-\infty, 0), \quad (\mathbf{B}u)(0) = Bu,$$

$$(\mathbf{C}_x\mathbf{x})(\vartheta) = 0, \quad \vartheta \in (-\infty, 0), \quad (\mathbf{C}_x\mathbf{x})(0) = C_x\mathbf{x}(0).$$

Точечный спектр оператора $\mathbf{A}$ определяется корнями характеристического уравнения

$$\det\left(\lambda I_n - \int\limits_{-\infty}^{0} \exp(\lambda s) d[\eta(s)]\right) = 0, \quad \lambda \in \mathcal{C},$$

где $\mathcal{C}$ — множество комплексных чисел. Условия, наложенные на функцию η, обеспечивают аналитичность функции, стоящей в левой части характеристического уравнения, в области $\{\lambda \in \mathcal{C} \colon \mathrm{Re}(\lambda) > 0\}$. В теории устойчивости требуется существование продолжения этой функции влево за мнимую ось. В дальнейшем будем полагать, что выполняется условие

$$|\eta(\vartheta) - \eta(-\infty)| \leq K_\eta \exp(\alpha_\eta \vartheta), \quad -\infty < \vartheta < 0, \quad K_\eta,\, \alpha_\eta > 0.$$

Тогда функция, стоящая в левой части характеристического уравнения, будет аналитической в области $\{\lambda \in \mathcal{C} \colon \mathrm{Re}(\lambda) > -\alpha_\eta\}$. Для любого $\varepsilon > 0$ в области $\{\lambda \in \mathcal{C} \colon \mathrm{Re}(\lambda) > -\alpha_\eta + \varepsilon\}$ имеется не более чем конечное число корней характеристического уравнения. Спектр оператора $\mathbf{A}$ в области $\{\lambda \in \mathcal{C} \colon \mathrm{Re}(\lambda) > -\alpha_\eta\}$ является точечным и содержит только корни характеристического уравнения. Для экспоненциальной устойчивости системы (1.1) при $u = 0$ достаточно существования такого $\varepsilon > 0$, что в области $\{\lambda \in \mathcal{C} \colon \mathrm{Re}(\lambda) > -\varepsilon\}$ отсутствуют корни характеристического уравнения [6, с. 128]. Для автономной линейной системы дифференциальных уравнений с сосредоточенным запаздыванием условия стабилизируемости получены в работе [2]. Ю. С. Осипов проблему стабилизируемости системы с запаздыванием сводит к проблеме стабилизируемости конечномерной системы, отвечающей корням характеристического уравнения с неотрицательными действительными частями. В настоящей работе рассматривается автономная линейная система дифференциальных уравнений с неограниченным последействием, характеристическое уравнение которой имеет не более чем конечное число корней характеристического уравнения с неотрицательными действительными частями. Поэтому при решении проблемы стабилизируемости можно использовать подход Ю. С. Осипова, связанный с каноническим разложением функционального пространства состояний [2]. В дальнейшем будем полагать, что система (1.1) стабилизируема.

Постановка задачи оптимальной стабилизации в гильбертовом пространстве состояний позволяет при нахождениии оптимального стабилизирующего управления использовать методы работ [3; 5].

Теорема 1 [3]. *Пусть система* (1.1) *является стабилизируемой. Тогда существует оптимальное стабилизирующее управление, определяемое формулой*

$$\mathbf{u}^0[\mathbf{x}] = -C_u^{-1}B^\top(\mathbf{U}\mathbf{x})(0),$$

где $\mathbf{U}$ — *ограниченный самосопряженный положительный оператор, удовлетворяющий операторному уравнению Риккати*

$$\mathbf{U}\mathbf{A} + \mathbf{A}^*\mathbf{U} + \mathbf{C}_x - \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U} = 0. \tag{1.3}$$

В приведенной теореме неограниченный сопряженный оператор $\mathbf{A}^*$ задается формулами

$$(\mathbf{A}^*\mathbf{y})(\vartheta) = -\frac{d\hat{\mathbf{y}}(\vartheta)}{d\vartheta}, \quad \vartheta \in (-\infty, 0), \quad (\mathbf{A}^*\mathbf{y})(0) = \hat{\mathbf{y}}(0),$$

где

$$\hat{\mathbf{y}}(\vartheta) = \mathbf{y}(\vartheta) - \eta^\top(\vartheta)\mathbf{y}(0), \quad \vartheta \in (-\infty, 0), \quad \hat{\mathbf{y}}(0) = \hat{\mathbf{y}}(-0),$$

и имеет область определения $\mathfrak{D}(\mathbf{A}^*) = \left\{\mathbf{y} \in \mathbb{H} \colon \hat{\mathbf{y}}(\cdot) \in \mathbb{W}_2^1\left((-\infty, 0], \mathbb{R}^n\right)\right\}$, а ограниченный самосопряженный положительный оператор $\mathbf{D} \colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ задается формулами $(\mathbf{D}\mathbf{x})(\vartheta) = 0$, $\vartheta \in (-\infty, 0)$, $(\mathbf{D}\mathbf{x})(0) = D\mathbf{x}(0)$, где $D = BC_u^{-1}B^\top$.

2. Функционально-дифференциальное уравнение Риккати

В работе [5] показано, что проблему нахождения решения операторного уравнения Риккати для автономной линейной системы дифференциальных уравнений с ограниченным последействием можно свести к аналогичной проблеме для функционально-дифференциального уравнения Риккати. Аналогичный результат справедлив для автономной линейной системы дифференциальных уравнений с неограниченным последействием.

Теорема 2. *Пусть система* (1.1) *является стабилизируемой. Тогда решение уравнения Риккати* (1.3) *определяет ограниченный самосопряженный положительный оператор, допускающий представление*

$$(\mathbf{U}\mathbf{x})(\vartheta) = K(\vartheta, 0)\mathbf{x}(0) + \int_{-\infty}^{0} K(\vartheta, s)\mathbf{x}(s)ds, \quad \vartheta \in (-\infty, 0], \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H}, \tag{2.1}$$

удовлетворяющее условиям гладкости:

1) $K^\top(0,0) = K(0,0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$;

2) *для почти всех* $\vartheta \in (-\infty, 0)$ *имеем* $K^\top(0,\vartheta) = K(\vartheta, 0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *и отображение* $K(\cdot, 0) \in \mathbb{L}_2((-\infty, 0), \mathbb{R}^{n\times n})$;

3) *для почти всех точек* $(\vartheta, s) \in (-\infty, 0) \times (-\infty, 0)$ *имеем* $K^\top(s, \vartheta) = K(\vartheta, s) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *и отображение* $K(\cdot,\cdot) \in \mathbb{L}_2((-\infty, 0) \times (-\infty, 0), \mathbb{R}^{n\times n})$;

4) *для почти всех* $s \in (-\infty, 0]$ *отображение* $\hat{K}(\cdot, s) \in \mathbb{W}_2^1((-\infty, 0), \mathbb{R}^{n\times n})$, *где* $\hat{K}(\vartheta, s) = K(\vartheta, s) - \eta^\top(\vartheta)K(0, s)$, $\vartheta \in (-\infty, 0)$, $s \in (-\infty, 0]$,

а также системе дифференциальных и алгебраических уравнений

$$\frac{\partial \hat{K}(\vartheta, s)}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \hat{K}^\top(s, \vartheta)}{\partial s} + K(\vartheta, 0)DK(0, s) = 0, \quad \vartheta, s \in (-\infty, 0), \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial \hat{K}(\vartheta,0)}{\partial \vartheta} - \hat{K}^\top(-0,\vartheta) + K(\vartheta,0)DK(0,0) = 0, \quad \vartheta \in (-\infty,0), \tag{2.3}$$

$$\hat{K}(-0,0) + \hat{K}^\top(-0,0) - K(0,0)DK(0,0) + C_x = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о по схеме [8, теорема 2] с учетом изменившихся представлений операторов $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^*$, $\mathbf{C}_x$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{U}$ для системы дифференциальных уравнений с неограниченным последействием. □

Теорема 3. *Пусть система* (1.1) *является стабилизируемой. Тогда оптимальное стабилизирующее управление определяется формулой*

$$\mathbf{u}^0[\mathbf{x}] = -C_u^{-1}B^\top\Big(K_0\mathbf{x}(0) + \int\limits_{-\infty}^{0}\Big(X^\top(s) + K_0\eta(s)\Big)\mathbf{x}(s)ds\Big), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H},$$

в которой X — решение функционально-дифференциального уравнения Риккати

$$\frac{dX(\vartheta)}{d\vartheta} = \int\limits_{-\infty}^{\vartheta}\Big(X(\tau)d[\eta(\tau-\vartheta)] + d[\eta^\top(\tau)]X^\top(\tau-\vartheta)\Big) - \Big(X(\vartheta) + \eta^\top(\vartheta)K_0\Big)DK_0$$

$$- \int\limits_{-\infty}^{\vartheta}\Big(X(\tau) + \eta^\top(\tau)K_0\Big)D\Big(X^\top(\tau-\vartheta) + K_0\eta(\tau-\vartheta)\Big)d\tau, \tag{2.4}$$

а K_0 — решение алгебраического уравнения

$$X(0) + X^\top(0) - K_0DK_0 + C_x = 0. \tag{2.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о по схеме [5, теорема 2] с учетом изменившейся формы краевой задачи (2.2), (2.3) для системы дифференциальных уравнений с неограниченным последействием. □

Значение критерия качества переходных процессов (1.2) для оптимального стабилизирующего управления определяется формулой

$$J\left[x(\cdot), u^0[x(\cdot)]\right] = \langle \mathbf{U}x(\cdot), x(\cdot)\rangle, \quad x(\cdot) \in \mathbb{H},$$

в которой функции, входящие в представление (2.1) оператора $\mathbf{U}$, определяются следующим образом через решение системы уравнений (2.4), (2.5):

$$K(0,0) = K_0, \quad K(\vartheta,0) = X(\vartheta) + \eta^\top(\vartheta)K_0, \quad \vartheta \in (-\infty,0),$$

$$K(\vartheta,s) = -\int\limits_{-\infty}^{s} F(\vartheta-s+\tau,\tau)d\tau + X(\vartheta)\eta(s) + \eta^\top(\vartheta)X^\top(s) + \eta^\top(\vartheta)K_0\eta(s), \quad -\infty < s \le \vartheta < 0,$$

где

$$F(\vartheta,s) = \eta^\top(\vartheta)\frac{dX^\top(s)}{ds} + \frac{dX(\vartheta)}{d\vartheta}\eta(s) + \Big(X(\vartheta) + \eta^\top(\vartheta)K_0\Big)D\Big(X^\top(s) + K_0\eta(s)\Big), \quad \vartheta, s \in (-\infty,0).$$

Переход от определяющей системы уравнений (2.2), (2.3) к функционально-дифференциальному уравнению Риккати (2.4) позволяет упростить процедуру построения оптимального стабилизирующего управления. Применение аналитических методов при нахождении решения функционально-дифференциального уравнения Риккати наталкивается на серьезные технические трудности. В работе [5] предложен обратный метод построения решений функционально-дифференциального уравнения Риккати для специального класса автономных линейных систем дифференциальных уравнений с ограниченным последействием. Покажем, что для этого класса систем в случае неограниченного последействия можно решить прямую задачу интегрирования нелинейного функционально-дифференциального уравнения Риккати. Переходим к изложению этого результата.

Объект управления описывается автономной линейной системой дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_0 x(t) + \int\limits_{-\infty}^{0} A(s)x(t+s)ds + Bu, \quad t > 0, \tag{2.6}$$

где A_0 — постоянная матрица; A — матричная функция с интегрируемыми с квадратом элементами на $(-\infty, 0)$. Система (2.6) совпадает с (1.1), если $\eta(\vartheta) = -A_0 - \int_{\vartheta}^{0} A(s)ds$, $\vartheta \in (-\infty, 0)$, $\eta(0) = 0$.

Теорема 4. *Пусть система* (2.6) *является стабилизируемой. Тогда оптимальное стабилизирующее управление определяется формулой*

$$\mathbf{u}^0[\mathbf{x}] = -C_u^{-1} B^\top \left(K_0 \mathbf{x}(0) + \int\limits_{-\infty}^{0} \Psi^\top(s)\mathbf{x}(s)ds \right), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H},$$

в которой Ψ *— решение функционально-дифференциального уравнения Риккати*

$$\frac{d\Psi(\vartheta)}{d\vartheta} = \Psi(\vartheta)\left(A_0 - DK_0\right) + A^\top(\vartheta)K_0 + \int\limits_{-\infty}^{\vartheta} \Big(A^\top(z)\Psi^\top(z-\vartheta) + \Psi(z)A(z-\vartheta) \Big) dz$$

$$- \int\limits_{-\infty}^{\vartheta} \Psi(z) D \Psi^\top(z-\vartheta)dz, \quad \vartheta \in (-\infty, 0], \tag{2.7}$$

а K_0 *— решение алгебраического уравнения*

$$A_0^\top K_0 + K_0 A_0 - K_0 D K_0 + \Psi^\top(0) + \Psi(0) + C_x = 0. \tag{2.8}$$

Доказательство по схеме [5, теорема 3] с учетом изменившейся формы функционально-дифференциального уравнения Риккати (2.4) для системы дифференциальных уравнений с неограниченным последействием. □

Связь решений уравнений (2.4) и (2.7) определяется формулой

$$X(\vartheta) = \Psi(\vartheta) + \left(A_0^\top + \int\limits_{\vartheta}^{0} A^\top(s)ds \right) K_0, \quad \vartheta \in (-\infty, 0].$$

Теорема 5. *Пусть матричная функция* A_a *определяется формулой*

$$A_a(\vartheta) = \sum_{k=1}^{M} \sum_{j=0}^{M_k} \vartheta^j e^{\alpha_k \vartheta} A_{kj}, \quad \vartheta \in (-\infty, 0),$$

где $\mathrm{Re}(\alpha_k) > 0$, A_{kj} *— матрицы размерности* $n\times n$, $j = \overline{0, M_k}$, $k = \overline{1, M}$. *Если* α_k *— вещественное число, то матрицы* A_{kj} *имеют вещественные элементы, а каждому невещественному числу* α_k *соответствует сопряженное число* $\alpha_{k'} = \overline{\alpha_k}$ *и* $A_{k'j} = \overline{A_{kj}}$. *Предполагаем, что система* (2.6) *при* $A = A_a$ *является стабилизируемой. Тогда оптимальное стабилизирующее управление этой системы определяется формулой*

$$\mathbf{u}^0[\mathbf{x}] = -C_u^{-1}B^\top\left(K_0\mathbf{x}(0) + \int\limits_{-\infty}^{0}\sum_{k=1}^{M}\sum_{j=0}^{M_k}\vartheta^j e^{\alpha_k\vartheta}\Psi_{kj}^\top\mathbf{x}(\vartheta)d\vartheta\right), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{H}, \tag{2.9}$$

в которой матрицы K_0, Ψ_{kj} $j = \overline{0, M_k}$, $k = \overline{1, M}$, *удовлетворяют системе алгебраических уравнений*

$$A_0^\top K_0 + K_0 A_0 - K_0 D K_0 + \sum_{k=1}^{M}\left(\Psi_{k0} + \Psi_{k0}^\top\right) + C_x = 0, \tag{2.10}$$

$$\alpha_k\Psi_{kj} + (j+1)\delta_{kj}\Psi_{kj+1} + \Psi_{kj}\left(DK_0 - A_0\right) - A_{kj}^\top K_0$$

$$-\sum_{j_1=j}^{M_k}\sum_{k_1=1}^{M}\sum_{j_2=0}^{M_{k_1}}\frac{(-1)^{j_1+j_2-j}j_1!(j_1+j_2-j)!}{j!(j_1-j)!\left(\alpha_k+\alpha_{k_1}\right)^{j_1+j_2-j+1}}\left(\Psi_{kj_1}A_{k_1j_2} + A_{kj_1}^\top\Psi_{k_1j_2}^\top - \Psi_{kj_2}D\Psi_{k_1j_2}^\top\right) = 0, \tag{2.11}$$

где $\delta_{kj} = 1$ *при* $j \neq M_k$, $\delta_{kM_k} = 0$, $j = \overline{0, M_k}$, $k = \overline{1, M}$.

Доказательство. Решение уравнения (2.7) находим в форме

$$\Psi_a(\vartheta) = \sum_{k=1}^{M}\sum_{j=0}^{M_k}\vartheta^j e^{\alpha_k\vartheta}\Psi_{kj}, \quad \vartheta\in(-\infty, 0].$$

Подставляя его в уравнения (2.7), (2.8), получим систему (2.10), (2.11). □

Стабилизированная система имеет вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = \tilde{A}_0 x(t) + \int\limits_{-\infty}^{0}\tilde{A}_a(s)x(t+s)ds, \quad t > 0, \tag{2.12}$$

где $\tilde{A}_0 = A_0 - DK_0$, $\tilde{A}_a(\vartheta) = \sum_{k=1}^{M}\sum_{j=0}^{M_k}\vartheta^j e^{\alpha_k\vartheta}\tilde{A}_{kj}$, $\vartheta\in(-\infty, 0)$, $\tilde{A}_{kj} = A_{kj} - D\Psi_{kj}^\top$, $j = \overline{0, M_k}$, $k = \overline{1, M}$.

Пример. Пусть для системы (2.6) и критерия качества (1.2) выполняются условия: $n = m = 1$, $A_0 = -1$, $B = 1$, $C_x = C_u = 1$. Функция A определяется формулой $A(\vartheta) = (7/4)\exp(\vartheta)$, $\vartheta\in(-\infty, 0)$.

Стабилизируемый объект описывается неустойчивым при $u = 0$ скалярным уравнением. Для его стабилизации используем предложенную выше методику. Система уравнений (2.10), (2.11) имеет вид

$$K_0^2 + 2K_0 - 2\Psi_{10} - 1 = 0, \quad 2\Psi_{10}^2 + \Psi_{10} + 4\Psi_{10}K_0 - 7K_0 = 0.$$

Значения $K_0 = 1$ и $\Psi_{10} = 1$ определяют ее решение. Используя формулу (2.9), находим оптимальное стабилизирующее управление

$$\mathbf{u}^0[\mathbf{x}] = -\mathbf{x}(0) - \int\limits_{-\infty}^{0}\exp(\vartheta)\mathbf{x}(\vartheta)d\vartheta, \quad \mathbf{x}\in\mathbb{H}.$$

Стабилизированное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = -2x(t) + \frac{3}{4}\int\limits_{-\infty}^{0} \exp(\vartheta)x(t+\vartheta)d\vartheta$$

экспоненциально устойчиво.

В задаче стабилизации класс систем с матричными функциями A_a является аппроксимационным.

Теорема 6. *Пусть выполняются условия теоремы* 5, *фундаментальная матрица* V_a *системы* (2.12) *имеет оценку* $|V_a(t)| \le K_a \exp(-\alpha_a t)$, $t > 0$, $K_a, \alpha_a > 0$, *и выполняется условие*

$$K_a \int\limits_{-\infty}^{0} \exp(-\alpha_a \tau)|A(\tau) - A_a(\tau)|d\tau < \alpha_a. \tag{2.13}$$

Тогда управление (2.9) *является стабилизирующим для системы* (2.6) *с матричной функцией* A.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Решение системы (2.6) с начальной функцией $\varphi \in \mathbb{H}$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(t) = x_a(t,\varphi) + \int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{\vartheta-t}^{\vartheta} V_a(t+s-\vartheta)\left(A(s) - A_a(s)\right) ds\varphi(\vartheta)d\vartheta$$

$$+ \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{s-t}^{0} V_a(t+\tau-s)\left(A(\tau) - A_a(\tau)\right) d\tau x(s)ds, \quad t > 0. \tag{2.14}$$

Здесь $x_a(t,\varphi)$, $t > 0$, — решение системы (2.12). Для него имеет место оценка

$$|x_a(t,\varphi)| \le K_{aa} \exp(-\alpha_a t)\|\varphi\|_H, \quad t > 0,$$

где

$$K_{aa} = K_a\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}\alpha_a}\int\limits_{-\infty}^{0} \exp(-\alpha_a s)|\tilde{A}_a(s)|ds\right).$$

Введем функцию $\tilde{x}(t) = x(t)\exp(\alpha_a t)$, $t > 0$. Из интегрального уравнения (2.14) следует неравенство

$$|\tilde{x}(t)| \le \tilde{K}_{aa}\|\varphi\|_H + \tilde{K}_a \int\limits_{0}^{t} |\tilde{x}(s)|ds, \quad t > 0, \tag{2.15}$$

где

$$\tilde{K}_{aa} = K_{aa} + K_a\frac{1}{\sqrt{2}\alpha_a}\int\limits_{-\infty}^{0} \exp(-\alpha_a s)|A(s) - A_a(s)|ds, \quad \tilde{K}_a = K_a\int\limits_{-\infty}^{0} \exp(-\alpha_a s)|A(s) - A_a(s)|ds.$$

Из неравенства (2.15) вытекает справедливость теоремы. □

Конструктивная реализация условия (2.13) теоремы 6 связана с аппроксимацией элементов матричной функции A, принадлежащих пространству суммируемых с квадратом функций с экспоненциальным весом на отрицательной полуоси, квазиполиномами. Здесь можно использовать базис пространства суммируемых с квадратом функций на полуоси, порождаемый полиномами Лаггера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздываниями времени // Прикл. математика и механика. 1962. Т. 26, вып. 1. С. 39–51.
2. **Осипов Ю.С.** О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 5. С. 605–618.
3. **Gibson J.S.** Linear-quadratic optimal control of hereditary differential systems: infinite dimensional Riccati equations and numerical approximations // SIAM J. Control Optimiz. 1983. Vol. 21, no. 5. P. 95–135.
4. **Желонкина Н.И., Ложников А.Б., Сесекин А.Н.** Об оптимальной стабилизации импульсным управлением линейных систем с последействием // Автоматика и телемеханика. 2013. № 11. С. 39–48.
5. **Долгий Ю.Ф.** Точные решения задачи оптимальной стабилизации для систем дифференциальных уравнений с последействием // Тр. института математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 124–135.
6. **Колмановский В.Б., Носов В.Р.** Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981. 448 с.
7. **Хейл Дж.** Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.
8. **Долгий Ю.Ф.** Аналитические решения задачи оптимальной стабилизации для систем дифференциальных уравнений с последействием // Тр. XII Всерос. совещания по проблемам управления / ИПУ РАН. М., 2014. С. 1349–1362.

Долгий Юрий Филиппович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
вед. науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: Yurii.Dolgii@imm.uran.ru

Поступила 25.01.2016