

УДК 517.977

**ТЕРМИНАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМ ПРОЦЕССОМ
ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХ¹****Н. Л. Григоренко, А. Е. Румянцев**

Для нелинейной модели движения твердого тела с дефицитом управляющих параметров и содержащей параметр помехи, предложено позиционное управление, переводящее систему из заданного начального состояния в заданное конечное. Приведены результаты численных расчетов динамики компонент фазового вектора и управлений.

Ключевые слова: терминальное управление, позиционное управление, динамические игры.

N. L. Grigorenko, A. E. Rumyantsev. Terminal control of a nonlinear process under disturbances.

We consider a nonlinear model of motion of a solid body with deficiency of control parameters. The model contains a disturbance parameter. We propose an open-loop control that takes the system from a given initial state to a given terminal state. Results of numerical calculations are presented for the dynamics of the components of the phase vector and of the controls.

Keywords: terminal control, open-loop control, dynamic game.

MSC: 34H05, 49N70, 49N90, 93C95

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-113-121

Введение

Для задачи терминального управления нелинейной управляемой системой с нелинейной функцией наблюдения при принадлежности начальной точки процесса и вектора параметров системы известным множествам и отсутствии информации о том, какая точка из множества начальных состояний является истинной и какой параметр системы из множества параметров является истинным, в классе гарантирующих пакетов программ Ю.С. Осипова и А.В. Кряжковского [1;2], в работе [3] разработаны достаточные условия существования решения. Одним из требований таких условий является наличие свойства управляемости нелинейной системы при начальном и конечном условиях на фазовый вектор системы, принадлежащих заданному множеству. Настоящая работа посвящена обоснованию наличия такого свойства для нелинейной математической модели движения твердого тела в вертикальной плоскости при наличии ветровых возмущений. Методы решения задач терминального управления для такой модели, предложенные в работе [4], содержат конструкции управления, гарантирующего асимптотическую устойчивость траекторий системы относительно заданных конечных условий процесса.

Настоящая статья опирается на результаты [5] по решению задач позиционного управления, результаты работ по методам решения обратных задач динамики управляемых систем и содержит достаточные условия существования позиционного управления, решающего игровую задачу терминального управления за конечное время.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00539).

1. Задача терминального управления нелинейным процессом при наличии помех

В евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 происходит движение фазового вектора (x, z, θ) , удовлетворяющее уравнениям [6; 7]

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) &= -(u_1(t) - v(t)) \sin \theta(t), \\ \ddot{z}(t) &= (u_1(t) - v(t)) \cos \theta(t) - 1, \\ \ddot{\theta}(t) &= u_2(t). \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь $t \in [0, T]$, $v(t) \in [-\sigma, \sigma]$ — параметр помехи, измеримая по Лебегу функция, $u_1(t), u_2(t)$ — управляющие параметры, измеримые по Лебегу функции, принадлежащие множеству $U_1(l, \rho, \rho_1) = \{(u_1, u_2): -\rho_1 \leq u_1 \leq \rho + \rho_1, |u_2| \leq l\}$, где l, ρ, ρ_1 — положительные константы. Параметр помехи заранее неизвестен. В момент времени t известны функции $v(s), x(s), z(s), \theta(s)$, $s \in [0, t]$. Заданы начальное положение системы (1.1)

$$x(0) = x_0, \quad z(0) = z_0, \quad \theta(0) = \theta_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad \dot{z}(0) = \dot{z}_0, \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0, \quad (1.2)$$

и конечное положение

$$x(T) = x_T, \quad z(T) = z_T, \quad \theta(T) = \theta_T \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \quad \dot{x}(T) = \dot{x}_T, \quad \dot{z}(T) = \dot{z}_T, \quad \dot{\theta}(T) = \dot{\theta}_T. \quad (1.3)$$

Задача терминального управления на отрезке $[0, T]$ при наличии помехи [2; 8; 9, ч. III, с. 251] состоит в нахождении условий на параметры процесса (1.1) и краевые условия (1.2), (1.3), при которых существует момент времени T и управление $u = (u_1, u_2)$ в классе позиционных управлений [5, гл. 7, разд. 39; 10, гл. 1, разд. 5], переводящее систему (1.1) из положения (1.2) в малую окрестность конечного положения (1.3) за время T при любой допустимой реализации помехи.

2. Вспомогательная управляемая система. Построение управления

Будем считать выполненным для параметров ρ_1, σ следующее предположение:

Предположение 1. $\rho_1 > \sigma$.

Введем вспомогательную управляемую систему с фазовым вектором $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$, движение которого удовлетворяет уравнениям

$$\begin{cases} \ddot{w}_1(t) &= -q_1(t) \sin w_3(t), \\ \ddot{w}_2(t) &= q_1(t) \cos w_3(t) - 1, \\ \ddot{w}_3(t) &= q_2(t), \end{cases} \quad (2.1)$$

где $q_1(t), q_2(t)$ — параметры управления, принадлежащие множеству $U(l, \rho, \rho_1, \sigma) = U_1 \overset{*}{-} Q = \{(q_1, q_2): -\rho_1 + \sigma \leq q_1 \leq \rho + \rho_1 - \sigma, |q_2| \leq l\}$, $Q = \{(v, 0): |v| \leq \sigma\}$, $U_1 \overset{*}{-} Q$ — геометрическая разность множеств U_1 и Q [9, с. 331]. Краевые условия для системы (2.1) имеют вид

$$w_1(0) = x_0, \quad w_2(0) = z_0, \quad w_3(0) = \theta_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \quad \dot{w}_1(0) = \dot{x}_0, \quad \dot{w}_2(0) = \dot{z}_0, \quad \dot{w}_3(0) = \dot{\theta}_0, \quad (2.2)$$

$$w_1(T) = x_T, \quad w_2(T) = z_T, \quad w_3(T) = \theta_T \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \quad \dot{w}_1(T) = \dot{x}_T, \quad \dot{w}_2(T) = \dot{z}_T, \quad \dot{w}_3(T) = \dot{\theta}_T. \quad (2.3)$$

Рассмотрим для управляемой системы (2.1) задачу нахождения условий на параметры процесса (2.1) и краевые условия (2.2), (2.3), при которых существует момент времени T и

управление $q = (q_1, q_2)$ в классе программных управлений [5, гл. 6, разд. 30; 10, гл. 1, разд. 2], переводящее систему (2.1) из положения (2.2) в конечное положение (2.3) за время T .

Приведем решение такой задачи для управляемой системы (2.1) при краевых условиях (2.2), (2.3).

Рассмотрим скалярные функции $\xi(t), \eta(t), t \in [0, T]$, в форме полиномов пятой степени по t , удовлетворяющих краевым условиям (1.2), (1.3) для компонент x, y системы (1.1) следующего вида:

$$\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} = c_0 + tc_1 + t^2c_2(T) + t^3c_3(T) + t^2(T-t)^2c_4(T) + t^3(T-t)^2c_5(T), \quad (2.4)$$

где $c_0, \dots, c_5 \in \mathbb{R}^2$. Соответствующая производная имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \dot{\eta}(t) \end{pmatrix} = c_1 + 2tc_2(T) + 3t^2c_3(T) + 2t(T-t)(T-2t)c_4(T) + t^2(T-t)(3T-5t)c_5(T).$$

Из краевых условий (1.2) и (1.3) получаем соотношения для параметров $c_0, c_1, c_2(T), c_3(T)$:

$$\begin{aligned} c_0 &= \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}, \quad c_1 = \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}, \\ \begin{cases} T^2c_2(T) + T^3c_3(T) &= \begin{pmatrix} x(T) - x(0) - Tx'(0) \\ y(T) - y(0) - Ty'(0) \end{pmatrix} = A, \\ 2Tc_2(T) + 3T^2c_3(T) &= \begin{pmatrix} x'(T) - x'(0) \\ y'(T) - y'(0) \end{pmatrix} = B, \end{cases} \\ c_2(T) &= \frac{3A - TB}{T^2}, \quad c_3(T) = \frac{TB - 2A}{T^3}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Вторая производная (2.4) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \ddot{\xi}(t) \\ \ddot{\eta}(t) \end{pmatrix} = 2c_2(T) + 6tc_3(T) + 2(6t^2 - 6tT + T^2)c_4(T) + [6t(T-t)^2 - 12t^2(T-t) + 2t^3]c_5(T).$$

Далее мы пользуемся обозначениями

$$\ddot{\xi}(t) = r_1(t, T), \quad \ddot{\eta}(t) = r_2(t, T). \quad (2.6)$$

Найдем управления $q_1(t), q_2(t)$, при которых для компонент w_1, w_2 системы (1.1) выполнено соотношение (см. [11, гл. 4, разд. 4.2; 12, гл. 4, разд. 4.1])

$$\ddot{w}_1(t) = r_1(t, T), \quad \ddot{w}_2(t) = r_2(t, T). \quad (2.7)$$

Из (2.6) имеем

$$\begin{pmatrix} r_1(t, T) \\ r_2(t, T) \end{pmatrix} = 2c_2(T) + 6tc_3(T) + 2(6t^2 - 6tT + T^2)c_4(T) + (6T^2t - 24Tt^2 + 20t^3)c_5(T). \quad (2.8)$$

Утверждение 1. Пусть векторы $c_2(T), c_3(T)$ определены согласно (2.5) и зависимость векторов c_4, c_5 от T имеет вид

$$c_4(T) = \frac{k_1}{T^3}, \quad c_5(T) = \frac{k_1}{T^4},$$

где $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^2$. Тогда $\max_{t \in [0, T]} |r_1(t, T)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, $\max_{t \in [0, T]} |r_2(t, T)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Доказательство следует из утверждений (2.5), (2.8). \square

Выражения для первых и вторых производных по t функций $r_1(t, T)$, $r_2(t, T)$, необходимые далее для нахождения векторов c_4, c_5 и управления u_2 имеют вид

$$\begin{pmatrix} \dot{r}_1(t, T) \\ \dot{r}_2(t, T) \end{pmatrix} = 6c_3(T) + 12(2t - T)c_4(T) + (6T^2 - 48Tt + 60t^2)c_5(T), \quad (2.9)$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{r}_1(t, T) \\ \ddot{r}_2(t, T) \end{pmatrix} = 24c_4(T) + (-48T + 120t)c_5(T). \quad (2.10)$$

При заданных $r_1(t, T), r_2(t, T)$ в силу (2.1), (2.7) определены функция

$$q_1(t, T) = \sqrt{r_1^2(t, T, c_4, c_5) + (r_2(t, T, c_4, c_5) + 1)^2} \quad (2.11)$$

и функция $w_3(t)$, являющаяся аргументом вектор-функции $(-r_1(t), r_1(t) + 1)$ (см. [13, гл. III, разд. 55]), удовлетворяющая соотношениям

$$\sin w_3(t) = \frac{-r_1(t, T)}{\sqrt{r_1^2(t, T) + (r_2(t, T) + 1)^2}}, \quad \cos w_3(t) = \frac{r_2(t, T) + 1}{\sqrt{r_1^2(t, T) + (r_2(t, T) + 1)^2}}, \quad t \in [0, T].$$

В силу утверждения 1 при выборе параметров $c_4(T), c_5(T)$ в форме, описанной в утверждении 1, при достаточно большом T выполнено условие $q_1(t, T) \neq 0$, $t \in [0, T]$, аргумент $w_3(t)$ существует и определен с точностью до слагаемого, кратного 2π . Доказывается (см. [13, гл. III, разд. 55]), что при наложенных условиях аргумент $w_3(t)$ вектор-функции $(-r_1(t), r_1(t) + 1)$ является дважды дифференцируемой функцией и ее производные вычисляются как

$$\begin{aligned} \dot{w}_3(t) &= \frac{r_1 \dot{r}_2 - \dot{r}_1(r_2 + 1)}{r_1^2 + (r_2 + 1)^2}, \\ q_2(t) = \ddot{w}_3(t) &= \frac{r_1 \ddot{r}_2 - \ddot{r}_1(r_2 + 1)}{r_1^2 + (r_2 + 1)^2} + 2 \frac{[r_1 \dot{r}_1 + \dot{r}_2(r_2 + 1)][\dot{r}_1(r_2 + 1) - r_1 \dot{r}_2]}{(r_1^2 + (r_2 + 1)^2)^2}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Так как при $c_4(T), c_5(T)$, имеющих вид $c_4(T) = k_1/T^3$, $c_5(T) = k_1/T^4$, и достаточно большом T $r_2(t, T) + 1 > 0$, то компоненты векторов c_4, c_5 выберем из условий $w_3(0, r_1(0, T), r_2(0, T)) = \theta_0$, $w_3(T, r_1(T, T), r_2(T, T)) = \theta_T$, $\dot{w}_3(0, r_1(0, T), r_2(0, T)) = \dot{\theta}_0$, $\dot{w}_3(T, r_1(T, T), r_2(T, T)) = \dot{\theta}_T$, которые имеют вид

$$\operatorname{tg}(\theta_0)(r_2(0, T) + 1) + r_1(0, T) = 0, \quad (2.13)$$

$$\operatorname{tg}(\theta_T)(r_2(T, T) + 1) + r_1(T, T) = 0, \quad (2.14)$$

$$\dot{\theta}_0 [(r_1^2(0, T) + (r_2(0, T) + 1)^2)] = r_1(0, T) \dot{r}_2(0, T) - \dot{r}_1(0, T)(r_2(0, T) + 1), \quad (2.15)$$

$$\dot{\theta}_T [(r_1^2(T, T) + (r_2(T, T) + 1)^2)] = r_1(T, T) \dot{r}_2(T, T) - \dot{r}_1(T, T)(r_2(T, T) + 1). \quad (2.16)$$

Обозначим

$$A_1 = \operatorname{tg}(\theta_0), \quad A_2 = \operatorname{tg}(\theta_T), \quad A_3 = \dot{\theta}_0, \quad A_4 = \dot{\theta}_T,$$

$$h(A_1, A_2, A_3, A_4, T) = T^2 A_3 A_4 (A_1^2 A_2^2 + A_1^2 + A_2^2 + 1) - 9(A_1 - A_2)^2. \quad (2.17)$$

Рассмотрим случай краевых условий (2.2), (2.3), удовлетворяющих соотношениям

$$\cos \theta(0) \neq 0, \quad \cos \theta(T) \neq 0, \quad \dot{\theta}(0) \neq 0, \quad \dot{\theta}(T) \neq 0. \quad (2.18)$$

З а м е ч а н и е. При выполнении условий (2.18) выбором нефиксированного параметра T можно добиться выполнения соотношения $h(A_1, A_2, A_3, A_4, T) \neq 0$.

Обозначим компоненты векторов $c_i(T)$ через $c_{i1}(T), c_{i2}(T)$, $i = 2, 3, 4, 5$. Учитывая (2.8), решение системы уравнений (2.13)–(2.16) относительно переменных $c_4(T) = (c_{41}(T), c_{42}(T))$, $c_5(T) = (c_{51}(T), c_{52}(T))$ имеет вид

$$c_{41}(T) = - \left(A_1^2 A_2^2 A_3 A_4 T^2 c_{21} + 6A_1^2 A_2^2 A_4 T^2 c_{32} - 6A_1^2 A_2^2 A_4 T c_{22} + A_1^2 A_3 A_4 T^2 c_{21} + 6A_1 A_2^2 A_4 T^2 c_{31} \right. \\ \left. + A_2^2 A_3 A_4 T^2 c_{21} - 3A_1^2 A_2^2 A_4 T + 6A_1^2 A_4 T^2 c_{32} - 6A_1 A_2^2 A_4 T c_{21} - 72A_1^2 A_2 T c_{32} - 6A_1^2 A_4 T c_{22} \right. \\ \left. + 72A_1 A_2^2 T c_{32} + 6A_1 A_4 T^2 c_{31} + A_3 A_4 T^2 c_{21} - 18A_1^2 A_2 c_{22} - 3A_1^2 A_4 T - 72A_1^2 T c_{31} + 18A_1 A_2^2 c_{22} \right. \\ \left. + 72A_1 A_2 T c_{31} - 6A_1 A_4 T c_{21} - 9A_1^2 A_2 - 27A_1^2 c_{21} + 9A_1 A_2^2 + 36A_1 A_2 c_{21} - 9A_2^2 c_{21} \right) \\ / (T^2 h(A_1, A_2, A_3, A_4, T)); \quad (2.19)$$

$$c_{42}(T) = - \left(2A_1^2 A_2^2 A_3 A_4 T^2 c_{22} + A_1^2 A_2^2 A_3 A_4 T^2 + 2A_1^2 A_3 A_4 T^2 c_{22} - 12A_1 A_2^2 A_4 T^2 c_{32} \right. \\ \left. + 2A_2^2 A_3 A_4 T^2 c_{22} + A_1^2 A_3 A_4 T^2 + 12A_1 A_2^2 A_4 T c_{22} + A_2^2 A_3 A_4 T^2 - 12A_2^2 A_4 T^2 c_{31} \right. \\ \left. + 6A_1 A_2^2 A_4 T - 12A_1 A_4 T^2 c_{32} + 12A_2^2 A_4 T c_{21} + 2A_3 A_4 T^2 c_{22} + 144A_1 A_2 T c_{32} \right. \\ \left. + 12A_1 A_4 T c_{22} - 144A_2^2 T c_{32} + A_3 A_4 T^2 - 12A_4 T^2 c_{31} - 18A_1^2 c_{22} + 72A_1 A_2 c_{22} \right. \\ \left. + 6A_1 A_4 T + 144A_1 T c_{31} - 54A_2^2 c_{22} - 144A_2 T c_{31} + 12A_4 T c_{21} - 9A_1^2 \right. \\ \left. + 36A_1 A_2 + 36A_1 c_{21} - 27A_2^2 - 36A_2 c_{21} \right) / (2T^2 h(A_1, A_2, A_3, A_4, T)); \quad (2.20)$$

$$c_{51}(T) = -3 \left(A_1^2 A_2^2 A_3 A_4 T^3 c_{31} + 8A_1^2 A_2^2 A_3 T^2 c_{32} - 2A_1^2 A_2^2 A_4 T^2 c_{32} + A_1^2 A_3 A_4 T^3 c_{31} \right. \\ \left. + A_2^2 A_3 A_4 T^3 c_{31} + 2A_1^2 A_2^2 A_3 T c_{22} + 2A_1^2 A_2^2 A_4 T c_{22} + 8A_1^2 A_2 A_3 T^2 c_{31} - 2A_1 A_2^2 A_4 T^2 c_{31} \right. \\ \left. + A_1^2 A_2^2 A_3 T + A_1^2 A_2^2 A_4 T + 2A_1^2 A_2 A_3 T c_{21} - 2A_1^2 A_4 T^2 c_{32} + 2A_1 A_2^2 A_4 T c_{21} \right. \\ \left. + 8A_2^2 A_3 T^2 c_{32} + A_3 A_4 T^3 c_{31} + 18A_1^2 A_2 T c_{32} + 2A_1^2 A_4 T c_{22} - 18A_1 A_2^2 T c_{32} \right. \\ \left. - 2A_1 A_4 T^2 c_{31} + 2A_2^2 A_3 T c_{22} + 8A_2 A_3 T^2 c_{31} + 12A_1^2 A_2 c_{22} + A_1^2 A_4 T \right. \\ \left. + 15A_1^2 T c_{31} - 12A_1 A_2^2 c_{22} - 12A_1 A_2 T c_{31} + 2A_1 A_4 T c_{21} + A_2^2 A_3 T - 3A_2^2 T c_{31} \right. \\ \left. + 2A_2 A_3 T c_{21} + 6A_1^2 A_2 + 6A_1^2 c_{21} - 6A_1 A_2^2 - 6A_2^2 c_{21} \right) / (T^3 h(A_1, A_2, A_3, A_4, T)); \quad (2.21)$$

$$c_{52}(T) = -3 \left(A_1^2 A_2^2 A_3 A_4 T^3 c_{32} + A_1^2 A_3 A_4 T^3 c_{32} + A_2^2 A_3 A_4 T^3 c_{32} - 8A_1^2 A_2 A_3 T^2 c_{32} \right. \\ \left. + 2A_1 A_2^2 A_4 T^2 c_{32} - 2A_1^2 A_2 A_3 T c_{22} - 8A_1^2 A_3 T^2 c_{31} - 2A_1 A_2^2 A_4 T c_{22} + 2A_2^2 A_4 T^2 c_{31} \right. \\ \left. + A_3 A_4 T^3 c_{32} - A_1^2 A_2 A_3 T - 2A_1^2 A_3 T c_{21} - A_1 A_2^2 A_4 T + 2A_1 A_4 T^2 c_{32} \right. \\ \left. - 2A_2^2 A_4 T c_{21} - 8A_2 A_3 T^2 c_{32} - 3A_1^2 T c_{32} - 12A_1 A_2 T c_{32} - 2A_1 A_4 T c_{22} \right. \\ \left. + 15A_2^2 T c_{32} - 2A_2 A_3 T c_{22} - 8A_3 T^2 c_{31} + 2A_4 T^2 c_{31} - 6A_1^2 c_{22} \right. \\ \left. - A_1 A_4 T - 18A_1 T c_{31} + 6A_2^2 c_{22} - A_2 A_3 T + 18A_2 T c_{31} - 2A_3 T c_{21} \right. \\ \left. - 2A_4 T c_{21} - 3A_1^2 - 12A_1 c_{21} + 3A_2^2 + 12A_2 c_{21} \right) / (T^3 h(A_1, A_2, A_3, A_4, T)). \quad (2.22)$$

Утверждение 2. При выполнении условий (2.18) справедливы соотношения

$$T^2 c_{4j}(T) \rightarrow_{T \rightarrow \infty} 0, \quad T^3 c_{5j}(T) \rightarrow_{T \rightarrow \infty} 0, \quad j = 1, 2. \quad (2.23)$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ существует $T = T(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\min_{t \in [0, T]} q_1(t, T) \geq 1 - \sqrt{2}\varepsilon, \quad \max_{t \in [0, T]} q_1(t, T) \leq 1 + \sqrt{2}\varepsilon, \quad \max_{t \in [0, T]} |q_2(t, T)| \leq \ell\varepsilon, \quad (2.24)$$

ℓ — положительная константа.

Доказательство. Соотношения (2.23) следуют из (2.19)–(2.22) с учетом (2.5), (2.17). Соотношения (2.24) следуют из (2.9)–(2.11), (2.12) и (2.23). \square

Определение 1. Скажем, что краевые условия (2.2), (2.3) удовлетворяют условию “общего положения” на отрезке $[0, T]$, если для них выполнены соотношения (2.18).

Обозначим $L(T) = \max_{t \in [0, T]} q_2(t, T)$, $R(T) = \max_{t \in [0, T]} q_1(t, T)$.

Утверждение 3. Если краевые условия (2.2), (2.3) удовлетворяют условию “общего положения”, то управление (2.11), (2.12) решает задачу перевода системы (2.1) из начального положения (2.2) в конечное положение (2.3) на отрезке $[0, T]$ с параметрами $l \geq L(T)$, $\rho \geq R(T)$.

Доказательство проводится непосредственной подстановкой управлений (2.11), (2.12) в систему (2.1). \square

Предположение 2. Параметры l, ρ, T удовлетворяют условиям $l \geq L(T)$, $\rho \geq R(T)$.

Рассмотрим случаи краевых условий (2.2), (2.3), когда соотношения (2.18) не выполнены:

- 1) $A_3 = 0$, $A_4 \neq 0$; 2) $A_4 = 0$, $A_3 \neq 0$; 3) $A_3 = 0$, $A_4 = 0$; 4) $\cos \theta(0) = 0$; 5) $\cos \theta(T) = 0$.
(2.25)

Определение 2. Управлением типа N ($N = N(t_1, t_2, T)$) назовем управление

$$\begin{cases} (\bar{q}_1(t), \bar{q}_2(t)), & t \in [0, t_1], \\ (q_1(t), q_2(t)), & t \in [t_1, T - t_2], \\ (\hat{q}_1(t), \hat{q}_2(t)), & t \in [T - t_2, T], \end{cases}$$

где $\bar{q}_1(t) = \rho/2$, $\bar{q}_2(t) = l/2$, $t \in [0, t_1]$, $0 \leq t_1 \ll T$; $\hat{q}_1(t) = \rho/2$, $\hat{q}_2(t) = l/2$, $t \in [T - t_2, T]$, $0 \leq t_2 \ll T$, $(q_1(t), q_2(t))$ выбраны согласно (2.11), (2.12). При этом не исключены случаи $t_1 = 0$ и $t_2 = 0$.

Утверждение 4. Если для краевых условий (2.2), (2.3) выполнена одна из комбинаций соотношений 1)–5) (2.25), то существуют малые неотрицательные константы t_1, t_2 такие, что управление типа N , применяемое для краевых условий системы (2.1) в моменты 0 и T , краевых условий в момент t_1 : $(w_3(t_1), \dot{w}_3(t_1))$, являющихся решением системы (2.1) при управлениях $\bar{q}_1(t), \bar{q}_2(t)$ в момент t_1 , и краевых условиях в момент $T - t_2$: $(w_3(T - t_2), \dot{w}_3(T - t_2))$, являющихся решением системы (2.1), вычисленном в обратном времени при управлениях $\hat{q}_1(t), \hat{q}_2(t)$ с граничными условиями $w_3(T), \dot{w}_3(T)$, гарантирует приведение траектории системы (2.1) в конечное положение (2.3).

Доказательство. Приведем доказательство, например, для случая выполнения соотношений 3)–5) (2.25).

При управлении $\bar{q}_1(t), \bar{q}_2(t)$ для фазовой переменной $w_3(t)$ (2.1) и начальных условий $w_3(0), \dot{w}_3(0)$ в момент t_1 выполнены соотношения

$$\dot{w}_3(t_1) = \dot{w}_3(0) + \frac{lt_1}{2}, \quad w_3(t_1) = w_3(0) + \dot{w}_3(0)t_1 + \frac{lt_1^2}{4}.$$

При управлении $\hat{q}_1(t), \hat{q}_2(t)$ для краевых условий $w_3(T - t_2), \dot{w}_3(T - t_2), w_3(T), \dot{w}_3(T)$ выполнены соотношения

$$\dot{w}_3(T - t_2) = \dot{w}_3(T) - \frac{lt_2}{2}, \quad w_3(T - t_2) = w_3(T) - \dot{w}_3(T)t_2 - \frac{lt_2^2}{4}.$$

В случае выполнения соотношений 3)–5) (2.25): $\dot{w}_3(0) = 0$, $\dot{w}_3(T) = 0$, $w_3(0) = w_3(T) + \pi n$, $n \in Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. При применении для $t \in [0, t_1]$ управлений $\bar{q}_1(t), \bar{q}_2(t)$ получаем

$$\dot{w}_3(t_1) = \frac{lt_1}{2} \neq 0, \quad w_3(t_1) = w_3(0) + \frac{lt_1^2}{4}.$$

При применении для $t \in [T - t_2, T]$ управления $\hat{q}_1(t), \hat{q}_2(t)$ имеем

$$\dot{w}_3(T - t_2) = -\frac{lt_2}{2} \neq 0, \quad w_3(T - t_2) = w_3(T) - \dot{w}_3(T - t_2)t_2 - \frac{lt_2^2}{4}.$$

При $t_2 = 2t_1$, $3t_1^2 < \pi/10$ получаем $w_3(t_1) \neq w_3(T - t_2) + \pi k$, $k \in Z$. Для краевых условий $w_3(t_1), \dot{w}_3(t_1), w_3(T - t_2), \dot{w}_3(T - t_2)$ выполнены условия (2.18), краевую задачу для которых решает управление (2.11), (2.12).

Доказательство утверждения 4 для других комбинаций условий (2.25) проводится подобным образом. Управление типа N при всех комбинациях условий (2.25) имеет не более двух переключений.

Из вышесказанного вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. При выполнении предположений 1 и 2 существуют управление $q_1(t), q_2(t)$ типа N и момент $T > 0$ такие, что соответствующая траектория системы (2.1), начинающаяся из положения (2.2), приходит в положение (2.3) в момент T .

3. Построение позиционного управления

Запишем систему (1.1) в форме уравнений, разрешенных относительно производных

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & \dot{x}_2 = -(u_1 - v) \sin(\theta), \\ \dot{z}_1 = z_2, & \dot{z}_2 = (u_1 - v) \cos(\theta) - 1, \\ \dot{\theta}_1 = \theta_2, & \dot{\theta}_2 = u_2. \end{cases} \quad (3.1)$$

Обозначим $y = (x_1, x_2, z_1, z_2, \theta_1, \theta_2)$, $f(t, y, u, v)$ — правая часть системы уравнений (3.1), $u = (u_1, u_2)$, $w = (w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22}, w_{31}, w_{32}) = (w_1, \dot{w}_1, w_2, \dot{w}_2, w_3, \dot{w}_3)$ (2.1).

Для системы (3.1) выполнено условие седловой точки в маленькой игре [5, гл. III, разд. 12]. Рассмотрим разбиение отрезка $[0, T]$ на полуинтервалы $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, N$, где для всех i выполнено условие $\tau_{i+1} - \tau_i \leq \delta$ при достаточно малом δ .

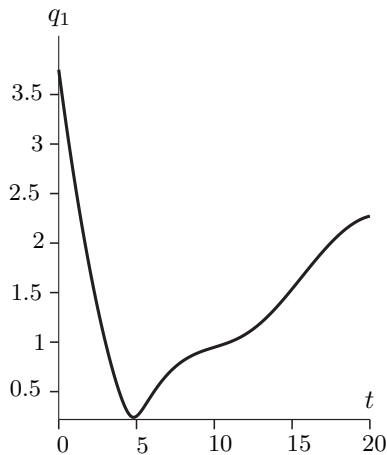


Рис. 1. $q_1(t)$.

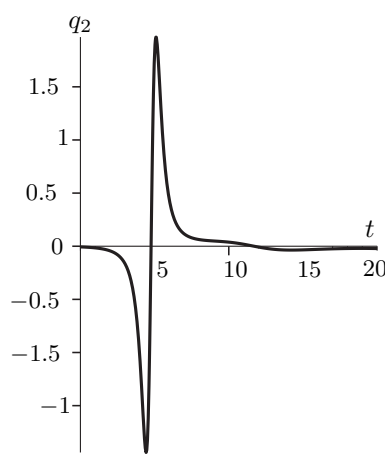


Рис. 2. $q_2(t)$.

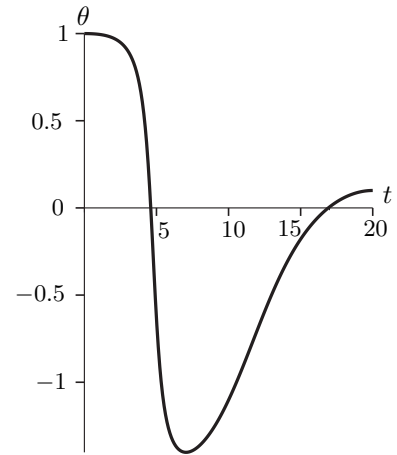
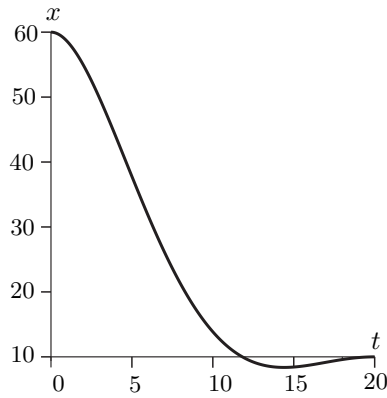
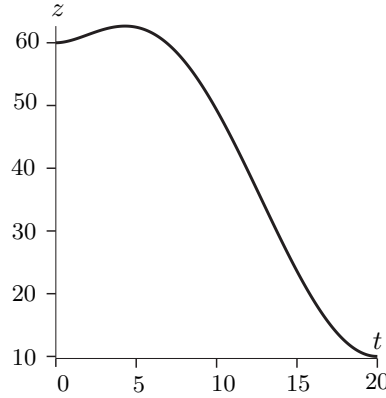
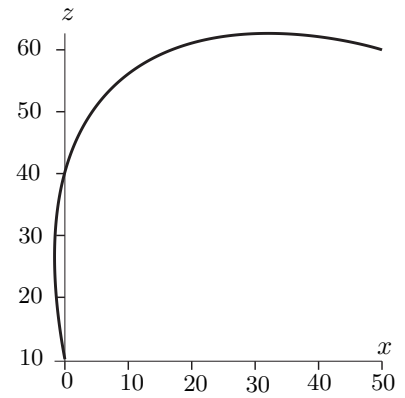


Рис. 3. $\theta_1(t)$.

Рис. 4. $x(t)$.Рис. 5. $z(t)$.Рис. 6. $z(x)$.

Для построения позиционного управления в игровой задаче управления для системы (3.1) воспользуемся процедурой управления с поводьрем [10, гл. I, разд. 5], где в качестве системы, порождающей движения поводьря $w(t)$, будет выступать система (2.1) при управлении $q_1(t), q_2(t)$, выбраном согласно (2.11), (2.12).

Управление $u = (u_1, u_2)$ в системе (3.1) выберем по схеме экстремального прицеливания из условия

$$\max_{v \in V} \langle (y(\tau_i) - w(\tau_i)), f(\tau_i, y(\tau_i), u^{(i)}, v) \rangle = \min_{u \in U} \max_{v \in V} \langle (y(\tau_i) - w(\tau_i)), f(\tau_i, y(\tau_i), u, v) \rangle,$$

а в управление $v(t)$ помехи подставим реализовавшуюся в этот момент помеху. Согласно лемме 2.8.1 [10] при таком управлении системой (3.1) в момент прихода траектории поводьря в конечную позицию фазовый вектор системы (3.1) окажется в малой окрестности целевой точки (1.3).

Таким образом, справедлива

Теорема 2. При выполнении предположений 1 и 2 существуют позиционное управление $u(t) = (u_1(t, y(t), w(t)), u_2(t, y(t), w(t)))$ и момент времени $T > 0$ такие, что применение управления $u(t)$ гарантирует приведение траектории системы (3.1) из положения (1.2) в малую окрестность положения (1.3) в момент T при любой допустимой помехе.

4. Результаты численного расчета управлений и траекторий

Приведем результаты численного расчета управлений и траекторий системы (1.1) для краевых условий

$$\begin{aligned} x(0) = 50, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad x(T) = 0, \quad \dot{x}(T) = 0, \quad z(0) = 60, \quad \dot{z}(0) = 0.01, \quad z(T) = 1, \quad \dot{z}(T) = 0.01, \\ \theta(0) = 1, \quad \dot{\theta}(0) = 0, \quad \theta(T) = 0.1, \quad \dot{\theta}(T) = 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

параметров $\ell = 2.4$, $\rho = 5$, $\rho_1 = 0.11$, $\sigma = 0.1$. Пусть параметр помехи имеет вид $v(t) = F_w \sin(\beta(t) - \theta(t))$. По краевым условиям (4.1) вычисляем $L(T), R(T)$ и находим значение $T = 20$, при котором выполнено предположение 2: $L(20) = 2.1, R(20) = 4.2$. Положим $F_w = 0.1$, $\beta(t) = \pi/3 + \sin(t)$. Графики управлений $q_1(t), q_2(t)$ и траекторий $x(t), z(t), \theta(t), z(x)$ при $T = 20$ приведены на рис. 1–6. Траектория игрового процесса при таком варианте помехи, при шаге 0.01 разбиения интервала $[0, T]$, неотличима на графике от траектории поводьря.

Численные расчеты игрового процесса другого варианта помехи $F_w = 2.5$, $\beta(t) = \pi/3 + 5 \sin(5t)$, не удовлетворяющего предположению 1, показывают, что траектория игры при такой помехе и управлении (2.14), (2.16) не попадает в момент $T = 20$ в малую окрестность целевой точки.

Авторы благодарят М. С. Никольского за обсуждение работы и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Осипов Ю.С.** Пакеты программ: подход к решению задач позиционного управления с неполной информацией // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61, вып. 4(370). С. 25–76.
2. **Кряжимский А. В., Осипов Ю.С.** Идеализированные пакеты программ и задачи позиционного управления с неполной информацией // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 139–157.
3. **Григоренко Н.Л., Румянцев А.Е.** Об одном классе задач управления при неполной информации // Тр. МИАН. 2015. Т. 291. С. 76–85.
4. **Castillo Garcia P., Lozano P., Dzul A.** Modelling and control of mini-flying machines. London: Springer-Verlag, 2005. 259 с.
5. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
6. **Hauser J., Sastry S., Meyer G.** Nonlinear control design for slightly nonminimum phase systems: Application to V/STOL aircraft // J. IFAC Automatica. 1992. Vol. 28, no. 4. P. 665–679.
7. **Olfati-Saber R.** Global configuration stabilization for the VTOL aircraft with strong input coupling // IEEE Trans. Automat. Control. 2002. Vol. 47, no. 11. С. 1949–1952.
8. **Кряжимский А. В., Стрелковский Н.В.** Задача гарантированного позиционного наведения линейной управляемой системы к заданному моменту времени при неполной информации. Программный критерий разрешимости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 168–177.
9. **Понтрягин Л.С.** Избранные труды. М.: МАКС Пресс, 2004. 552 с.
10. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 285 с.
11. **Батенко А.П.** Системы терминального управления. М.: Радио и связь, 1984. 160 с.
12. **Бойчук Л.М.** Метод структурного синтеза нелинейных систем автоматического управления. М.: Энергия, 1971. 113 с.
13. **Болтянский В.Г.** Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 с.

Григоренко Николай Леонтьевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
факультет ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова
e-mail: grigor@cs.msu.su

Поступила 10.12.2015

Румянцев Алексей Евгеньевич
аспирант
факультет ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова
e-mail: rumiantcev@gmail.com