ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 2 2016

УДК 517.977.1

О СУЩЕСТВОВАНИИ ЛИПШИЦЕВОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ФАЗОВЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ[1]

М. И. Гусев

Рассматривается нелинейная управляемая система с фазовыми ограничениями, заданными конечной системой нелинейных неравенств. Исследуется задача о построении в малой окрестности границы фазовых ограничений позиционного управления, удерживающего траектории замкнутой системы в данной окрестности. При определенных предположениях доказано существование позиционного управления в виде липшицевой функции от состояния системы.

Ключевые слова: фазовые ограничения, обратная связь, задача выживаемости, инвариантность.

M. I. Gusev. On the existence of a Lipschitz feedback control in a control problem with state constraints.

We consider a nonlinear control system with state constraints given as a solution set for a finite system of nonlinear inequalities. The problem of constructing a feedback control that ensures the viability of trajectories of the closed system in a small neighborhood of the boundary of the state constraints is studied. Under some assumptions, the existence of a feedback control in the form of a Lipschitz function of the state of the system is proved.

Keywords: state constraints, feedback control, viability problem, invariance.

MSC: 93B03, 92B52, 93C10

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-122-128

1. Введение и постановка задачи

Работа посвящена позиционной постановке задачи выживаемости [1; 2] для управляемой системы с фазовыми ограничениями. Исследование вопросов выживаемости множеств относительно управляемых систем и дифференциальных включений играет важную роль во многих задачах теории управления и дифференциальных играх [3–6]. В данной статье рассматривается нелинейная управляемая система с фазовыми ограничениями, заданными конечной системой нелинейных неравенств. Функции, задающие систему ограничений, предполагаются непрерывно дифференцируемыми, а их градиенты — удовлетворяющими условию Липшица. В точках границы фазовых ограничений касательный конус к ограничениям имеет непустое пересечение с множеством скоростей системы. Это условие обеспечивает слабую инвариантность фазовых ограничений относительно уравнений системы: для любого начального вектора, удовлетворяющего фазовым ограничениям, существует траектория системы, остающаяся внутри ограничений (являющаяся выживающей). Исследуется задача о построении позиционного управления в виде липшицевой функции от состояния системы, которое удерживает траектории системы в малой окрестности фазовых ограничений. Такое управление используется в методе снятия фазовых ограничений при построении множеств достижимости нелинейных управляемых систем [7]. В работе [7] было доказано существование липшицевой обратной связи в частном случае линейных по управлению систем с эллипсоидальным ограничением на управление и фазовыми ограничениями, заданными одним гладким неравенством. В данной работе этот результат обобщается на общий случай.

[1] Работа выполнена при поддержке комплексной программы УрО РАН (проект 15-16-1-8) и РФФИ (проект 15-01-05950).

Рассматривается управляемая система

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad t_0 \le t \le \theta, \quad x(t_0) = x^0, \tag{1.1}$$

$x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u(t) \in U$ п.в. $t \in [t_0, \theta]$ — управление. Множество U — компакт в $\mathbb{R}^r$, управления — измеримые по Лебегу функции $u : [t_0, \theta] \to U$.

Далее используются следующие обозначения. Для вещественной матрицы A через $A^\top$ мы обозначаем транспонированную матрицу, 0 обозначает нулевой вектор подходящей размерности либо число ноль. Для $x, y \in \mathbb{R}^n$ $(x, y) = x^\top y$ — скалярное произведение векторов, $\|x\| = (x, x)^{1/2}$ — евклидова норма, $B_r(\bar{x})$: $B_r(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x - \bar{x}\| \le r\}$ — шар радиуса $r > 0$ с центром в точке $\bar{x}$. Для $S \subset \mathbb{R}^n$ символами ∂S, $\mathrm{int} S$, $\mathrm{co} S$ обозначаются соответственно граница, внутренность и выпуклая оболочка S, $\nabla g(x)$ — градиент функции $g(x)$ в точке x, $h(A, B)$ — хаусдорфово расстояние между множествами $A, B \subset \mathbb{R}^n$.

Далее предполагается, что правая часть системы (1.1) удовлетворяет условиям

1) функция $f(x, u) \colon \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$ непрерывна по (x, u) и локально липшицева по x равномерно по $u \in U$;
2) существует $C > 0$ такое, что $\|f(x, u)\| \le C(1 + \|x\|)$, $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times U$.

При указанных условиях множество траекторий системы (1.1), отвечающих заданному начальному условию $x(t_0) = x^0$, ограничено. Система (1.1) представима в виде эквивалентного дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(x), \quad x(t_0) = x^0,$$

где $F(x) := f(x, U)$ — множество скоростей системы (1.1) для данного $x \in \mathbb{R}^n$. Многозначное отображение $F : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ компактнозначно и локально липшицево в метрике Хаусдорфа: для любого $\bar{x}$ существуют $\varepsilon > 0, L > 0$ такие, что $h(F(x), F(y)) \le L\|x - y\|$ для любых $x, y \in B_\varepsilon(\bar{x})$. Решениями дифференциального включения являются абсолютно непрерывные функции $x : [t_0, \theta] \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющие условию $\dot{x}(t) \in F(x(t))$ для почти всех t.

Пусть заданы фазовые ограничения, имеющие вид $x(t) \in S$, $t \in [t_0, \theta]$, где S — компактное множество в $\mathbb{R}^n$. Далее мы рассматриваем в качестве S множество, заданное системой неравенств

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \colon g_i(x) \le 0, \ i = 1, \ldots m\},$$

где $g_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемые функции, градиенты которых локально липшицевы.

Обозначим через $x(t, u(\cdot), x^0)$ решение системы (1.1) с начальным условием $x(t_0) = x^0$.

Определим функцию $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \max_{1 \le i \le m} g_i(x), \tag{1.2}$$

функция $g(x)$ липшицева, и, очевидно, $S = \{x \in \mathbb{R}^n \colon g(x) \le 0\}$.

Для $x \in \mathbb{R}^n$ положим $I(x) = \{i \in \{1, \ldots m\} \colon g_i(x) = g(x)\}$, $I(x)$ — это множество тех номеров i, на которых достигается максимум в (1.2). Далее будем считать выполненным следующее условие.

Предположение 1. *В точках $x \in \partial S$ градиенты $\nabla g_i(x)$, $i \in I(x)$, положительно линейно независимы.* [2]

[2] Векторы $a^i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, m$, называются положительно линейно независимыми, если для любых $\alpha_i \ge 0$, $i = 1, \ldots, m$, из равенства $\sum_{i=1}^m \alpha_i a^i = 0$ следует, что $\alpha_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$.

При выполнении данного условия справедливо равенство $\partial S = \{x \in \mathbb{R}^n \colon g(x) = 0\}$. Кроме того, из компактности S следует, что существует $\sigma > 0$, для которого множество уровня $\{x \in \mathbb{R}^n \colon g(x) \le \sigma\}$ компактно. В дальнейших построениях мы будем предполагать компактность этих множеств, не оговаривая это особо.

Далее используется следующее условие (см., например, [9–11]):

$$\min_{f \in \mathrm{co}F(x)} \max_{i \in I(x)} (\nabla g_i(x), f) < 0 \quad \forall x \in \{x \in \mathbb{R}^n \colon g(x) = 0\}. \tag{1.3}$$

Это условие эквивалентно тому, что для каждого $x \in \partial S$

$$\mathrm{co}F(x) \cap \mathrm{int}T_S(x) \ne \varnothing,$$

где $T_S(x) = \{d \in \mathbb{R}^n \colon \lim_{\xi \to +0} \xi^{-1} d(x + \xi d, S) = 0\}$ — касательный конус к множеству S в точке x, $d(x,S)$ — расстояние от x до множества S. Таким образом, в каждой точке x границы S существует вектор из $\mathrm{co}F(x)$, направленный внутрь S.

Последнее свойство обеспечивает слабую инвариантность множества S относительно решений дифференциального включения $\dot{x}(t) \in \mathrm{co}F(x(t)), \quad x(t_0) = x^0$: для любого начального вектора $x^0 \in S$ существует траектория дифференциального включения $x(t) \in S,\ t_0 \le t$.

Из компактности S и непрерывности функций $g_i(x), \nabla g_i(x)$ следует, что если выполнено условие (1.3) , то существуют $\sigma_0 > 0, \rho_0 > 0$ такие, что неравенство

$$\min_{f \in \mathrm{co}F(x)} \max_{i \in I(x)} (\nabla g_i(x), f) < -\rho_0 \tag{1.4}$$

справедливо для всех точек множества

$$S_{\sigma_0} = \{x : 0 \le g(x) \le \sigma_0\}.$$

Далее мы будем рассматривать следующую задачу.

З а д а ч а. Найти $\sigma > 0, \rho > 0$ и липшицеву функцию $\bar{f}(x)$, определенную на множестве S_σ, такие, что выполняются условия

$$\max_{i \in I(x)} (\nabla g_i(x), \bar{f}(x)) < -\rho, \quad \bar{f}(x) \in \mathrm{co}F(x) \ \ \forall x \in S_\sigma. \tag{1.5}$$

Применительно к управляемой системе (1.1) с выпуклым годографом $F(x) = f(x,U)$ данная задача эквивалентна нахождению позиционного управления $u(x) \in U,\ x \in S_\sigma$, такого, что правая часть системы (1.1) $\bar{f}(x) = f(x,u(x))$ удовлетворяет условию (1.5), и, таким образом, обеспечивающего выживаемость решений в окрестности S_σ фазовых ограничений.

Такое позиционное управление используется в процедуре снятия фазовых ограничений при построении множества достижимости. В работе [7] было показано его существование для линейных по управлению систем с эллипсоидальными ограничениями на управление при $m = 1$. В данной работе мы докажем теорему существования в общем случае.

2. Основной результат

Итак, пусть выполнено условие (1.3). Для любого $\sigma > 0$ множество S_σ — непустой компакт. Для $k > 0, \rho > 0$ определим следующее многозначное отображение

$$F_k^\rho(x) = \big\{f \in \mathrm{co}F(x) \colon (\nabla g_i(x), f) < -\rho - k(g_i(x) - g(x)),\ i = 1, \ldots, m\big\}$$

Справедлива

Лемма 1. *Пусть выполнено условие* (1.3) *и* $0 < \rho \le \rho_0/4$. *Тогда найдутся* $k > 0$, $0 < \bar{\sigma} \le \sigma_0$, *такие, что* $\forall \sigma \le \bar{\sigma}$

$$F_k^\rho(x) \ne \varnothing, \quad x \in S_\sigma.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Фиксируем произвольное положительное число $\rho < \rho_0/4$. Тогда для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдутся $\sigma_k > 0, x^k \in S_{\sigma_k}$ такие, что $F_k^\rho(x^k) = \varnothing$. При этом $\sigma_k \to 0$ при $k \to \infty$. Так как последовательность x^k лежит в компактном множестве S_{σ_0}, не ограничивая общности, можно считать, что она имеет предел $\bar{x}$. Из неравенства $g(x^k) \le \sigma_k$ следует $g(\bar{x}) = 0$, значит, $\bar{x} \in \partial S$. По условию (1.4) существует $\bar{f} \in \mathsf{co}F(\bar{x})$ такой, что

$$(\nabla g_i(\bar{x}), \bar{f}) < -\rho_0 \quad \forall i \in I(\bar{x}).$$

Учитывая, что градиент $\nabla g_i(x)$ липшицев, для достаточно больших k будем иметь

$$(\nabla g_i(x^k), \bar{f}) < -\rho_0/2 - k(g_i(x^k) - g(x^k)) \quad \forall i \in I(\bar{x}).$$

Пусть $i \notin I(\bar{x})$, тогда

$$\max_{i \notin I(\bar{x})} g_i(\bar{x}) < g(\bar{x}).$$

Обозначив $\beta = g(\bar{x}) - \max_{i \notin I(\bar{x})} g_i(\bar{x}) > 0$, получим $g_i(\bar{x}) \le g(\bar{x}) - \beta$. Так как $g(x)$ и $g_i(x)$ непрерывны, то при достаточно больших k выполняется неравенство $g_i(x^k) \le g(x^k) - \beta/2$, следовательно,

$$-k(g_i(x^k) - g(x^k)) \ge k\beta/2.$$

Из непрерывности $\mathsf{co}F(x)$ следует существование последовательности $f^k \in \mathsf{co}F(x^k)$, сходящейся к $\bar{f}$. Для достаточно больших k будет справедливо неравенство

$$(\nabla g_i(x^k), f^k) < -\rho_0/4 - k(g_i(x^k) - g(x^k)) \quad \forall i \in I(\bar{x}).$$

Скалярное произведение $(\nabla g_i(x^k), f^k)$, очевидно, ограничено сверху некоторой константой C:

$$(\nabla g_i(x^k), f^k) \le \|\nabla g_i(x^k)\| \|f^k\| \le C,$$

поэтому для $i \notin I(\bar{x})$ имеем

$$(\nabla g_i(x^k), f^k) \le C \le -\rho_0/4 + k\beta/2 \le -\rho_0/4 - k(g_i(x^k) - g(x^k))$$

при больших k. Таким образом, $f^k \in F_k^{\rho_0/4}(x^k) \subset F_k^\rho(x^k)$ в противоречие с предположением леммы. □

Положим

$$F^\rho(x) = \big\{ f \in \mathsf{co}F(x) \colon (\nabla g_i(x), f) < -\rho, \ i \in I(x) \big\}.$$

Лемма 2. *Для любых* $0 < \sigma \le \bar{\sigma}$, $0 < \rho < \rho_0/4$, $k > 0$ *справедливо включение*

$$F_k^\rho(x) \subset F^\rho(x), \quad x \in S_\sigma,$$

и, следовательно, $F^\rho(x) \ne \varnothing$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in F_k^\rho(x)$ и $i \in I(x)$. Тогда $g_i(x) - g(x) = 0$, следовательно,

$$(\nabla g_i(x), f) \le -\rho - k(g_i(x) - g(x)) = -\rho,$$

и, значит, $f \in F^\rho(x)$. □

Лемма 3. *Пусть выполнено условие* (1.3). *Тогда найдутся* $k > 0, 0 < \sigma_1 \le \sigma_0, \rho_1 > 0$ *такие, что* $\forall \sigma \le \sigma_1$, $\rho < \rho_1$ *многозначное отображение* $F_k^\rho(x)$ *с непустыми выпуклыми компактными значениями удовлетворяет условию Липшица на* S_σ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\rho_1 \le \rho_0/8$ и k, σ_1 выбраны так, чтобы удовлетворить требованиям лемм 1, 2. Тогда $F_k^{2\rho}(x) \ne \varnothing$ на S_σ при $\sigma < \sigma_1$. Представим $F_k^\rho(x)$ в виде

$$F_k^\rho(x) = \big\{f \in \mathtt{co}F(x)\colon (\nabla g_i(x), f) \le \alpha_i(x),\ i = 1, \dots, m\big\},$$

где $\alpha_i(x) = -\rho - k(g_i(x) - g(x))$. Так как $F_k^{2\rho}(x) \ne \varnothing$, то $\forall x \in S_\sigma$ существует вектор $f \in \mathtt{co}F(x)$, для которого $(\nabla g_i(x), f) \le \alpha_i(x) - \rho,\ i = 1, \dots, m$. Функции $\nabla g_i(x), \alpha_i(x)$ удовлетворяют условиям Липшица на S_σ.

Так как множество S_σ компактно, достаточно доказать, что $F_k^\rho(x)$ локально липшицево. Выберем произвольную точку $\bar{x} \in S_\sigma$. Покажем, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что $F_k^\rho(x)$ липшицево на $S_\sigma \cup B_\varepsilon(\bar{x})$.

Доказательство будем вести индукцией по числу ограничений m. Пусть $m = 1$, и, следовательно, $F_k^\rho(x) = \{f \in \mathtt{co}F(x)\colon (\nabla g_1(x), f) \le \alpha_1(x)\}$. Рассмотрим два случая. Пусть $\nabla g_1(\bar{x}) = 0$. Тогда, учитывая, что для некоторого $f \in F_k^\rho(\bar{x})$ $(\nabla g_1(\bar{x}), f) \le \alpha_1(\bar{x}) - \rho$, получаем $\alpha_1(\bar{x}) \ge \rho$. В некоторой δ-окрестности точки $\bar{x}$ будем иметь $\alpha_1(x) \ge \rho/2$. Так как значения $\mathtt{co}F(x)$ равномерно ограничены ($\|f\| \le C_1\ \forall f \in \mathtt{co}F(x)$) и $\nabla g_1(x)$ липшицев с константой l, то, выбирая $\varepsilon < \min\{\delta, \rho/(2C_1 l)\}$, получим

$$(\nabla g_1(x), f) \le C_1\|\nabla g_1(x)\| \le C_1 l\|x - \bar{x}\| \le \rho/2 \le \alpha_1(x) \quad \forall f \in \mathtt{co}F(x).$$

Следовательно, на шаре $B_\varepsilon(\bar{x})$ отображение $F_k^\rho(x)$ совпадает с $\mathtt{co}F(x)$ и, значит, является липшицевым.

Пусть $\nabla g_1(\bar{x}) \ne 0$, тогда $\nabla g_1(x) \ne 0$ в некоторой δ-окрестности точки $\bar{x}$. В данной окрестности $F_k^\rho(x)$ представляет из себя пересечение выпуклого компакта $\mathtt{co}F(x)$ с полупространством $\big\{f \in \mathbb{R}^n\colon (\nabla g_1(x), f) \le \alpha_1(x)\big\}$, причем

$$\big\{f \in \mathbb{R}^n\colon (\nabla g_1(x), f) \le \alpha_1(x) - \rho\big\} \cap \mathtt{co}F(x) \ne \varnothing.$$

При этих условиях данное пересечение является липшицевым многозначным отображением [8, лемма 7].

Итак, утверждение доказано для $m = 1$. Пусть оно верно для $(m-1)$-го ограничения, т. е.

$$G_k^\rho(x) = \big\{f \in \mathtt{co}F(x)\colon (\nabla g_i(x), f) \le \alpha_i(x),\ i = 1, \dots, m-1\big\}$$

является липшицевым в $S_\sigma \cup B_\varepsilon(\bar{x})$. Представим $F_k^\rho(x)$ в виде

$$F_k^\rho(x) = \big\{f \in G_k^\rho(x)\colon (\nabla g_m(x), f) \le \alpha_m(x)\big\}.$$

Тогда, очевидно, для каждого $x \in S_\sigma \cup B_\varepsilon(\bar{x})$ найдется $f \in G_k^\rho(x)$ такой, что $(\nabla g_m(x), f) \le \alpha_m(x) - \rho$. Остается применить только что доказанное утверждение для $m = 1$, заменив в нем $\mathtt{co}F(x)$ на $G_k^\rho(x)$ и $g_1(x)$ на $g_m(x)$. $\square$

Теорема 1. *Пусть выполнены предположение* 1 *и условие* (1.5). *Тогда существуют* $\sigma > 0$, $\rho > 0$ *и липшицево сечение* $\bar{f}(x) \in \mathtt{co}F(x),\ x \in S_\sigma$, *многозначного отображения* $\mathtt{co}F(x)$ *такие, что*

$$\max_{i \in I(x)} (\nabla g_i(x), \bar{f}(x)) < -\rho \quad \forall x \in S_\sigma.$$

Любая траектория $x(t)$ *дифференциального уравнения* $\dot{x} = \bar{f}(x)$ *с начальным условием* $x(t_0) \in S_\sigma$ *остается (является выживающей) в* S_σ *до момента попадания на* ∂S, *функция* $g(x(t))$ *монотонно убывает.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из лемм 1–3 следует существование положительных чисел k, ρ, σ таких, что многозначное отображение $F_k^\rho(x)$ с выпуклыми компактными значениями обладает следующими свойствами:

$$F_k^\rho(x) \ne \varnothing, \quad F_k^\rho(x) \subset F^\rho(x) \subset \mathtt{co}F(x)$$

для $x \in S_\sigma$ и $F_k^\rho(x)$ липшицево на S_σ. Согласно теореме о параметризации многозначного отображения [12] липшицево многозначное отображение $H(x)$ с непустыми выпуклыми компактными значениями в $\mathbb{R}^n$ может быть представлено в виде $H(x) = \bigcup_{b\in B} h(x,b)$, где $h(x,b)$ — липшицево по x, B — единичный шар в $\mathbb{R}^n$. Отсюда следует существование липшицева сечения у $H(x)$. Применяя данную теорему к отображению $F_k^\rho(x)$, получим, что найдется липшицево сечение

$$\bar{f}(x) \in F_k^\rho(x) \subset F^\rho(x) \subset \mathtt{co}F(x).$$

Из определения $F^\rho(x)$ следует, что $\bar{f}(x)$ удовлетворяет неравенству (1.5).

Пусть $x(t)$ — решение уравнения $\dot{x} = \bar{f}(x)$ с начальным условием $x(t_0) \in S_\sigma$. Вычисляя производные функций $g_i(x(t))$ для $i \in I(x(t))$, имеем

$$\frac{d}{dt} g_i(x(t)) = (\nabla g_i(x(t)), \bar{f}(x(t))) < -\rho.$$

Так как $g_i(x(t)) < g(x(t))$ для $i \notin I(x(t))$, то для достаточно малых $\Delta t > 0$ получим

$$g(x(t+\Delta t)) \le g(x(t)) - \rho\Delta t.$$

Таким образом, $g(x(t))$ убывает вдоль любой траектории, и $g(x(t)) \le g(x(t_0)) \le \sigma$. □

Рассмотрим линейную по управлению систему

$$\dot{x} = f(x,u(t)) = f_1(x) + f_2(x)u(t), \quad u(t) \in U, \quad x(t_0) = x^0,$$

где $f_1 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f_2 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times r}$ — непрерывно дифференцируемые отображения, $\mathbb{R}^{n\times r}$ — линейное пространство $n\times r$ вещественных матриц, предполагая, что ограничения на управление $u(t)$ заданы выпуклым компактом $U \subset \mathbb{R}^r$. В данном случае имеем $\mathtt{co}F(x) = f_1(x) + f_2(x)U$.

Неравенство (1.4) для данной системы можно переписать в виде

$$\min_{u\in U} \max_{i\in I(x)} [(\nabla g_i(x), f_1(x)) + \nabla g_i^\top(x) f_2(x) u] < -\rho_0. \tag{2.1}$$

при $x \in S_{\sigma_0}$.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположение* 1 *и условие* (2.1). *Тогда существуют* $\sigma > 0$, $\rho > 0$ *и липшицева обратная связь* $\bar{u}(x) \in U$, $x \in S_\sigma$ *такие, что*

$$\max_{i\in I(x)} [(\nabla g_i(x), f_1(x)) + \nabla g_i^\top(x) f_2(x) \bar{u}(x)] < -\rho_0.$$

Любая траектория $x(t)$ *системы* $\dot{x} = f_1(x) + f_2(x)u(x)$ *с начальным условием* $x(t_0) \in S_\sigma$ *остается* (*является выживающей*) *в* S_σ *до момента попадания на* ∂S, *функция* $g(x(t))$ *монотонно убывает.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем по аналогии с $F_k^\rho(x)$ многозначное отображение

$$U_k^\rho(x) = \{u \in U \colon (f_2^\top(x)\nabla g_i(x), u)\} \le -\rho - (\nabla g_i(x), f_1(x)) - k(g_i(x) - g(x)).$$

Дальнейшее доказательство фактически повторяет доказательство теоремы 1, но оно несколько проще, так как роль многозначного отображения $\mathtt{co}F(x)$ здесь играет многозначное отображение, принимающее постоянные значения U. □

З а м е ч а н и е 1. Построение обратной связи, удерживающей траектории замкнутой системы во "внешней" части окрестности границы S — множестве S_σ, связано с ее применением в конструкции метода штрафных функций из работы [7]. Путем несложной модификации доказательства можно убедиться, что утверждение теоремы 1 с очевидными изменениями остается справедливым и для внутренней части окрестности границы S — множества $\{x \in \mathbb{R}^n \colon -\sigma \le g(x) \le 0\}$.

З а м е ч а н и е 2. Доказательство теоремы 2, данное в [7] для частного случая $m = 1$ и эллипсоидального множества U, в отличие от приведенного носит конструктивный характер — соответствующая обратная связь там строится в явном виде. Для нескольких ограничений возможность явного задания $\bar{u}(x)$ можно ожидать только для отдельных частных случаев. Для линейных по управлению систем с постоянной матрицей f_2, ограничением U в виде многогранника и фазовыми ограничениями, заданными линейными неравенствами, множество $U_k^\rho(x)$ — многогранник. В этом случае в качестве липшицева сечения $\bar{u}(x) \in U_k^\rho(x)$ можно взять решение задачи линейного $(c, u) \to \max, u \in U_k^\rho(x)$, или квадратичного $(u, u) \to \max, u \in U_k^\rho(x)$, программирования. Липшицевость решений данных задач вытекает из результатов работ [13; 14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Aubin J.-P.** Viability theory. Boston: Birkhäuser, 1991. 543 p.
2. **Kurzhanski A.B., Filippova T.F.** On the theory of trajectory tubes–a mathematical formalism for uncertain dynamics, viability and control // Advances in nonlinear dynamics and control: a report from Russia. Boston: Birkhäauser, 1993. P. 122–188. (Progr. Systems Control Theory; vol. 17).
3. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 455 с.
4. **Черноусько Ф.Л.** Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988. 319 с.
5. **Kurzhanski A.B., Valyi I.** Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1997. 321 p. (Systems & Control: Foundations & Applications).
6. **Osipov Yu. S., Kryazhimskii A. V.** Inverse problems of ordinary differential equations: dynamic solutions. Basel: Gordon and Breach Science Publ., 1995. 625 p.
7. **Гусев М.И.** О снятии фазовых ограничений при построении множеств достижимости // Тр. Ин-та математики и механики УРО РАН. 2014. Т. 20, № 4, С. 106–115.
8. **Гусев М.И.** Внутренние аппроксимации множеств достижимости управляемых систем с фазовыми ограничениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 4. С. 73–88.
9. **Forcellini F., Rampazzo F.** On nonconvex differential inclusions whose state is constrained in the closure of an open set. Applications to dynamic programming // Differential and Integral Equations. 1999. Vol. 12, no. 4. P. 471–497.
10. **Frankowska H., Vinter R. B.** Existence of neighboring feasible trajectories: applications to dynamic programming for state-constrained optimal control problems // J. Optim. Theory Appl. 2000. Vol. 104, no. 1. P. 21–40.
11. **Bressan A., Facchi G.** Trajectories of differential inclusions with state constraints // J. Differential Equations. 2011. Vol. 250, № 2. P. 2267–2281.
12. **Ornelas A.** Parametrization of Caratheodory multifunctions // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova . 1990. Vol. 83. P. 33–44.
13. **Robinson S.M.** Stability theory for systems of inequalities. I. Linear systems // SIAM J. Numer. Anal. 1975. Vol 12, no 5. P. 754–769.
14. **Mangasarian O.L., Shiau T.H.** Lipschitz continuity of solutions of linear inequalities, programs and complementarity problems // SIAM J. Control Optim. 1987. Vol. 25, no 3. P. 583–595.

Гусев Михаил Иванович
д-р физ.-мат. наук
ведущий научный сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
профессор
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: gmi@imm.uran.ru

Поступила 12.03.2016