ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 2 2016

УДК 517.977

СУЩЕСТВОВАНИЕ ЦЕНЫ И СЕДЛОВОЙ ТОЧКИ В ПОЗИЦИОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ ДЛЯ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА[1]

М. И. Гомоюнов, Н. Ю. Лукоянов, А. Р. Плаксин

Для конфликтно-управляемой динамической системы, описываемой функционально-дифференциальными уравнениями нейтрального типа в форме Дж. Хейла, рассматривается дифференциальная игра с показателем качества, который оценивает историю движения, реализующуюся к терминальному моменту времени, а также включает интегральную оценку реализаций управлений игроков. Игра формализуется в классе чистых позиционных стратегий. Основной результат — доказательство существования цены и седловой точки в этой игре.

Ключевые слова: системы нейтрального типа, теория управления, дифференциальные игры.

M. I. Gomoyunov, N. Yu. Lukoyanov, A. R. Plaksin. Existence of the value and saddle point in positional differential games for neutral-type systems.

For a conflict-controlled dynamical system described by functional differential equations of neutral type in Hale's form, we consider a differential game with a quality index that estimates the motion history realized up to the terminal time and includes an integral estimation of realizations of the players' controls. The game is formalized in the class of pure positional strategies. The main result is a proof of the existence of the value and saddle point in this game.

Keywords: neutral type systems, control theory, differential games.

MSC: 49N70

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-101-112

Введение

Статья посвящена развитию теории дифференциальных игр [1–6] для функционально-дифференциальных систем нейтрального типа. Рассматривается антагонистическая дифференциальная игра на конечном промежутке времени, в которой движение динамической системы описывается функционально-дифференциальными уравнениями нейтрального типа в форме Дж. Хейла [7]. Управляющие воздействия игроков стеснены геометрическими ограничениями. Показатель качества процесса управления состоит из двух слагаемых. Первое оценивает историю движения системы, сложившуюся к терминальному моменту времени, второе содержит интегральную оценку реализаций управлений игроков. Игра формализуется в классе чистых позиционных стратегий в рамках подхода [2–6]. Основным результатом работы является теорема о том, что данная дифференциальная игра имеет цену и седловую точку. Схема доказательства восходит к работам [5; 6], при этом ключевым моментом в доказательстве является введение двух вспомогательных моделей в конструкциях экстремального сдвига [8–10].

1. Динамическая система

Рассмотрим динамическую систему, движение которой описывается уравнением

$$\frac{d}{dt}\Big(x[t] - g\big(t, x_t[\cdot]\big)\Big) = f\big(t, x_t[\cdot], u[t], v[t]\big), \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad x[t] \in \mathbb{R}^n, \quad u[t] \in \mathbb{U}, \quad v[t] \in \mathbb{V}. \quad (1.1)$$

[1]Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 15–11–10018).

Здесь t — переменная времени; $x[t]$ — вектор состояния в момент времени t; t_0 и ϑ — фиксированные начальный и терминальный моменты; $x_t[\cdot]$ — история движения (элемент запаздывания) на отрезке времени $[t-h,t]$, то есть $x_t[\xi]=x[t+\xi]$, $\xi\in[-h,0]$, где $h>0$ — константа запаздывания; $u[t]$ и $v[t]$ — текущие управляющие воздействия; $\mathbb{U}\subset\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{V}\subset\mathbb{R}^q$ — компакты.

Обозначим через $\|\cdot\|$ евклидову норму векторов, через $C=C\big([-h,0],\mathbb{R}^n\big)$ — пространство непрерывных функций, действующих из $[-h,0]$ в $\mathbb{R}^n$; это пространство оснащено равномерной нормой $\|\cdot\|_C$.

Полагаем, что для отображения $g\colon[t_0,\vartheta]\times C\mapsto\mathbb{R}^n$ выполнены следующие условия:

$(g.1)$ Существует такое число $\alpha_g\in(0,1)$, что имеет место оценка

$$\big\|g\big(t,w[\cdot]\big)-g\big(t,r[\cdot]\big)\big\|\le\alpha_g\big\|w[\cdot]-r[\cdot]\big\|_C,\quad \big(t,w[\cdot]\big),\big(t,r[\cdot]\big)\in[t_0,\vartheta]\times C.$$

$(g.2)$ Найдется такое число $\beta_g>0$, что справедливо неравенство

$$\big\|g\big(t,w[\cdot]\big)-g\big(\xi,w[\cdot]\big)\big\|\le\beta_g\big(1+\big\|w[\cdot]\big\|_C\big)\big|t-\xi\big|,\quad \big(t,w[\cdot]\big),\big(\xi,w[\cdot]\big)\in[t_0,\vartheta]\times C.$$

З а м е ч а н и е. Например, для отображений

$$g\big(t,w[\cdot]\big)=A[t]w[-\hat h]+B[t],\ \ g\big(t,w[\cdot]\big)=g_1\big(t,w[-\hat h]\big),\ \ g\big(t,w[\cdot]\big)=\int\limits_{-h}^{0}g_2\big(t,\xi,w[\xi]\big)\mathrm{d}\xi,\ \ \hat h\in[0,h],$$

условия $(g.1)$, $(g.2)$ выполняются за счет подходящих свойств функций A, B, g_1 и g_2.

Полагаем также, что отображение $f\colon[t_0,\vartheta]\times C\times\mathbb{U}\times\mathbb{V}\mapsto\mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям:

$(f.1)$ Отображение f непрерывно.

$(f.2)$ Для любого компакта $D\subset C$ существует такое число $\alpha_f=\alpha_f(D)>0$, что

$$\big\|f\big(t,w[\cdot],u,v\big)-f\big(t,r[\cdot],u,v\big)\big\|\le\alpha_f\big\|w[\cdot]-r[\cdot]\big\|_C,\quad \big(t,w[\cdot]\big),\big(t,r[\cdot]\big)\in[t_0,\vartheta]\times D,\quad u\in\mathbb{U},\quad v\in\mathbb{V}.$$

$(f.3)$ Существует такая константа $\beta_f>0$, что имеет место оценка

$$\big\|f\big(t,w[\cdot],u,v\big)\big\|\le\beta_f\big(1+\big\|w[\cdot]\big\|_C\big),\quad \big(t,w[\cdot]\big)\in[t_0,\vartheta]\times C,\quad u\in\mathbb{U},\quad v\in\mathbb{V}.$$

Пусть зафиксировано число $R_0>0$. Положим

$$X_0=\Big\{w[\cdot]\in C\colon \big\|w[\cdot]\big\|_C\le R_0,\ \big\|w[t]-w[\xi]\big\|\le R_0|t-\xi|,\ t,\xi\in[-h,0]\Big\}.$$

Для числа $\beta>0$ рассмотрим множество $X(\beta)$, состоящее из абсолютно непрерывных функций $x\colon[t_0-h,\vartheta]\mapsto\mathbb{R}^n$, которые обозначаются через $x[t_0-h[\cdot]\vartheta]$ и удовлетворяют соотношениям

$$x_{t_0}[\cdot]\in X_0,\quad \Big\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(x[t]-g\big(t,x_t[\cdot]\big)\Big)\Big\|\le\beta\Big(1+\big\|x_t[\cdot]\big\|_C\Big)\ \text{при п.в. } t\in[t_0,\vartheta]. \tag{1.2}$$

Определим множество допустимых позиций системы (1.1)

$$G=\Big\{\big(t,w[\cdot]\big)\in[t_0,\vartheta]\times C\colon w[\cdot]=x_t[\cdot],\ x[t_0-h[\cdot]\vartheta]\in X\big(\beta_f\big)\Big\}. \tag{1.3}$$

Пусть $(t_*,x_*[\cdot])\in G$. Допустимыми реализациями управляющих воздействий $u[t]$ и $v[t]$ на промежутке $[t_*,\vartheta)$ считаем измеримые функции $u\colon[t_*,\vartheta)\mapsto\mathbb{U}$ и $v\colon[t_*,\vartheta)\mapsto\mathbb{V}$, обозначаемые далее $u[t_*[\cdot]\vartheta)$ и $v[t_*[\cdot]\vartheta)$ соответственно. Действуя, например, по схеме из [11] (см. также [7]), можно показать, что при условиях $(g.1)$, $(g.2)$ и $(f.1)$–$(f.3)$ пара допустимых реализаций $u[t_*[\cdot]\vartheta)$ и $v[t_*[\cdot]\vartheta)$ единственным образом порождает из позиции $(t_*,x_*[\cdot])$ движение $x[t_*-h[\cdot]\vartheta]$ системы (1.1) — абсолютно непрерывную функцию $x\colon[t_*-h,\vartheta]\mapsto\mathbb{R}^n$, которая удовлетворяет условию $x_{t_*}[\cdot]=x_*[\cdot]$ и вместе с $u[t]$ и $v[t]$ почти всюду на $[t_*,\vartheta]$ удовлетворяет уравнению (1.1).

Непосредственно проверяется, что множество G из (1.3) обладает следующими свойствами.

Утверждение 1. *Множество G компактно в $[t_0,\vartheta]\times C$. Существует такое $R>0$, что*

$$\big\|w[\cdot]\big\|_C\le R,\quad \big\|w[\tau]-w[\xi]\big\|\le R|\tau-\xi|,\quad \tau,\xi\in[-h,0],\quad \big(t,w[\cdot]\big)\in G.$$

Для движения $x[t_*-h[\cdot]\vartheta]$ системы (1.1), порожденного из позиции $(t_*,x_*[\cdot])\in G$ допустимыми реализациями $u[t_*[\cdot]\vartheta)$ и $v[t_*[\cdot]\vartheta)$, имеем $(t,x_t[\cdot])\in G$, $t\in[t_*,\vartheta]$.

2. Показатель качества

Качество процесса управления оценивается показателем

$$\gamma=\sigma\big(x_\vartheta[\cdot]\big)+\int\limits_{t_*}^{\vartheta}\chi\big(\xi,x_\xi[\cdot],u[\xi],v[\xi]\big)\,\mathrm{d}\xi, \tag{2.1}$$

где отображения $\sigma\colon C\mapsto\mathbb{R}$ и $\chi\colon[t_0,\vartheta]\times C\times\mathbb{U}\times\mathbb{V}\mapsto\mathbb{R}$ удовлетворяют следующим условиям:
(σ) Для любого компакта $D\subset C$ существует такое число $\alpha_\sigma=\alpha_\sigma(D)>0$, что

$$\big|\sigma\big(w[\cdot]\big)-\sigma\big(r[\cdot]\big)\big|\le\alpha_\sigma\big\|w[\cdot]-r[\cdot]\big\|_C,\quad w[\cdot],r[\cdot]\in D.$$

(χ.1) Отображение χ непрерывно.

(χ.2) Для любого компакта $D\subset C$ существует такое число $\alpha_\chi=\alpha_\chi(D)>0$, что

$$\big|\chi\big(t,w[\cdot],u,v\big)-\chi\big(t,r[\cdot],u,v\big)\big|\le\alpha_\chi\big\|w[\cdot]-r[\cdot]\big\|_C,\quad \big(t,w[\cdot]\big),\big(t,r[\cdot]\big)\in[t_0,\vartheta]\times D,\quad u\in\mathbb{U},\quad v\in\mathbb{V}.$$

3. Дифференциальная игра

Для системы (1.1) и показателя качества (2.1) рассмотрим антагонистическую дифференциальную игру. Первый игрок распоряжается выбором управляющего воздействия $u[t]$, второй — $v[t]$. Первый игрок нацелен минимизировать показатель (2.1), второй — максимизировать.

Предполагаем, что для отображений f и χ выполняется условие седловой точки в маленькой игре [6, с. 79] или, в другой терминологии, условие Айзекса [1]

(f,χ) Для любых $(t,w[\cdot])\in[t_0,\vartheta]\times C$, $s\in\mathbb{R}^n$ и $\eta\in\mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\min_{u\in\mathbb{U}}\max_{v\in\mathbb{V}}\big(\langle f\big(t,w[\cdot],u,v\big),s\rangle+\chi(t,w[\cdot],u,v)\eta\big)=\max_{v\in\mathbb{V}}\min_{u\in\mathbb{U}}\big(\langle f\big(t,w[\cdot],u,v\big),s\rangle+\chi(t,w[\cdot],u,v)\eta\big).$$

Дальнейшая формализация рассматриваемой дифференциальной игры в классе позиционных стратегий управления игроков следует подходу [2–6]. При этом в силу условия (f,χ) можно ограничиться классом чистых позиционных стратегий [6, § 8].

Под стратегией управления первого игрока понимаем всякое отображение

$$U=U\big(t,w[\cdot],\varepsilon\big)\in\mathbb{U},\quad \big(t,w[\cdot]\big)\in G,\quad \varepsilon>0,$$

где ε имеет смысл параметра точности [6, с. 68].

Пусть зафиксированы позиция $(t_*,x_*[\cdot])\in G$, число $\varepsilon>0$ и разбиение отрезка $[t_*,\vartheta]$

$$\Delta_\delta=\big\{\tau_j:0<\tau_{j+1}-\tau_j\le\delta,\ j=\overline{1,J-1},\ \tau_1=t_*,\ \tau_J=\vartheta\big\}. \tag{3.1}$$

Тройка $\{U,\varepsilon,\Delta_\delta\}$ определяет закон управления первого игрока, который в цепи обратной связи последовательно по шагам разбиения Δ_δ формирует кусочно-постоянную (а стало быть, допустимую) реализацию $u[t_*[\cdot]\vartheta)$ по правилу

$$u[t]=U(\tau_j,x_{\tau_j}[\cdot],\varepsilon),\quad t\in[\tau_j,\tau_{j+1}),\quad j=\overline{1,J-1}. \tag{3.2}$$

Из позиции $(t_*, x_*[\cdot])$ такой закон в паре с допустимой реализацией $v[t_*[\cdot]\vartheta)$ однозначно порождает движение системы (1.1). Реализовавшееся при этом значение показателя качества (2.1) обозначим через $\gamma(t_*, x_*[\cdot]; U, \varepsilon, \Delta_\delta; v[t_*[\cdot]\vartheta))$.

Исходя из самых неблагоприятных с точки зрения первого игрока обстоятельств, определим величину гарантированного результата стратегии U

$$\rho_u\big(t_*, x_*[\cdot], U\big) = \varlimsup_{\varepsilon\downarrow 0} \lim_{\delta\downarrow 0} \sup_{\Delta_\delta} \sup_{v[t_*[\cdot]\vartheta)} \gamma\big(t_*, x_*[\cdot]; U, \varepsilon, \Delta_\delta; v[t_*[\cdot]\vartheta)\big), \quad \big(t_*, x_*[\cdot]\big) \in G. \tag{3.3}$$

Тогда оптимальным гарантированным результатом первого игрока будет величина

$$\rho_u^\circ\big(t_*, x_*[\cdot]\big) = \inf_U \rho_u\big(t_*, x_*[\cdot], U\big), \quad \big(t_*, x_*[\cdot]\big) \in G. \tag{3.4}$$

Стратегию U° назовем оптимальной, если справедливо равенство

$$\rho_u\big(t_*, x_*[\cdot], U^\circ\big) = \rho_u^\circ\big(t_*, x_*[\cdot]\big), \quad \big(t_*, x_*[\cdot]\big) \in G.$$

Аналогично, с понятными изменениями, для второго игрока рассматриваем стратегию управления $V = V(t, w[\cdot], \varepsilon) \in \mathbb{V}$, $(t, w[\cdot]) \in G$, $\varepsilon > 0$, закон управления $\{V, \varepsilon, \Delta_\delta\}$, формирующий кусочно-постоянную реализацию $v[t_*[\cdot]\vartheta)$ по правилу

$$v[t] = V(\tau_j, x_{\tau_j}[\cdot], \varepsilon), \quad t \in [\tau_j, \tau_{j+1}), \quad j = \overline{1, J-1},$$

величину гарантированного результата стратегии V

$$\rho_v\big(t_*, x_*[\cdot], V\big) = \varliminf_{\varepsilon\downarrow 0} \lim_{\delta\downarrow 0} \inf_{\Delta_\delta} \inf_{u[t_*[\cdot]\vartheta)} \gamma\big(t_*, x_*[\cdot]; u[t_*[\cdot]\vartheta); V, \varepsilon, \Delta_\delta\big), \quad \big(t_*, x_*[\cdot]\big) \in G, \tag{3.5}$$

и величину оптимального гарантированного результата второго игрока

$$\rho_v^\circ\big(t_*, x_*[\cdot]\big) = \sup_V \rho_v\big(t_*, x_*[\cdot], V\big), \quad \big(t_*, x_*[\cdot]\big) \in G. \tag{3.6}$$

Стратегия управления второго игрока V° будет называться оптимальной, если

$$\rho_v\big(t_*, x_*[\cdot], V^\circ\big) = \rho_v^\circ\big(t_*, x_*[\cdot]\big), \quad \big(t_*, x_*[\cdot]\big) \in G.$$

Непосредственно из соотношений (3.4) и (3.6) вытекает неравенство

$$\rho_u^\circ\big(t_*, x_*[\cdot]\big) \le \rho_v^\circ\big(t_*, x_*[\cdot]\big), \quad \big(t_*, x_*[\cdot]\big) \in G. \tag{3.7}$$

В случае, когда справедливо равенство

$$\rho_u^\circ\big(t_*, x_*[\cdot]\big) = \rho_v^\circ\big(t_*, x_*[\cdot]\big), \quad \big(t_*, x_*[\cdot]\big) \in G, \tag{3.8}$$

говорят, что дифференциальная игра (1.1), (2.1) имеет цену, а пару оптимальных стратегий $\{U^\circ, V^\circ\}$ называют седловой точкой игры. Основной результат статьи составляет

Теорема. *Дифференциальная игра* (1.1), (2.1) *имеет цену и седловую точку* $\{U^\circ, V^\circ\}$.

4. Квазистратегии

По утверждению 1 множество G компактно. Значит найдется такое число $\overline{\beta} \ge \beta_f$, что

$$\big\|f\big(t, w[\cdot], u, v\big)\big\| \le \overline{\beta}, \quad \big|\chi\big(t, w[\cdot], u, v\big)\big| \le \overline{\beta}, \quad \big(t, w[\cdot]\big) \in G, \quad u \in \mathbb{U}, \quad v \in \mathbb{V}. \tag{4.1}$$

Положим

$$\overline{G} = \Big\{\big(t, w[\cdot]\big) \in [t_0, \vartheta] \times C \colon w[\cdot] = x_t[\cdot],\ x[t_0 - h[\cdot]\vartheta] \in X\big(\overline{\beta}\big)\Big\}, \tag{4.2}$$

где множество $X(\overline{\beta})$ определяется в согласии с соотношениями (1.2).

Рассмотрим вспомогательную динамическую систему (модель-копию системы (1.1))

$$\frac{d}{dt}\Big(y[t]-g\big(t,y_t[\cdot]\big)\Big)=f\big(t,y_t[\cdot],p[t],q[t]\big),\quad t\in[t_0,\vartheta],\quad y[t]\in\mathbb{R}^n,\quad p[t]\in\mathbb{U},\quad q[t]\in\mathbb{V}. \tag{4.3}$$

Пусть зафиксированы позиция $(\tau_*,y_*[\cdot])\in\overline{G}$ и момент времени $\tau^*\in(\tau_*,\vartheta]$. В согласии с принятыми выше обозначениями допустимые реализации управляющих воздействий $p[t]$ и $q[t]$ будем обозначать через $p[\tau_*[\cdot]\tau^*)$ и $q[\tau_*[\cdot]\tau^*)$. Соответственно порождаемое ими из позиции $(\tau_*,y_*[\cdot])$ движение системы (4.3) обозначаем $y[\tau_*-h[\cdot]\tau^*]$, предполагая при этом $y_{\tau_*}[\cdot]=y_*[\cdot]$.

По аналогии с утверждением 1 имеет место

Утверждение 2. *Множество $\overline{G}$ компактно в $[t_0,\vartheta]\times C$. Существует такое $\overline{R}>0$, что*

$$\big\|w[\cdot]\big\|_C\le\overline{R},\quad \big\|w[\tau]-w[\xi]\big\|\le\overline{R}|\tau-\xi|,\quad \tau,\xi\in[-h,0],\quad \big(t,w[\cdot]\big)\in\overline{G}.$$

Для любых $(\tau_*,y_*[\cdot])\in\overline{G}$ и $\tau^*\in(\tau_*,\vartheta]$ для движения $y[\tau_*-h[\cdot]\tau^*]$ системы (4.3), порожденного из позиции $(\tau_*,y_*[\cdot])$ реализациями $p[\tau_*[\cdot]\tau^*)$ и $q[\tau_*[\cdot]\tau^*)$, имеем $(t,y_t[\cdot])\in\overline{G}$, $t\in[\tau_*,\tau^*]$.

Пусть $\tau_*\in[t_0,\vartheta)$. Следуя, например, [5, с. 24], квазистратегией Q_{τ_*} формирования управляющего воздействия $p[t]$ на промежутке $[\tau_*,\vartheta)$ будем называть всякое отображение, которое каждой реализации $q[\tau_*[\cdot]\vartheta)$ ставит в соответствие реализацию $p[\tau_*[\cdot]\vartheta)=Q_{\tau_*}(q[\tau_*[\cdot]\vartheta))$ и при этом удовлетворяет следующему свойству неупреждаемости: для любого момента $\hat{\tau}\in[\tau_*,\vartheta)$ и любых реализаций $q^{(1)}[\tau_*[\cdot]\vartheta)$ и $q^{(2)}[\tau_*[\cdot]\vartheta)$ равенство $q^{(1)}[t]=q^{(2)}[t]$ почти всюду на $[\tau_*,\hat{\tau}]$ влечет $p^{(1)}[t]=p^{(2)}[t]$ при почти всех $t\in[\tau_*,\hat{\tau}]$, где $p^{(i)}[\tau_*[\cdot]\vartheta)=Q_{\tau_*}(q^{(i)}[\tau_*[\cdot]\vartheta))$, $i=1,2$.

Пусть $(\tau_*,y_*[\cdot])\in\overline{G}$ и $\hat{y}_*\in\mathbb{R}$. Обозначим

$$\hat{y}[t]=\hat{y}_*+\int\limits_{\tau_*}^{t}\chi\big(\xi,y_\xi[\cdot],p[\xi],q[\xi]\big)\mathrm{d}\xi,\qquad \gamma_y=\sigma\big(y_\vartheta[\cdot]\big)+\hat{y}[\vartheta]. \tag{4.4}$$

Из позиции $(\tau_*,y_*[\cdot])$ квазистратегия Q_{τ_*} в паре с допустимой реализацией $q[\tau_*[\cdot]\vartheta)$ однозначно порождает движение $y[\tau_*-h[\cdot]\vartheta]$ системы (4.3). Реализовавшееся при этом значение показателя (4.4) обозначим $\gamma_y(\tau_*,y_*[\cdot],\hat{y}_*;Q_{\tau_*};q[\tau_*[\cdot]\vartheta))$.

Положим

$$\rho\big(\tau_*,y_*[\cdot],\hat{y}_*\big)=\inf_{Q_{\tau_*}}\sup_{q[\tau_*[\cdot]\vartheta)}\gamma_y\big(\tau_*,y_*[\cdot],\hat{y}_*;Q_{\tau_*};q[\tau_*[\cdot]\vartheta)\big),\quad \big(\tau_*,y_*[\cdot]\big)\in\overline{G},\quad \hat{y}_*\in\mathbb{R}. \tag{4.5}$$

Величина ρ обладает следующими свойствами:

(ρ.1) Справедливо равенство

$$\rho\big(\vartheta,w[\cdot],0\big)=\sigma\big(w[\cdot]\big),\quad \big(\vartheta,w[\cdot]\big)\in\overline{G}.$$

(ρ.2) Справедливо равенство

$$\rho\big(t,w[\cdot],\eta\big)=\rho\big(t,w[\cdot],0\big)+\eta,\quad \big(t,w[\cdot]\big)\in\overline{G},\quad \eta\in\mathbb{R}.$$

(ρ.3) Существует такое число $\alpha_\rho\ge 1$, что имеет место оценка

$$\big|\rho\big(t,w[\cdot],\eta\big)-\rho\big(t,r[\cdot],\mu\big)\big|\le\alpha_\rho\Big(\big\|w[\cdot]-r[\cdot]\big\|_C+|\eta-\mu|\Big),\quad \big(t,w[\cdot]\big),\big(t,r[\cdot]\big)\in\overline{G},\quad \eta,\mu\in\mathbb{R}.$$

($\rho.4^u$) Пусть $(\tau_*,y_*[\cdot])\in\overline{G}$, $\hat{y}_*\in\mathbb{R}$, $\tau^*\in(\tau_*,\vartheta]$ и $\varepsilon>0$. Тогда для любой реализации $q[\tau_*[\cdot]\tau^*)$ существует такая реализация $p[\tau_*[\cdot]\tau^*)$, что для движения $y[\tau_*-h[\cdot]\tau^*]$ системы (4.3), порожденного из позиции $(\tau_*,y_*[\cdot])$ этими реализациями, справедливо неравенство

$$\rho\big(\tau^*,y_{\tau^*}[\cdot],\hat{y}[\tau^*]\big)\le\rho\big(\tau_*,y_*[\cdot],\hat{y}_*\big)+\sqrt{\varepsilon}(\tau^*-\tau_*). \tag{4.6}$$

(ρ.4^v) Пусть $(\tau_*, y_*[\cdot]) \in \overline{G}$, $\hat{y}_* \in \mathbb{R}$, $\tau^* \in (\tau_*, \vartheta]$ и $\varepsilon > 0$. Тогда для любой реализации $p[\tau_*[\cdot]\tau^*)$ существует такая реализация $q[\tau_*[\cdot]\tau^*)$, что для движения $y[\tau_* - h[\cdot]\tau^*]$ системы (4.3), порожденного из позиции $(\tau_*, y_*[\cdot])$ этими реализациями, справедливо неравенство

$$\rho\big(\tau^*, y_{\tau^*}[\cdot], \hat{y}[\tau^*]\big) \geq \rho\big(\tau_*, y_*[\cdot], \hat{y}_*\big) - \sqrt{\varepsilon}(\tau^* - \tau_*).$$

Свойства (ρ.1) и (ρ.2) следуют непосредственно из определения величины ρ. В силу условий (g.1), (f.2), (σ), (χ.2) и утверждения 2 найдется такое число $\alpha_\gamma > 0$, что, каковы бы ни были момент времени $\tau_* \in [t_0, \vartheta)$, реализация $q[\tau_*[\cdot]\vartheta)$ и квазистратегия Q_{τ_*}, имеет место оценка

$$\Big|\gamma_y\big(\tau_*, y_*^{(1)}[\cdot], \hat{y}_*^{(1)}; Q_{\tau_*}; q[\tau_*[\cdot]\vartheta)\big) - \gamma_y\big(\tau_*, y_*^{(2)}[\cdot], \hat{y}_*^{(2)}; Q_{\tau_*}; q[\tau_*[\cdot]\vartheta)\big)\Big|$$

$$\leq \alpha_\gamma \big\|y_*^{(1)}[\cdot] - y_*^{(2)}[\cdot]\big\|_C + \big|\hat{y}_*^{(1)} - \hat{y}_*^{(2)}\big|, \quad \big(\tau_*, y_*^{(1)}[\cdot]\big), \big(\tau_*, y_*^{(2)}[\cdot]\big) \in \overline{G}, \quad \hat{y}_*^{(1)}, \hat{y}_*^{(2)} \in \mathbb{R}.$$

Отсюда вытекает свойство (ρ.3). Свойства (ρ.4^u) и (ρ.4^v) в теории дифференциальных игр называются u-стабильностью и v-стабильностью. Они доказываются аналогично леммам 28.1 и 28.2 из монографии [6].

5. Вспомогательная z-модель

Пусть движение $x[t_* - h[\cdot]\vartheta]$ системы (1.1) порождено из позиции $(t_*, x_*[\cdot]) \in G$ реализациями $u[t_*[\cdot]\vartheta)$ и $v[t_*[\cdot]\vartheta)$. Рассмотрим вспомогательную динамическую систему (z-модель)

$$\frac{d}{dt}\Big(z[t] - g\big(t, z_t[\cdot]\big)\Big) = f\big(t, x_t[\cdot], p[t], q[t]\big), \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad z[t] \in \mathbb{R}^n, \quad p[t] \in \mathbb{U}, \quad q[t] \in \mathbb{V}. \tag{5.1}$$

Отметим, что в отличие от модели-копии (4.3) в правую часть системы (5.1) вместо текущей истории $z_t[\cdot]$ движения этой системы подставляется история $x_t[\cdot]$ зафиксированного движения $x[t_* - h[\cdot]\vartheta]$. Чтобы это подчеркнуть, будем говорить, что движение $z[\tau_* - h[\cdot]\tau^*]$ системы (5.1) порождается из позиции $(\tau_*, z_*[\cdot]) \in \overline{G}$, $\tau_* \geq t_*$, реализациями $p[\tau_*[\cdot]\tau^*)$ и $q[\tau_*[\cdot]\tau^*)$ управляющих воздействий и движением $x[t_* - h[\cdot]\vartheta]$ системы (1.1).

По определению (4.2) множества $\overline{G}$ справедливо следующее

Утверждение 3. *Пусть движение $x[t_* - h[\cdot]\vartheta]$ системы* (1.1) *порождено из позиции $(t_*, x_*[\cdot]) \in G$ допустимыми реализациями $u[t_*[\cdot]\vartheta)$ и $v[t_*[\cdot]\vartheta)$. Пусть $(\tau_*, z_*[\cdot]) \in \overline{G}$, $\tau_* \geq t_*$, и $\tau^* \in (\tau_*, \vartheta]$. Тогда для движения $z[\tau_* - h[\cdot]\tau^*]$ системы* (5.1), *порожденного из позиции $(\tau_*, z_*[\cdot])$ допустимыми реализациями $p[\tau_*[\cdot]\tau^*)$, $q[\tau_*[\cdot]\tau^*)$ и движением $x[t_* - h[\cdot]\vartheta]$, имеет место включение $(t, z_t[\cdot]) \in \overline{G}$, $t \in [\tau_*, \tau^*]$.*

Пусть $(t_*, x_*[\cdot]) \in G$, $(\tau_*, z_*[\cdot]) \in \overline{G}$ и $\hat{z}_* \in \mathbb{R}$. Обозначим

$$\hat{x}[t] = \int_{t_*}^{t} \chi\big(\xi, x_\xi[\cdot], u[\xi], v[\xi]\big)\mathrm{d}\xi, \quad \hat{z}[t] = \hat{z}_* + \int_{\tau_*}^{t} \chi\big(\xi, x_\xi[\cdot], p[\xi], q[\xi]\big)\mathrm{d}\xi. \tag{5.2}$$

Определим функционал

$$\mathcal{V}\big(t, w[\cdot], r[\cdot], \eta\big) = \big\|s\big(t, w[\cdot], r[\cdot]\big)\big\|^2 + \eta^2, \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad w[\cdot], r[\cdot] \in C, \quad \eta \in \mathbb{R}, \tag{5.3}$$

где

$$s\big(t, w[\cdot], r[\cdot]\big) = w[0] - g\big(t, w[\cdot]\big) - r[0] + g\big(t, r[\cdot]\big). \tag{5.4}$$

Положим

$$\epsilon(t) = \varepsilon + (t - t_0)\varepsilon. \tag{5.5}$$

Лемма 1. *Для любого числа* $\varepsilon > 0$ *найдется такое число* $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$, *что будет справедливо следующее утверждение. Пусть* $(t_*, x_*[\cdot]) \in G$, $(\tau_*, z_*[\cdot]) \in \overline{G}$, $\tau_* \geq t_*$, $\hat{z}_* \in \mathbb{R}$ *и момент времени* $\tau^* \in (\tau_*, \vartheta]$ *удовлетворяет неравенству*

$$\tau^* - \tau_* \leq \delta_1. \tag{5.6}$$

Пусть движение $x[t_* - h[\cdot]\vartheta]$ *системы* (1.1) *порождено из позиции* $(t_*, x_*[\cdot])$ *допустимыми реализациями* $u[t_*[\cdot]\vartheta)$ *и* $v[t_*[\cdot]\vartheta)$, *а движение* $z[\tau_* - h[\cdot]\tau^*]$ *системы* (5.1) *порождено из позиции* $(\tau_*, z_*[\cdot])$ *допустимыми реализациями* $p[\tau_*[\cdot]\tau^*)$, $q[\tau_*[\cdot]\tau^*)$ *и движением* $x[t_* - h[\cdot]\vartheta]$. *Пусть при этом реализации* $u[t_*[\cdot]\vartheta)$ *и* $q[\tau_*[\cdot]\tau^*)$ *удовлетворяют равенствам*

$$u[t] = u^\circ, \quad q[t] = q^\circ, \quad t \in [\tau_*, \tau^*), \tag{5.7}$$

$$u^\circ \in \underset{u \in \mathbb{U}}{\operatorname{argmin}} \max_{v \in \mathbb{V}} \Big(\big\langle f\big(\tau_*, x_{\tau_*}[\cdot], u, v\big),\, s\big(\tau_*, x_{\tau_*}[\cdot], z_*[\cdot]\big) \big\rangle + \chi\big(\tau_*, x_{\tau_*}[\cdot], u, v\big) \big(\hat{x}[\tau_*] - \hat{z}_*\big) \Big),$$

$$q^\circ \in \underset{q \in \mathbb{V}}{\operatorname{argmax}} \min_{p \in \mathbb{U}} \Big(\big\langle f\big(\tau_*, x_{\tau_*}[\cdot], p, q\big),\, s\big(\tau_*, x_{\tau_*}[\cdot], z_*[\cdot]\big) \big\rangle + \chi\big(\tau_*, x_{\tau_*}[\cdot], p, q\big) \big(\hat{x}[\tau_*] - \hat{z}_*\big) \Big),$$

и справедливо неравенство

$$\mathcal{V}\big(\tau_*, x_{\tau_*}[\cdot], z_*[\cdot], \hat{x}[\tau_*] - \hat{z}_*\big) \leq \epsilon(\tau_*). \tag{5.8}$$

Тогда

$$\mathcal{V}\big(t, x_t[\cdot], z_t[\cdot], \hat{x}[t] - \hat{z}[t]\big) \leq \epsilon(t), \quad t \in [\tau_*, \tau^*]. \tag{5.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу условия $(g.1)$ и утверждений 1–3 при $t \in [\tau_*, \tau^*]$ имеем

$$\big\| s\big(t, x_t[\cdot], z_t[\cdot]\big) \big\| \leq \big\| x[t] \big\| + \big\| z[t] \big\| + \alpha_g \Big(\big\| x_t[\cdot] \big\|_C + \big\| z_t[\cdot] \big\|_C \Big) \leq R_1 = (1 + \alpha_g)(R + \overline{R}). \tag{5.10}$$

Для значений $\hat{x}[t]$ и $\hat{z}[t]$ в согласии со второй оценкой в (4.1) справедливо неравенство

$$\big| \hat{x}[t] - \hat{z}[t] \big| \leq 2\overline{\beta}(t - \tau_*) + \big| \hat{x}[\tau_*] - \hat{z}_* \big|, \quad t \in [\tau_*, \tau^*]. \tag{5.11}$$

Принимая во внимание определение (5.3) функционала $\mathcal{V}$ и неравенство (5.8), выводим

$$\big| \hat{x}[\tau_*] - \hat{z}_* \big| \leq \sqrt{\mathcal{V}\big(\tau_*, x_{\tau_*}[\cdot], z_*[\cdot], \hat{x}[\tau_*] - \hat{z}_*\big)} \leq \sqrt{\epsilon(\tau_*)}. \tag{5.12}$$

Пусть $R_2(\varepsilon) = 2\overline{\beta}(\vartheta - t_0) + \sqrt{\epsilon(\vartheta)}$. Тогда, объединяя оценки (5.11) и (5.12), получаем

$$\big| \hat{x}[t] - \hat{z}[t] \big| \leq R_2(\varepsilon), \quad t \in [\tau_*, \tau^*]. \tag{5.13}$$

По условиям $(f.1)$ и $(\chi.1)$ отображения f и χ непрерывны. По утверждению 1 множество G компактно. Поэтому существует такое число $\nu(\varepsilon) > 0$, что для всех $(t, w[\cdot]), (\xi, r[\cdot]) \in G$: $|t - \xi| \leq \nu(\varepsilon)$, $\|w[\cdot] - r[\cdot]\|_C \leq \nu(\varepsilon)$, при всех $u \in \mathbb{U}$, $v \in \mathbb{V}$ имеет место неравенство

$$\big\| f\big(t, w[\cdot], u, v\big) - f\big(\xi, r[\cdot], u, v\big) \big\| + \big| \chi\big(t, w[\cdot], u, v\big) - \chi\big(\xi, r[\cdot], u, v\big) \big| \leq \varepsilon / \big(8(R_1 + R_2(\varepsilon))\big). \tag{5.14}$$

Положим

$$\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) = \min\big\{ \varepsilon / (32\overline{\beta}^2), \nu(\varepsilon), \nu(\varepsilon)/R \big\}. \tag{5.15}$$

Оценим производную $\mathcal{V}(t, x_t[\cdot], z_t[\cdot], \hat{x}[t] - \hat{z}[t])$ при $t \in [\tau_*, \tau^*]$. Из (1.1), (5.1) и (5.7) имеем

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{V}}{\mathrm{d}t}\big(t, x_t[\cdot], z_t[\cdot], \hat{x}[t] - \hat{z}[t]\big) = 2\big\langle f\big(t, x_t[\cdot], u^\circ, v[t]\big) - f\big(t, x_t[\cdot], p[t], q^\circ\big),\, s\big(t, x_t[\cdot], z_t[\cdot]\big) \big\rangle$$

$$+ 2\Big(\chi\big(t, x_t[\cdot], u^\circ, v[t]\big) - \chi\big(t, x_t[\cdot], p[t], q^\circ\big) \Big) \big(\hat{x}[t] - \hat{z}[t]\big).$$

По утверждению 1 в силу соотношений (5.6) и (5.15) выводим

$$\big\|x_t[\cdot]-x_{\tau_*}[\cdot]\big\|\le R|t-\tau_*|\le\delta_1\le\nu(\varepsilon),\quad t\in[\tau_*,\tau^*],$$

а стало быть, оценки (5.14) выполняются при $\xi=\tau_*$, $w[\cdot]=x_t[\cdot]$ и $r[\cdot]=x_{\tau_*}[\cdot]$. Таким образом, пользуясь неравенствами (5.10) и (5.13), получаем

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{V}}{\mathrm{d}t}\big(t,x_t[\cdot],z_t[\cdot],\hat{x}[t]-\hat{z}[t]\big)\le 2\big\langle f\big(\tau_*,x_{\tau_*}[\cdot],u^\circ,v[t]\big)-f\big(\tau_*,x_{\tau_*}[\cdot],p[t],q^\circ\big),\ s\big(t,x_t[\cdot],z_t[\cdot]\big)\big\rangle$$
$$+\,2\Big(\chi\big(\tau_*,x_{\tau_*}[\cdot],u^\circ,v[t]\big)-\chi\big(\tau_*,x_{\tau_*}[\cdot],p[t],q^\circ\big)\Big)\big(\hat{x}[t]-\hat{z}[t]\big)+\varepsilon/2.$$

Из равенств (1.1) и (5.1), (5.2), с учетом утверждения 1 и оценки (4.1) имеем

$$\big\|s\big(t,x_t[\cdot],z_t[\cdot]\big)-s\big(\tau_*,x_{\tau_*}[\cdot],z_*[\cdot]\big)\big\|\le 2\overline{\beta}|t-\tau_*|,\quad \big|\big(\hat{x}[t]-\hat{z}[t]\big)-\big(\hat{x}[\tau_*]-\hat{z}_*\big)\big|\le 2\overline{\beta}|t-\tau_*|.$$

Тогда из соотношений (4.1), (5.6) и (5.15), учитывая затем условия (f,χ) и (5.7), заключаем

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{V}}{\mathrm{d}t}\big(t,x_t[\cdot],z_t[\cdot],\hat{x}[t]-\hat{z}[t]\big)\le 2\big\langle f\big(\tau_*,x_{\tau_*}[\cdot],u^\circ,v[t]\big)-f\big(\tau_*,x_{\tau_*}[\cdot],p[t],q^\circ\big),\ s\big(\tau_*,x_{\tau_*}[\cdot],z_*[\cdot]\big)\big\rangle$$
$$+\,2\Big(\chi\big(\tau_*,x_{\tau_*}[\cdot],u^\circ,v[t]\big)-\chi\big(\tau_*,x_{\tau_*}[\cdot],p[t],q^\circ\big)\Big)\big(\hat{x}[\tau_*]-\hat{z}_*\big)+\varepsilon$$
$$\le 2\max_{v\in\mathbb{V}}\Big(\big\langle f\big(\tau_*,x_{\tau_*}[\cdot],u^\circ,v\big),\ s\big(\tau_*,x_{\tau_*}[\cdot],z_*[\cdot]\big)\big\rangle+\chi\big(\tau_*,x_{\tau_*}[\cdot],u^\circ,v\big)\big(\hat{x}[\tau_*]-\hat{z}_*\big)\Big)$$
$$-\,2\min_{u\in\mathbb{U}}\Big(\big\langle f\big(\tau_*,x_{\tau_*}[\cdot],u,v^\circ\big),\ s\big(\tau_*,x_{\tau_*}[\cdot],z_*[\cdot]\big)\big\rangle+\chi\big(\tau_*,x_{\tau_*}[\cdot],u,q^\circ\big)\big(\hat{x}[\tau_*]-\hat{z}_*\big)\Big)+\varepsilon=\varepsilon,$$

откуда с учетом неравенства (5.8) получаем оценку (5.9). Лемма доказана.

Пусть $(t,w[\cdot])\in G$ и $\varepsilon>0$. Через $W(t,w[\cdot],\varepsilon)$ обозначим множество пар $(r[\cdot],\eta)\in C\times\mathbb{R}$, для которых выполнены условия:

$(w.1)$ Справедливо включение $(t,r[\cdot])\in\overline{G}$.

$(w.2)$ Для функционала $\mathcal{V}$, определенного в (5.3), справедливо неравенство

$$\mathcal{V}\big(t,w[\cdot],r[\cdot],\eta\big)\le\epsilon(t).$$

$(w.3)$ Имеет место оценка

$$\big\|w[\cdot]-r[\cdot]\big\|_C^2\le\lambda\epsilon(t),\quad \lambda=1/(1-\alpha_g)^2.$$

Здесь $\epsilon(t)$ определено согласно (5.5).

Лемма 2. *Пусть задано число $\varepsilon>0$, и число $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0$ выбрано в согласии с леммой* 1. *Пусть в условиях леммы* 1 *дополнительно выполняется включение*

$$\big(z_*[\cdot],\hat{x}[\tau_*]-\hat{z}_*\big)\in W\big(\tau_*,x_{\tau_*}[\cdot],\varepsilon\big).\tag{5.16}$$

Тогда

$$\big(z_t[\cdot],\hat{x}[t]-\hat{z}[t]\big)\in W\big(t,x_t[\cdot],\varepsilon\big),\quad t\in[\tau_*,\tau^*].\tag{5.17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Включение (5.16) означает

$$(\tau_*,z_*[\cdot])\in\overline{G},\quad \mathcal{V}\big(\tau_*,x_{\tau_*}[\cdot],z_*[\cdot],\hat{x}[\tau_*]-\hat{z}_*\big)\le\epsilon(\tau_*),\quad \big\|x_{\tau_*}[\cdot]-z_*[\cdot]\big\|_C^2\le\lambda\epsilon(\tau_*).\tag{5.18}$$

Пусть $t\in[\tau_*,\tau^*]$. Для доказательства леммы достаточно показать, что

$$(t,z_t[\cdot])\in\overline{G},\quad \mathcal{V}\big(t,x_t[\cdot],z_t[\cdot],\hat{x}[t]-\hat{z}[t]\big)\le\epsilon(t),\quad \big\|x_t[\cdot]-z_t[\cdot]\big\|_C^2\le\lambda\epsilon(t).\tag{5.19}$$

Включение в (5.19) вытекает из включения в (5.18) в силу утверждения 3. Первое из неравенств в (5.19) следует из аналогичного неравенства в (5.18) в силу леммы 1.

Докажем второе из неравенств в (5.19). По определению (5.3) функционала $\mathcal{V}$, принимая во внимание условие $(g.1)$, имеем

$$\big\|x[\xi]-z[\xi]\big\| \le \sqrt{\mathcal{V}\big(\xi, x_\xi[\cdot], z_\xi[\cdot], \hat{x}[\xi]-\hat{z}[\xi]\big)} + \alpha_g \big\|x_\xi[\cdot]-z_\xi[\cdot]\big\|_C, \quad \xi \in [\tau_*, t]. \tag{5.20}$$

Далее, по определению числа λ в условии $(w.3)$, принимая во внимание второе из неравенств в (5.18) вместе с первым из неравенств (5.19), получаем

$$\max\Big\{\max_{\xi\in[\tau_*,t]}\big\|x[\xi]-z[\xi]\big\|, \sqrt{\lambda\epsilon(\tau_*)}\Big\} \le \sqrt{\epsilon(t)} + \alpha_g \max\Big\{\max_{\xi\in[\tau_*,t]}\big\|x[\xi]-z[\xi]\big\|, \sqrt{\lambda\epsilon(\tau_*)}\Big\},$$

откуда заключаем $\big\|x[t]-z[t]\big\| \le \dfrac{1}{1-\alpha_g}\sqrt{\epsilon(t)} = \sqrt{\lambda\epsilon(t)}$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Существует такое число $\kappa > 0$, что справедливо следующее утверждение.*

Пусть $(t_*, x_*[\cdot]) \in G$, $(\tau_*, y_*[\cdot]) \in \overline{G}$, $\tau_* \ge t_*$, $\hat{y}_* \in \mathbb{R}$ и $\tau^* \in (\tau_*, \vartheta]$. Пусть движение $x[t_*-h[\cdot]\vartheta]$ системы (1.1) *порождено из позиции $(t_*, x_*[\cdot])$ допустимыми реализациями $u[t_*[\cdot]\vartheta)$ и $v[t_*[\cdot]\vartheta)$, а движение $y[\tau_*-h[\cdot]\tau^*]$ системы* (4.3) *порождено из позиции $(\tau_*, y_*[\cdot])$ допустимыми реализациями $p[\tau_*[\cdot]\tau^*)$ и $q[\tau_*[\cdot]\tau^*)$. Тогда для движения $z[\tau_*-h[\cdot]\tau^*]$ системы* (5.1), *порожденного из позиции $(\tau_*, z_*[\cdot]=y_*[\cdot])$ теми же реализациями $p[\tau_*[\cdot]\tau^*)$, $q[\tau_*[\cdot]\tau^*)$ и движением $x[t_*-h[\cdot]\vartheta]$, справедливо неравенство*

$$\big\|z[t]-y[t]\big\| + \big|\hat{z}[t]-\hat{y}[t]\big| \le \kappa\,(\tau^*-\tau_*) \max_{\xi\in[\tau_*,\tau^*]} \big\|x_\xi[\cdot]-z_\xi[\cdot]\big\|_C, \quad t\in[\tau_*,\tau^*], \tag{5.21}$$

где значение $\hat{y}[t]$ определено согласно (4.4), *а значение $\hat{z}[t]$ — согласно* (5.2) *при $\hat{z}_* = \hat{y}_*$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу равенств (4.3), (5.1) и условия $(g.1)$ имеем

$$\big\|z[t]-y[t]\big\| = \big\|z[t]-g\big(t,z_t[\cdot]\big)-y[t]+g\big(t,y_t[\cdot]\big)\big\| + \big\|g\big(t,z_t[\cdot]\big)-g\big(t,y_t[\cdot]\big)\big\| \tag{5.22}$$

$$\le \int_{\tau_*}^{t} \big\|f\big(\xi,x_\xi[\cdot],p[\xi],q[\xi]\big)-f\big(\xi,y_\xi[\cdot],p[\xi],q[\xi]\big)\big\|\mathrm{d}\xi + \alpha_g \max_{\xi\in[\tau_*,t]}\big\|z[\xi]-y[\xi]\big\|, \quad t\in[\tau_*,\tau^*].$$

С учетом утверждений 1, 2 и условия $(f.2)$, полагая

$$D_1 = \big\{w[\cdot]\in C \mid \big(t,w[\cdot]\big)\in G\cup\overline{G},\ t\in[t_0,\vartheta]\big\}, \quad \alpha_f = \alpha_f\big(D_1\big), \quad \alpha_1 = \alpha_f/(1-\alpha_g),$$

из оценки (5.22) выводим

$$\max_{\xi\in[\tau_*,t]}\big\|z[\xi]-y[\xi]\big\| \le \alpha_1\int_{\tau_*}^{t}\big\|x_\xi[\cdot]-y_\xi[\cdot]\big\|_C\mathrm{d}\xi \le \alpha_1\int_{\tau_*}^{t}\big\|x_\xi[\cdot]-z_\xi[\cdot]\big\|_C\mathrm{d}\xi + \alpha_1\int_{\tau_*}^{t}\big\|z_\xi[\cdot]-y_\xi[\cdot]\big\|_C\mathrm{d}\xi$$

$$\le \alpha_1(\tau^*-\tau_*)\max_{\xi\in[\tau_*,\tau^*]}\big\|x_\xi[\cdot]-z_\xi[\cdot]\big\|_C + \alpha_1\int_{\tau_*}^{t}\max_{\mu\in[\tau_*,\xi]}\big\|z[\mu]-y[\mu]\big\|\mathrm{d}\xi, \quad t\in[\tau_*,\tau^*],$$

откуда по лемме Гроноулла — Беллмана [12, с. 43] получаем

$$\max_{\xi\in[\tau_*,t]}\big\|z[\xi]-y[\xi]\big\| \le \alpha_2(\tau^*-\tau_*)\max_{\xi\in[\tau_*,\tau^*]}\big\|x_\xi[\cdot]-z_\xi[\cdot]\big\|_C, \quad t\in[\tau_*,\tau^*], \quad \alpha_2 = \alpha_1 e^{\alpha_1(\vartheta-t_0)}. \tag{5.23}$$

Далее, используя условие $(\chi.2)$ при $\alpha_\chi = \alpha_\chi(D_1)$ и неравенство (5.23), для $t\in[\tau_*,\tau^*]$ выводим

$$\big|\hat{z}[t]-\hat{y}[t]\big| \le \int_{\tau_*}^{t}\big|\chi\big(\xi,x_\xi[\cdot],p[\xi],q[\xi]\big)-\chi\big(\xi,y_\xi[\cdot],p[\xi],q[\xi]\big)\big|\mathrm{d}\xi \le \alpha_\chi(\tau^*-\tau_*)\max_{\xi\in[\tau_*,\tau^*]}\big\|x_\xi[\cdot]-z_\xi[\cdot]\big\|_C$$

$$+\,\alpha_\chi(\tau^*-\tau_*)\max_{\xi\in[\tau_*,t]}\big\|z[\xi]-y[\xi]\big\| \le \alpha_\chi(1+(\vartheta-t_0)\alpha_2)(\tau^*-\tau_*)\max_{\xi\in[\tau_*,\tau^*]}\big\|x_\xi[\cdot]-z_\xi[\cdot]\big\|_C. \tag{5.24}$$

Положим $\kappa = \alpha_2+\alpha_\chi(1+(\vartheta-t_0)\alpha_2)$. Тогда из (5.23) и (5.24) получаем (5.21). Лемма доказана.

6. Цена игры и оптимальные стратегии

Следуя идеологии метода экстремального сдвига на сопутствующие точки (см., например, [6, с. 210], а также [10]), определим следующую стратегию управления первого игрока:

$$U^* = U^*\big(t, w[\cdot], \varepsilon\big) \in \operatorname*{argmin}_{u\in\mathbb{U}} \max_{v\in\mathbb{V}} \Big(\big\langle f\big(t, w[\cdot], u, v\big),\ s\big(t, w[\cdot], r^u[\cdot]\big)\big\rangle + \chi\big(t, w[\cdot], u, v\big)\eta^u\Big), \qquad (6.1)$$

$$\big(t, w[\cdot]\big) \in G, \quad \varepsilon > 0.$$

Здесь величина s взята из (5.4), а сопутствующая точка $(r^u[\cdot], \eta^u)$ выбирается по величине (4.5) согласно правилу

$$\big(r^u[\cdot], \eta^u\big) = \big(r^u(t, w[\cdot], \varepsilon)[\cdot], \eta^u(t, w[\cdot], \varepsilon)\big) \in \operatorname*{argmin}_{(r[\cdot],\eta)\in W(t,w[\cdot],\varepsilon)} \rho\big(t, r[\cdot], -\eta\big), \qquad (6.2)$$

где множество $W(t, w[\cdot], \varepsilon)$ определяется условиями $(w.1)$–$(w.3)$.

Лемма 4. *Имеет место неравенство*

$$\rho_u\big(U^*; t_*, x_*[\cdot]\big) \le \rho\big(t_*, x_*[\cdot], 0\big), \quad \big(t_*, x_*[\cdot]\big) \in G.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению (3.3) величины $\rho_u(U^*; t_*, x_*[\cdot])$ для доказательства леммы достаточно показать, что для любого числа $\zeta > 0$ найдутся такие число $\varepsilon_* = \varepsilon_*(\zeta) > 0$ и функция $\delta_*(\varepsilon) = \delta_*(\zeta, \varepsilon) > 0$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$, что, каковы бы ни были позиция $(t_*, x_*[\cdot]) \in G$, числа $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$ и $0 < \delta < \delta_*(\varepsilon)$, разбиение Δ_δ из (3.1) и допустимая реализация $v[t_*[\cdot]\vartheta)$, для движения $x[t_* - h[\cdot]\vartheta]$ системы (1.1), порожденного из позиции $(t_*, x_*[\cdot])$ законом управления $\{U^*, \varepsilon, \Delta_\delta\}$ по правилу (3.2) и реализацией $v[t_*[\cdot]\vartheta)$, справедливо неравенство

$$\gamma\big(t_*, x_*[\cdot]; U^*, \varepsilon, \Delta_\delta; v[t_*[\cdot]\vartheta)\big) = \sigma\big(x_\vartheta[\cdot]\big) + \int\limits_{t_*}^{\vartheta} \chi\big(\xi, x_\xi[\cdot], u[\xi], v[\xi]\big)\,\mathrm{d}\tau \le \rho\big(t_*, x_*[\cdot], 0\big) + \zeta. \qquad (6.3)$$

Взяв константы α_ρ, λ и κ из условий $(\rho.3)$, $(w.3)$ и леммы 3 соответственно, обозначим

$$\kappa_1 = 1 + \alpha_\rho\kappa\sqrt{\lambda(1 + \vartheta - t_0)}, \quad \kappa_2 = \kappa_1(\vartheta - t_0) + \alpha_\rho(\sqrt{\lambda} + 1)\sqrt{1 + \vartheta - t_0}. \qquad (6.4)$$

Пусть

$$0 < \varepsilon \le \varepsilon_* = (\zeta/\kappa_2)^2, \quad 0 < \delta \le \delta_*(\varepsilon) = \delta_1(\varepsilon), \qquad (6.5)$$

где $\delta_1(\varepsilon)$ выбрано в согласии с леммами 1, 2. Докажем неравенство

$$\rho\big(\tau_j, r_j^u[\cdot], \hat{x}[\tau_j] - \eta_j^u\big) \le \rho\big(t_*, x_*[\cdot], 0\big) + \kappa_1\sqrt{\varepsilon}(\tau_j - t_0), \quad j = \overline{1, J}, \qquad (6.6)$$

где в согласии с (6.2) полагаем $r_j^u[\cdot] = r^u(\tau_j, x_{\tau_j}[\cdot], \varepsilon)[\cdot]$, $\eta_j^u = \eta^u(\tau_j, x_{\tau_j}[\cdot], \varepsilon)$, а значение $\hat{x}[\tau_j]$ определяется по формуле (5.2).

При $j = 1$ в силу (3.1), (5.2) и (6.2), учитывая, что $(x_*[\cdot], 0) \in W(t_*, x_*[\cdot], \varepsilon)$, имеем

$$\rho\big(\tau_1, r_1^u[\cdot], \hat{x}[\tau_1] - \eta_1^u\big) = \rho\big(t_*, r^u(t_*, x_*[\cdot], \varepsilon)[\cdot], -\eta^u(t_*, x_*[\cdot], \varepsilon)\big) \le \rho\big(t_*, x_*[\cdot], 0\big).$$

Пусть неравенство (6.6) справедливо при $j = k$. Докажем его при $j = k + 1$. Положим

$$\tau_* = \tau_k, \quad \tau^* = \tau_{k+1}, \quad y_*[\cdot] = z_*[\cdot] = r_k^u[\cdot], \quad \hat{y}_* = \hat{z}_* = \hat{x}[\tau_k] - \eta_k^u. \qquad (6.7)$$

Пусть движение $y[\tau_* - h[\cdot]\tau^*]$ системы (4.3) порождено из позиции $(\tau_*, y_*[\cdot])$ реализациями $p[\tau_*[\cdot]\tau^*)$ и $q[\tau_*[\cdot]\tau^*)$, где $q[\tau_*[\cdot]\tau^*)$ строится согласно правилу (5.7), а $p[\tau_*[\cdot]\tau^*)$ выбирается из условия $(\rho.4^u)$. Пусть движение $z[\tau_* - h[\cdot]\tau^*]$ системы (5.1) порождено из позиции $(\tau_*, z_*[\cdot])$ теми же реализациями $p[\tau_*[\cdot]\tau^*)$, $q[\tau_*[\cdot]\tau^*)$ и движением $x[t_* - h[\cdot]\vartheta]$. По определению (6.1) стратегии U^* и в силу соотношения (3.2) реализация $u[t_*[\cdot]\vartheta)$ удовлетворяет условию (5.7). В согласии с (6.2) выполняется условие (5.16). Таким образом, по лемме 2 справедливо включение (5.17). Пользуясь этим включением, с учетом условий (ρ.2) и (6.2) выводим

$$\rho\big(\tau^*, r^u_{k+1}[\cdot], \hat{x}[\tau^*] - \eta^u_{k+1}\big) \leq \rho\big(\tau^*, z_{\tau^*}[\cdot], \hat{z}[\tau^*]\big). \tag{6.8}$$

Кроме того, согласно условию (w.3) имеем $\big\|x_t[\cdot] - z_t[\cdot]\big\|_C \leq \sqrt{\lambda\epsilon(\tau^*)} \leq \sqrt{\lambda\epsilon(\vartheta)}$, $t \in [\tau_*, \tau^*]$, откуда, опираясь на условие (ρ.3) и лемму 3, получаем

$$\rho\big(\tau^*, z_{\tau^*}[\cdot], \hat{z}[\tau^*]\big) \leq \rho\big(\tau^*, y_{\tau^*}[\cdot], \hat{y}[\tau^*]\big) + \alpha_\rho \kappa\,(\tau^* - \tau_*)\sqrt{\lambda\epsilon(\vartheta)}. \tag{6.9}$$

Объединяя неравенства (4.6), (6.8) и (6.9), и учитывая определение (5.5) функции $\epsilon(t)$ и выбор (6.4) числа κ_1, приходим к оценке

$$\rho\big(\tau^*, r^u_{k+1}[\cdot], \hat{x}[\tau^*] - \eta^u_{k+1}\big) \leq \rho\big(\tau_*, y_*[\cdot], \hat{y}_*\big) + \kappa_1\sqrt{\varepsilon}(\tau^* - \tau_*).$$

Отсюда, учитывая неравенство (6.6) при $j = k$ и обозначения (6.7), заключаем, что неравенство (6.6) справедливо и при $j = k+1$. Итак, неравенство (6.6) доказано для всех $j = \overline{1, J}$.

Из неравенства (6.6) при $j = J$, пользуясь условиями (ρ.3), (w.2), (w.3) и определением (6.4) числа κ_2, выводим

$$\rho\big(\vartheta, x_\vartheta[\cdot], \hat{x}[\vartheta]\big) \leq \rho\big(\vartheta, r^u_J[\cdot], \hat{x}[\vartheta] - \eta^u_J\big) + \alpha_\rho\Big(\big\|x_\vartheta[\cdot] - r^u_J[\cdot]\big\|_C + \big|\eta^u_J\big|\Big) \leq \rho\big(t_*, x_*[\cdot], 0\big) + \kappa_2\sqrt{\varepsilon},$$

и далее с учетом обозначения (5.2) и условий (ρ.1), (ρ.2) получаем

$$\sigma\big(x_\vartheta[\cdot]\big) + \int\limits_{t_*}^{\vartheta} \chi\big(\xi, x_\xi[\cdot], u[\xi], v[\xi]\big)\,\mathrm{d}\xi = \sigma\big(x_\vartheta[\cdot]\big) + \hat{x}[\vartheta] = \rho\big(\vartheta, x_\vartheta[\cdot], \hat{x}[\vartheta]\big) \leq \rho\big(t_*, x_*[\cdot], 0\big) + \kappa_2\sqrt{\varepsilon}.$$

Отсюда, принимая во внимание выбор (6.5) числа ε, приходим к оценке (6.3). Лемма доказана.

Рассмотрим экстремальную стратегию управления второго игрока

$$V^* = V^*\big(t, w[\cdot], \varepsilon\big) \in \operatorname*{argmax}_{v\in\mathbb{V}} \min_{u\in\mathbb{U}} \Big(\big\langle f\big(t, w[\cdot], u, v\big),\, s\big(t, r^v[\cdot], w[\cdot]\big)\big\rangle + \chi\big(t, w[\cdot], u, v\big)\eta^v\Big), \tag{6.10}$$

$$\big(r^v[\cdot], \eta^v\big) = \big(r^v(t, w[\cdot], \varepsilon)[\cdot], \eta^v(t, w[\cdot], \varepsilon)\big) \in \operatorname*{argmax}_{(r[\cdot],\eta)\in W(t,w[\cdot],\varepsilon)} \rho\big(t, r[\cdot], \eta\big), \quad \big(t, w[\cdot]\big) \in G, \quad \varepsilon > 0.$$

Лемма 5. *Имеет место неравенство*

$$\rho_v\big(V^*; t_*, x_*[\cdot]\big) \geq \rho\big(t_*, x_*[\cdot], 0\big), \quad \big(t_*, x_*[\cdot]\big) \in G.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о этой леммы по сути повторяет доказательство леммы 4. При этом требуется должным образом модифицировать леммы 1, 2 и вместо условия ($\rho.4^u$) воспользоваться условием ($\rho.4^v$).

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы. Из определений (3.4) и (3.6) оптимальных гарантированных результатов, в силу неравенства (3.7) и лемм 4, 5 выводим цепочку неравенств

$$\rho^\circ_u\big(t_*, x_*[\cdot]\big) \leq \rho_u\big(U^*; t_*, x_*[\cdot]\big) \leq \rho\big(t_*, x_*[\cdot], 0\big) \leq \rho_v\big(V^*; t_*, x_*[\cdot]\big) \leq \rho^\circ_v\big(t_*, x_*[\cdot]\big) \leq \rho^\circ_u\big(t_*, x_*[\cdot]\big),$$

которая доказывает справедливость равенства (3.8) и оптимальность стратегий U^* и V^*.

Теорема доказана.

Отметим, что в работе не только установлено, что дифференциальная игра (1.1), (2.1) имеет цену и седловую точку в классе позиционных стратегий, но и указана подходящая модификация (6.1), (6.10) метода экстремального сдвига [6] для конфликтно-управляемых систем нейтрального типа (1.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. **Осипов Ю.С.** К теории дифференциальных игр систем с последействием // Прикл. математика и механика. 1971. Т. 35, вып. 2. С. 300–311.
4. **Осипов Ю.С.** Позиционное управление в параболических системах // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, вып. 2. С. 195–201.
5. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
6. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 516 с.
7. **Hale J.K., Cruz M.A.** Existence, uniqueness and continuous dependence for hereditary systems // Ann. Mat. Pura Appl. 1970. Vol. 85, no. 1. P. 63–81.
8. **Кряжимский А.В.** К теории позиционных дифференциальных игр сближения — уклонения // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239, вып. 4. С. 779–782.
9. **Кряжимский А.В.** Об устойчивом позиционном управлении в дифференциальных играх // Прикл. математика и механика. 1978. Т. 42, вып. 6. С. 963–968.
10. **Максимов В.И.** Дифференциальная игра наведения для систем с отклоняющимся аргументом нейтрального типа // Задачи динамического управления: сб. ст. / УНЦ АН СССР. Свердловск, 1981. С. 33–45.
11. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 225 с.
12. **Беллман Р., Кук К.Л.** Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.

Гомоюнов Михаил Игоревич
научный сотрудник
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина
e-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com

Поступила 25.12.2015

Лукоянов Николай Юрьевич
д-р физ.-мат. наук,
директор
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина
e-mail: nyul@imm.uran.ru

Плаксин Антон Романович
ведущий математик
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина
e-mail: a.r.plaksin@gmail.com