ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 1 2016

УДК 519.172.4

О $K_{1,3}$-СВОБОДНЫХ ТОЧНЫХ ГРАФАХ ДЕЗА

А. В. Митянина

Графом Деза с параметрами (v,k,b,a) называется регулярный граф на v вершинах степени k такой, что для любых двух его вершин число их общих соседей равно или b, или a. В настоящей работе дано описание точных графов Деза, которые не содержат в качестве порожденных подграфов граф $K_{1,3}$ и являются объединением замкнутых окрестностей двух несмежных вершин. Последнее условие другими словами означает, что в графе найдутся две несмежные вершины, для которых нет третьей вершины, несмежной с ними обеими.

Ключевые слова: $K_{1,3}$-свободные графы, графы Деза.

A. V. Mityanina. On $K_{1,3}$-free strictly Deza graphs.

A Deza graph with parameters (v,k,b,a) is a k-regular graph with v vertices where any two vertices have either a or b common neighbors. We describe strict Deza graphs that do not contain $K_{1,3}$ among their induced subgraphs and are unions of closed neighborhoods of two nonadjacent vertices. The latter condition means that there are two nonadjacent vertices such that any other vertex is adjacent to at least one of them.

Keywords: $K_{1,3}$-free graphs, strictly Deza graphs.

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [1].

Все рассматриваемые графы являются неориентированными, без петель и кратных ребер. Смежность между вершинами графа u и w будем обозначать через $u \sim w$. *Порожденным подграфом* графа G называется подграф, вершины которого смежны тогда и только тогда, когда они смежны в графе G. Обозначим через $[w]$ множество всех соседей вершины w (а также подграф, порожденный на этом множестве вершин) и назовем $[w]$ *окрестностью вершины* w, а число $|[w]|$ — *степенью вершины* w. Обозначим через $w^{\perp}$ подграф на множестве вершин $[w] \cup \{w\}$ и назовем $w^{\perp}$ *замкнутой* окрестностью вершины w. Вполне несвязный граф на n вершинах будем называть *n-кокликой*.

В дальнейшем граф и множество его вершин часто будем обозначать одинаково, если это не приводит к противоречию.

Граф G называется *регулярным*, если степени всех его вершин одинаковы. Граф называется *сильно регулярным*, если он регулярный и для любых различных его вершин u и w для некоторых констант λ, μ имеем $|[u] \cap [w]| = \lambda$, если $u \sim w$, и $|[u] \cap [w]| = \mu$ в противном случае. Граф G называется *(v,k,b,a)-графом Деза* $(0 \le a \le b \le k < v)$, если он содержит точно v вершин, является регулярным графом степени k и существуют такие константы b и a $(b > a)$, что любые различные вершины $u, w \in G$ имеют либо b, либо a общих соседей. Легко заметить, что класс графов Деза включает в себя класс сильно регулярных графов. Если граф Деза не является сильно регулярным и имеет диаметр 2, его называют *точным графом Деза.*

Систематическое изучение точных графов Деза предпринято в статье пяти авторов [2]. В частности, в этой работе дается полный перечень точных графов Деза с количеством вершин, не превышающим 13. Изучение $K_{1,3}$-свободных графов Деза начато автором в статье [3] и продолжено в [4].

В дальнейшем нам понадобится следующее

Утверждение (Erickson et al. [2]). Пусть G является (v,k,b,a)-графом Деза. Определим для вершины u следующие параметры:

$$\alpha = |\{w \in G\colon |[u] \cap [w]| = a\}|, \quad \beta = |\{w \in G\colon |[u] \cap [w]| = b\}|.$$

Тогда α и β не зависят от выбора вершины u и находятся по формулам

$$\alpha = \begin{cases} \dfrac{b(v-1)-k(k-1)}{b-a}, & \text{если } a \neq b; \\ \dfrac{k(k-1)}{a}, & \text{если } a = b, \end{cases} \qquad \beta = \begin{cases} \dfrac{a(v-1)-k(k-1)}{a-b}, & \text{если } a \neq b; \\ \dfrac{k(k-1)}{a}, & \text{если } a = b. \end{cases}$$

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть граф G является точным графом Деза с параметрами (v, k, b, a), где $v > k \geq b > a \geq 0$, и удовлетворяет следующим условиям:*

1) *G является $K_{1,3}$-свободным;*

2) *G содержит 3-коклику;*

3) *G является объединением замкнутых окрестностей некоторых двух несмежных вершин.*

Тогда он имеет параметры $(9, 4, 2, 1)$ или $(12, 6, 3, 2)$.

Перед доказательством теоремы введем некоторые обозначения и сформулируем и докажем две леммы. Пусть граф G удовлетворяет условию теоремы, т. е. является точным графом Деза с параметрами (v, k, b, a), $v > k \geq b > a \geq 0$, $K_{1,3}$-свободный и содержит следующие наборы вершин: несмежные вершины u и w графа G такие, что $G = u^\perp \cup w^\perp$; попарно несмежные вершины x, y, z. Докажем две леммы для такого графа.

Лемма 1. *Если граф удовлетворяет условию теоремы, то для него верны следующие утверждения:*

1. *Параметр $k \in \{2b, 2b+1, 2b+2\}$.*
2. *$|u^\perp \cap w^\perp| = a$.*
3. *$|x^\perp \cap y^\perp| = |x^\perp \cap z^\perp| = |y^\perp \cap z^\perp| = b$.*

Доказательство. Поскольку граф G имеет параметры (v, k, b, a) и является объединением замкнутых окрестностей двух несмежных вершин u и w, то $v = 2k+2-|u^\perp \cap w^\perp|$, где $|u^\perp \cap w^\perp| \in \{a, b\}$. С другой стороны, граф G имеет диаметр 2 и содержит попарно несмежные вершины x, y, z, значит, $|x^\perp \cap y^\perp| \neq 0$, $|x^\perp \cap z^\perp| \neq 0$ и $|y^\perp \cap z^\perp| \neq 0$. Заметим, что $|x^\perp \cap y^\perp \cap z^\perp| = 0$, поскольку по условию теоремы граф G является $K_{1,3}$-свободным. Обозначим через G_{xyz} множество вершин подграфа $G \setminus (x^\perp \cup y^\perp \cup z^\perp)$. Тогда

$$v = 3 + 3k - |x^\perp \cap y^\perp| - |x^\perp \cap z^\perp| - |y^\perp \cap z^\perp| + |G_{xyz}|.$$

Согласно указанным выше соотношениям для v получаем равенство

$$2k + 2 - |u^\perp \cap w^\perp| = 3 + 3k - |x^\perp \cap y^\perp| - |x^\perp \cap z^\perp| - |y^\perp \cap z^\perp| + |G_{xyz}|,$$

откуда

$$k = |x^\perp \cap y^\perp| + |x^\perp \cap z^\perp| + |y^\perp \cap z^\perp| - 1 - |G_{xyz}| - |u^\perp \cap w^\perp|.$$

Рассмотрим вершину x графа G, для которой выполняется соотношение $k \geq |x^\perp \cap y^\perp| + |x^\perp \cap z^\perp|$. Учитывая данное неравенство, имеем

$$|x^\perp \cap y^\perp| + |x^\perp \cap z^\perp| + |y^\perp \cap z^\perp| - 1 - |G_{xyz}| - |u^\perp \cap w^\perp| \geq |x^\perp \cap y^\perp| + |x^\perp \cap z^\perp|,$$

$$|y^\perp \cap z^\perp| \geq |u^\perp \cap w^\perp| + 1 + |G_{xyz}|.$$

Если вершины u и w графа G имеют ровно b общих соседей, тогда для $|y^\perp \cap z^\perp|$ получаем противоречие с параметрами графа G, следовательно $|u^\perp \cap w^\perp| = a$. Аналогично приведенным выше рассуждениям для вершин x, y, z графа G выводим соотношения

$$|x^\perp \cap y^\perp| \geq a + 1 + |G_{xyz}|, \quad |x^\perp \cap z^\perp| \geq a + 1 + |G_{xyz}|, \quad |y^\perp \cap z^\perp| \geq a + 1 + |G_{xyz}|.$$

Легко понять, что $|x^\perp \cap y^\perp| = |x^\perp \cap z^\perp| = |y^\perp \cap z^\perp| = b$ и, соответственно, $k = 3b - a - 1 - |G_{xyz}|$ и $k \geq 2b$.

Ввиду того, что граф G является $K_{1,3}$-свободным, окрестность любой вершины графа G не может содержать более двух попарно несмежных вершин, с каждой из которых исходная вершина имеет не более b общих соседей. Но тогда получаем ограничение на параметр k графа G: $k \leq 2b + 2$. Следовательно, $k \in \{2b, 2b+1, 2b+2\}$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Попарно несмежные вершины x, y, z графа G не лежат в 4-коклике.*

Доказательство. Предположим обратное. Пусть для вершин x, y, z найдется такая вершина s графа G, которая будет попарно несмежна с каждой из них.

По условию теоремы граф G является $K_{1,3}$-свободным, а значит, окрестности вершин u и w графа G не могут содержать 3-коклику. Согласно этому, каждая из окрестностей содержит ровно две вершины из четверки x, y, z, s, при этом ни одна из четырех вершин не может лежать в $u^\perp \cap w^\perp$. Без ограничения общности будем считать, что вершины $x, y \in u^\perp \backslash w^\perp$ и $z, s \in w^\perp \backslash u^\perp$.

Заметим, что все общие соседи для вершин x и y также будут лежать в подграфе $u^\perp \backslash w^\perp$. В противном случае в графе G получаем подграф $K_{1,3}$ на вершинах x, y, w и вершине из непустого множества $x^\perp \cap y^\perp \cap w^\perp$, что противоречит условию теоремы. Согласно лемме 1 $|x^\perp \cap y^\perp| = b$, тогда множество вершин $[u] \backslash w^\perp$ содержит ровно $b - 1$ общего соседа для x и y. Аналогичны рассуждения для вершин z и s.

Вычислим количество общих соседей для несмежных вершин x и w. Предположим, что $|x^\perp \cap w^\perp| = a$. Тогда остальные $k - a$ соседей вершины x должны лежать в подграфе $u^\perp \backslash w^\perp$. Учитывая, что $x \sim u$ и $x, y \in u^\perp \backslash w^\perp$, получаем неравенство $|[u] \backslash w^\perp| \geq (k - a - 1) + 1 + 1$. Но это противоречит п. 3) леммы 1, согласно которому $|u^\perp \cap w^\perp| = a$, а значит, $|[u] \backslash w^\perp| = |[w] \backslash u^\perp| = k - a$. Следовательно, предположение неверно, $|x^\perp \cap w^\perp| = b$ и в подграфе $[u] \backslash w^\perp$ находится ровно $k - b - 1$ соседей вершины x. Аналогичны рассуждения для вершин y и u.

Согласно условию теоремы, в подграфе $[u] \backslash w^\perp$ могут быть ровно две вершины из множества $\{x, y, u, w\}$, например, без ограничения общности, x и y. При этом все остальные вершины в подграфе должны быть смежны не менее, чем с одной из них. В соответствии с этим можно вычислить количество вершин в подграфе $[u] \backslash w^\perp$:

$$|[u] \backslash w^\perp| = |[x] \backslash w^\perp| + |[y] \backslash w^\perp| - |[x] \cap [y]| + |\{x, y\}| = (k - b - 1) + (k - b - 1) - (b - 1) + 2 = 2k - 3b + 1.$$

С другой стороны $|[u] \backslash w^\perp| = k - a$. С учетом приведенных равенств получаем, что $k = 3b - a - 1$.

В ходе доказательства леммы 1 было установлено, что $k = 3b - a - 1 - |G_{xyz}|$. В соответствии с этим, $|G_{xyz}| = 0$, а значит, исходное предположение неверно, в графе G не содержится 4-коклик и параметр

$$v = 3 + 3k - |x^\perp \cap y^\perp| - |x^\perp \cap z^\perp| - |y^\perp \cap z^\perp| + |G_{xyz}| = 3 + 3k - 3b.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы будем проводить с учетом соотношений на парметры графа, полученных в леммах 1 и 2.

1. Предположим, что $k = 2b$, отсюда $b = a + 1, v = 3b + 3$. В соответствии с приведенным выше утверждением из [2] для графа G вычислим параметр α:

$$\alpha = \frac{b(3b+2) - 2b(2b-1)}{b - (b-1)} = 4b - b^2 = b(4 - b).$$

Получаем следующее соотношение для параметра b: $0 \leq b \leq 4$. Но при $b = 0$ или $b = 4$ параметр $\alpha = 0$, а значит, граф G является сильно регулярным графом, что противоречит условию теоремы. Следовательно, $b \in \{1, 2, 3\}$. Для данных значений параметра b получаем следующие наборы параметров графа G: $(6, 2, 1, 0), (9, 4, 2, 1), (12, 6, 3, 2)$ соответственно. Но согласно перечню точных графов Деза, приведенному в [2], не существует графа с параметрами $(6, 2, 1, 0)$.

2. Предположим, что $k = 2b+1$, отсюда $b = a+2, v = 3b+6$. Аналогично п. **1** для графа G вычислим параметр α:

$$\alpha = \frac{b(3b+5) - 2b(2b+1)}{b-(b-2)} = \frac{3b-b^2}{2} = \frac{b(3-b)}{2}.$$

Аналогично при $b = 0$ или $b = 3$ получаем противоречие с условием теоремы. Следовательно, $b \in \{1, 2\}$. Ввиду того, что параметр $a = b-2, a \geq 0$, получаем $b = 2$ и параметры $(12, 5, 2, 0)$ для графа G. Согласно статье [2] не существует точного графа Деза с параметрами $(12, 5, 2, 0)$.

3. Предположим, что $k = 2b+2$, отсюда $b = a+3, v = 3b+9$. Аналогично п. **1** для графа G вычислим параметр α:

$$\alpha = \frac{b(3b+8) - (2b+2)(2b+1)}{b-(b-3)} = \frac{-b^2+2b-2}{3}.$$

Для всех значений параметра $b \geq 0$ будем получать отрицательное значение для параметра α, что является недопустимым. Следовательно, не существует графа Деза, удовлетворяющего условию теоремы, с таким соотношением параметров.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Харари Ф.** Теория графов. М.: Мир, 1973. 300 с.
2. Deza graphs: a generalization of strongly regular graphs / M. Erickson [et al.] // J. Comb. Designs. 1999. Vol. 7. P. 359–405.
3. **Кабанов В.В., Митянина А.В.** Реберные точные графы Деза // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. С. 65–177.
4. **Митянина А.В.** О $K_{1,3}$-свободных графах Деза диаметра больше двух // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, №. 2. С. 238–241.

Митянина Анастасия Владимировна
преподаватель
Челябинский гос. университет
e-mail: nastya.mityanina@gmail.com

Поступила 05.12.2014