ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 1 2016

УДК 517.95

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕПЛА НА ПЛОСКОСТИ[1]

С. В. Захаров

Для уравнения теплопроводности на плоскости строится асимптотическое приближение решения задачи Коши на больших временах в случае, когда начальная функция на бесконечности имеет степенную асимптотику. Исследование асимптотического поведения решения рассматриваемой задачи помимо прямого приложения к процессам теплопроводности и диффузии представляет самостоятельный интерес для асимптотического анализа.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, задача Коши, асимптотика.

S. V. Zakharov. Asymptotic calculation of the heat distribution on a plane.

For the heat equation on a plane an asymptotic approximation of the solution of the Cauchy problem for large times is constructed in the case when the initial function at infinity has a power-like asymptotics. Investigation of the asymptotic behavior of the solution of the problem under consideration in addition to direct application to processes of heat conduction and diffusion has an independent interest for asymptotic analysis.

Keywords: heat equation, Cauchy problem, asymptotics.

1. Введение

Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности на плоскости с локально интегрируемой по Лебегу начальной функцией $\Lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ медленного роста:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \qquad t > 0, \tag{1.1}$$

$$u(x_1, x_2, 0) = \Lambda(x_1, x_2), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{1.2}$$

Единственное (в классе гладких функций медленного роста) решение этой задачи можно записать в виде свертки функции Λ с функцией Грина [1]:

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Lambda(s_1, s_2) \exp\left\{ -\frac{(s_1 - x_1)^2 + (s_2 - x_2)^2}{4t} \right\} ds_1 ds_2. \tag{1.3}$$

Исследование асимптотического поведения интеграла (1.3) помимо прямого приложения к физическим процессам теплопроводности и диффузии представляет самостоятельный интерес для асимптотического анализа, поскольку необходимость в решении подобных задач возникает при применении метода согласования [2].

Несмотря на внешнюю простоту интеграла (1.3) построение его равномерно пригодной асимптотики при независимом стремлении переменных к бесконечности не укладывается в рамки обычных методов [3]. Для решения уравнения теплопроводности на прямой $\mathbb{R}^1$ с начальной функцией, имеющей степенное поведение на бесконечности, равномерная асимптотика была найдена в работе [4] методом вспомогательного параметра, развитого А. Р. Данилиным при изучении задач теории оптимального управления [5; 6].

[1]Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 14-01-00322).

С помощью того же метода ниже будет построено асимптотическое разложение решения $u(x_1,x_2,t)$ задачи (1.1), (1.2) при $|x_1|+|x_2|+t\to\infty$ в предположении, что

$$\Lambda(x_1,x_2)=0,\quad x_1<0, \tag{1.4}$$

$$\Lambda(x_1,x_2)=x_1^p\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Lambda_n(x_2)}{x_1^n},\quad x_1\to+\infty, \tag{1.5}$$

где p — неотрицательное целое число, Λ_n — непрерывные функции. Кроме того, считаем, что

$$\begin{aligned}&\operatorname{supp}\Lambda\subset\{(x_1,x_2): x_1>0,\ |x_2|<|x_1|^\nu,\ \nu>0\},\\&\operatorname{supp}\Lambda_n\subset[-R_n,R_n],\ R_n>0.\end{aligned} \tag{1.6}$$

Таким образом, в условии (1.5) асимптотика понимается в смысле Эрдейи по асимптотической последовательности $\{x_1^{-n}\}_{n=0}^{\infty}$. Точный смысл возникающих далее асимптотик будет определяться отдельно.

2. Вычисление асимптотики

Учитывая условие (1.4), представим функцию (1.3) в виде

$$u(x_1,x_2,t)=U_0(x_1,x_2,t)+U_1(x_1,x_2,t), \tag{2.7}$$

где

$$U_0(x_1,x_2,t)=\int\limits_0^{\sigma}ds_1\int\limits_{-\infty}^{+\infty}ds_2\ \dots,\quad U_1(x_1,x_2,t)=\int\limits_{\sigma}^{+\infty}ds_1\int\limits_{-\infty}^{+\infty}ds_2\ \dots,$$

$$\sigma=(x_1^2+x_2^2+t)^{\beta/2},\quad 0<\beta<1, \tag{2.8}$$

а многоточие обозначает подынтегральное выражение из формулы (1.3) вместе с множителем $(4\pi t)^{-1}$. В интеграле $U_1(x_1,x_2,t)$ сделаем замену $s_1=2z\sqrt{t}$. Полагая

$$\mu=\frac{\sigma}{2\sqrt{t}},\quad \eta_1=\frac{x_1}{2\sqrt{t}} \tag{2.9}$$

и пользуясь условием (1.5), получаем

$$\begin{aligned}U_1(x_1,x_2,t)&=\frac{1}{2\pi\sqrt{t}}\int\limits_{\mu}^{+\infty}e^{-(\eta_1-z_1)^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Lambda(2z\sqrt{t},s_2)\exp\Big\{-\frac{(s_2-x_2)^2}{4t}\Big\}\,ds_2dz\\&=\frac{t^{p/2}}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{N-1}2^{p-n}t^{-n/2}\int\limits_{\mu}^{+\infty}z^{p-n}e^{-(z-\eta_1)^2}dz\\&\times\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Lambda_n(s_2)\exp\Big\{-\frac{(s_2-x_2)^2}{4t}\Big\}\,ds_2+O(\sigma^{-\rho_1N}),\quad \rho_1>0.\end{aligned} \tag{2.10}$$

В дальнейшем будем пользоваться тем, что при $\sigma\to\infty$ на множестве

$$T_\alpha=\big\{(x_1,x_2,t)\colon (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\ t\geqslant(x_1^2+x_2^2)^{\alpha/2}\big\},\quad 1+\beta<\alpha<2,$$

справедливы оценки (легко проверить)

$$\sigma=O\big(t^{\beta/\alpha}\big),\quad \mu=O\big(t^{\beta/\alpha-1/2}\big),\quad \mu=O\big(\sigma^{-\gamma}\big), \tag{2.11}$$

где

$$\gamma = \frac{\alpha}{2\beta} - 1 > 0. \tag{2.12}$$

При $0 \leqslant n \leqslant p$ имеем

$$\int\limits_{\mu}^{+\infty} z^{p-n} e^{-(z-\eta)^2} dz = \int\limits_{0}^{+\infty} z^{p-n} e^{-(z-\eta)^2} dz - \int\limits_{0}^{\mu} z^{p-n} e^{-(z-\eta)^2} dz$$

$$= \int\limits_{-\eta}^{+\infty} (\eta + s)^{p-n} e^{-s^2} ds - \int\limits_{0}^{\mu} z^{p-n} e^{-(z-\eta)^2} dz$$

$$= \sum_{m=0}^{p-n} \frac{(p-n)!\, \eta^{p-n-m}}{m!(p-n-m)!} \int\limits_{-\eta}^{+\infty} s^m e^{-s^2} ds + \sum_{r=1}^{\infty} \mu^r e^{-\eta^2} P_{l_r}(\eta),$$

где $\int_{-\eta}^{+\infty} s^m e^{-s^2} ds = e^{-\eta^2} P_{m-1}(\eta) + \nu_m \mathrm{erfc}(-\eta)$, $P_l(\eta)$ — полиномы степени l, ν_m — некоторые константы, $\mathrm{erfc}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x}^{+\infty} e^{-s^2} ds$. Тогда

$$\int\limits_{\mu}^{+\infty} z^{p-n} e^{-(z-\eta)^2} dz = \Pi_{p-n}(\eta) \mathrm{erfc}(-\eta) + \exp(-\eta^2) \Pi^*_{p-n-1}(\eta)$$

$$+ \exp(-\eta^2) \sum_{r=1}^{N-1} P_{l_r}(\eta) \mu^r + O(\sigma^{-\rho_2 N}), \quad \rho_2 > 0, \tag{2.13}$$

где $\Pi_{p-n}(\eta)$ и $\Pi^*_{p-n-1}(\eta)$ — полиномы степени $p-n$ и $p-n-1$ соответственно.

При $n > p$ имеем

$$\int\limits_{\mu}^{+\infty} z^{p-n} e^{-(z-\eta)^2} dz = \int\limits_{1}^{+\infty} z^{p-n} e^{-(z-\eta)^2} dz + \int\limits_{\mu}^{1} \Psi_{n-p}(z, \eta) dz + e^{-\eta^2} \sum_{r=0}^{n-p-1} P_r(\eta) \int\limits_{\mu}^{1} z^{r+p-n} dz,$$

где $P_r(\eta)$ — полиномы степени r,

$$\Psi_{n-p}(z, \eta) = z^{p-n} \Big[e^{-(z-\eta)^2} - e^{-\eta^2} \sum_{r=0}^{n-p-1} H_r(\eta) \frac{z^r}{r!} \Big], \tag{2.14}$$

сумма по r в квадратных скобках — это частичная сумма ряда Тейлора для функции $\exp(2z\eta - z^2)$ по переменной z, а $H_r(\eta)$ — полиномы Эрмита степени r. Отсюда получаем

$$\int\limits_{\mu}^{+\infty} z^{p-n} e^{-(z-\eta)^2} dz = \int\limits_{1}^{+\infty} z^{p-n} e^{-(z-\eta)^2} dz + e^{-\eta^2} P_{n-p-1}(\eta) \ln \mu$$

$$+ \sum_{r=0}^{n-p-2} \mu^{r+p-n+1} e^{-\eta^2} P_r(\eta) + \int\limits_{0}^{1} \Psi_{n-p}(z, \eta) dz - \int\limits_{0}^{\mu} \Psi_{n-p}(z, \eta) dz. \tag{2.15}$$

Из формулы (2.14) вытекает, что $\Psi_n(z, \eta)$ не имеет особенностей при $z \to 0$ и

$$\int\limits_{0}^{\mu} \Psi_{n-p}(z, \eta) dz = \sum_{r=1}^{N-1} \mu^r e^{-\eta^2} P_{r-1+n-p}(\eta) + O(\sigma^{-\gamma N}),$$

где число $\gamma > 0$ определено формулой (2.12). Таким образом, соотношение (2.15) приобретает вид

$$\int\limits_{\mu}^{+\infty} z^{p-n} e^{-(z-\eta)^2} dz = J_{p-n}(\eta) + \exp(-\eta^2) \sum_{r_s^2+q_s^2\neq 0} b_s \eta^{m_s} \mu^{r_s} \ln^{q_s} \mu + O(\sigma^{-\rho_2 N}), \tag{2.16}$$

где J_{p-n} — гладкие функции медленного роста, b_s — некоторые константы.

Согласно работе [4] из условия (1.6) имеем

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Lambda_n(s_2) \exp\Big\{-\frac{(s_2-x_2)^2}{4t}\Big\} ds_2$$

$$= \exp(-\eta_2^2) \sum_{m=1}^{N} t^{-m/2} Q_{n,m-1}(\eta_2) + O((x_2^2+t)^{-\rho_3 N}), \quad \rho_3 > 0, \tag{2.17}$$

где $Q_{n,m-1}(\eta_2)$ — полиномы степени $m-1$ по $\eta_2 = x_2/(2\sqrt{t})$, коэффициенты которых зависят от n. Финитность (ограниченность носителя) функций Λ_n приводит к тому, что асимптотика (2.17) не содержит $\ln t$. Это может быть показано напрямую разложением подынтегральной экспоненты в ряд Тейлора по переменной s_2.

Подставляя выражения (2.13), (2.16) и (2.17) в формулу (2.10), получаем

$$U_1(x_1,x_2,t) = t^{p/2} \sum_{n=1}^{N} t^{-n/2} \widetilde{S}_n(\eta_1,\eta_2) + V_1(\mu,\eta_1,\eta_2,t) + O(\sigma^{-\rho_4 N}), \quad \rho_4 > 0, \tag{2.18}$$

$$V_1(\mu,\eta_1,\eta_2,t) = \exp\left(-\eta_1^2-\eta_2^2\right) \sum_{r_s^2+q_s^2\neq 0} a_s' \eta_1^{m_s} \eta_2^{n_s} t^{l_s} \mu^{r_s} \ln^{q_s} \mu, \tag{2.19}$$

где a_s' — константы. Коэффициенты $\widetilde{S}_n(\eta_1,\eta_2)$ — это гладкие функции; в частности,

$$\widetilde{S}_1(\eta_1,\eta_2) = \exp\left\{-(\eta_1^2+\eta_2^2)\right\} \left[\Pi_p^{(1)}(\eta_1)\exp(\eta_1^2)\mathrm{erfc}(-\eta_1) + \Pi_{p-1}^{(2)}(\eta_1)\right],$$

где $\Pi_p^{(1)}(\eta_1)$ и $\Pi_{p-1}^{(2)}(\eta_1)$ — полиномы степени p и $p-1$ соответственно.

Видно, что благодаря множителю $\exp\left\{-(\eta_1^2+\eta_2^2)\right\}$ оценка остатка в формуле (2.18) остается в силе и для значений переменных из множества

$$X_\alpha = \left\{(x_1,x_2,t)\colon (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\ 0 < t < (x_1^2+x_2^2)^{\alpha/2}\right\},$$

на котором справедливы оценки

$$\mu^2 = o(\eta_1^2+\eta_2^2), \quad \eta_1^2+\eta_2^2 \geqslant \frac{1}{4}(x_1^2+x_2^2)^{1-\alpha/2} \geqslant \frac{1}{8}\sigma^{(2-\alpha)/\beta}. \tag{2.20}$$

Поскольку $x_1^2+x_2^2 \leqslant \sigma^{2/\beta}$ и $2t \geqslant \sigma^{\alpha/\beta}$ на множестве T_α, заключаем, что при $0 \leqslant s \leqslant \sigma$ справедливы оценки

$$\frac{x_1 s}{t} = O(\sigma^{-\delta}), \quad \frac{x_2 s}{t} = O(\sigma^{-\delta}), \quad \frac{s^2}{t} = O(\sigma^{-2\delta}), \tag{2.21}$$

где

$$\delta = \frac{\alpha-1}{\beta} - 1 > 0.$$

С помощью оценок (2.21) представим интеграл $U_0(x_1,x_2,t)$ в следующем виде:

$$U_0(x_1,x_2,t) = \frac{\exp\left\{-(\eta_1^2+\eta_2^2)\right\}}{4\pi t}$$

$$\times \int\limits_0^\sigma \int\limits_{-\infty}^\infty \Lambda(s_1,s_2) \sum_{m=0}^N \frac{1}{m!}\Big(\frac{\eta_1 s_1+\eta_2 s_2}{\sqrt{t}} - \frac{s_1^2+s_2^2}{4t}\Big)^m ds_2 ds_1 + O(\sigma^{-\rho_5 N}), \qquad \rho_5>0.$$

Благодаря множителю $\exp\{-(\eta_1^2+\eta_2^2)\}$ оценка остатка верна и на множестве X_α. Раскрывая степень и меняя порядок суммирования, получаем

$$U_0(x_1,x_2,t) = \exp\{-(\eta_1^2+\eta_2^2)\} \sum_{n=2}^N t^{-n/2} \sum_{\substack{0\leqslant m_1+m_2\leqslant n-2\\ 0\leqslant l_1+l_2\leqslant n-2}} a_{m_1,m_2,l_1,l_2}\eta_1^{m_1}\eta_2^{m_2}$$

$$\times \int\limits_0^\sigma \int\limits_{-\infty}^\infty s_1^{l_1}s_2^{l_2}\Lambda(s_1,s_2) ds_2 ds_1 + O(\sigma^{-\rho_5 N}),$$

где a_{m_1,m_2,l_1,l_2} — некоторые константы. Преобразуем возникающий здесь интеграл следующим образом:

$$\int\limits_0^\sigma \int\limits_{-\infty}^\infty s_1^{l_1}s_2^{l_2}\Lambda(s_1,s_2) ds_2 ds_1 = \int\limits_0^1 \int\limits_{-\infty}^\infty s_1^{l_1}s_2^{l_2}\Lambda(s_1,s_2) ds_2 ds_1$$

$$+ \int\limits_1^\sigma \int\limits_{-\infty}^\infty s_1^{l_1}s_2^{l_2}\Big[\Lambda(s_1,s_2) - s_1^p\Lambda_0(s_2) - \ldots - s_1^{-l_1-1}\Lambda_{p+l_1+1}(s_2)\Big] ds_2 ds_1$$

$$+ \int\limits_1^\sigma \int\limits_{-\infty}^\infty \Big[s_1^{l_1+p}s_2^{l_2}\Lambda_0(s_2) + \ldots + s_1^{-1}s_2^{l_2}\Lambda_{p+l_1+1}(s_2)\Big] ds_2 ds_1$$

$$= A_{l_1,l_2} + \ln\sigma \int\limits_{-\infty}^\infty s_2^{l_2}\Lambda_{p+l_1+1}(s_2)ds_2 + \sum_{k=1}^{N-1}(c_k\sigma^k + c_{-k}\sigma^{-k}) + O(\sigma^{-N})$$

$$= A_{l_1,l_2} + B_{l_1,l_2}\ln t + 2B_{l_1,l_2}\ln(2\mu) + \sum_{k=1}^{N-1}(c'_k\mu^k t^{k/2} + c'_{-k}\mu^{-k}t^{-k/2}) + O(\sigma^{-N}),$$

где A_{l_1,l_2}, B_{l_1,l_2}, c'_k и c'_{-k} — константы. Тогда

$$U_0(x_1,x_2,t) = \exp\{-(\eta_1^2+\eta_2^2)\} \sum_{n=2}^N t^{-n/2}\Big[\Pi_{n-2}(\eta_1,\eta_2) + \Pi^*_{n-2}(\eta_1,\eta_2)\ln t\Big]$$

$$+ V_0(\mu,\eta_1,\eta_2,t) + O(\sigma^{-\rho_6 N}), \quad \rho_6>0, \tag{2.22}$$

где $\Pi_{n-2}(\eta_1,\eta_2)$ и $\Pi^*_{n-2}(\eta_1,\eta_2)$ — полиномы степени $n-2$, а выражение

$$V_0(\mu,\eta_1,\eta_2,t) = \exp(-\eta_1^2-\eta_2^2) \sum_{r_s^2+q_s^2\neq 0} a''_s \eta_1^{m_s}\eta_2^{n_s}t^{l_s}\mu^{r_s}\ln^{q_s}\mu, \tag{2.23}$$

где a''_s — некоторые константы, получается аналогично выражению (2.19). Из оценок (2.20) вытекает, что при $(x_1,x_2,t)\in X_\alpha$ для любых вещественных $r,l,m,n\in\mathbb{R}$ найдутся $C>0$ и $q>0$ такие, что

$$|\eta_1^m\eta_2^n t^l\mu^r|\exp(-\eta_1^2-\eta_2^2) \leqslant C\sigma^q \exp\Big(-\frac{\sigma^{(2-\alpha)/\beta}}{8}\Big).$$

Следовательно, выражения $V_i(\mu,\eta_1,\eta_2,t)$ в формулах (2.18) и (2.22) экспоненциально малы на множестве X_α.

Введем обозначение
$$\varepsilon = (x_1^2 + x_2^2 + t)^{-1/4}.$$
Тогда из формул (2.19) и (2.23) получаем
$$V_0(\mu, \eta_1, \eta_2, t) + V_1(\mu, \eta_1, \eta_2, t) = \exp(-\eta_1^2 - \eta_2^2) \sum_{r_s^2 + q_s^2 \neq 0} a_s''' \eta_1^{m_s} \eta_2^{n_s} t^{l_s} (\ln t)^{k_s} \varepsilon^{2\beta r_s} (\ln \varepsilon^{2\beta})^{q_s},$$
где a_s''' — некоторые константы, $\varepsilon \to 0$, а β — это произвольный параметр: $0 < \beta_1 < \beta < \beta_2 < 1$. Поэтому при $\sigma \to \infty$ для $(x_1, x_2, t) \in T_\alpha$, из леммы А. Р. Данилина [6, с. 2169] (см. также [5, лемма 4.4] или [7, гл. 7, § 30]) вытекает, что
$$V_0(\mu, \eta_1, \eta_2, t) + V_1(\mu, \eta_1, \eta_2, t) = O(\sigma^{-\rho N}), \quad (x_1, x_2, t) \in T_\alpha,$$
где $\rho = \min\{\rho_4, \rho_6\}$. Подставляя (2.18) и (2.22) в (2.7), с учетом сделанных замечаний и обозначений (2.8), (2.9) приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. *При* $|x_1| + |x_2| + t \to \infty$ *асимптотика решения уравнения* (1.1) *с условиями* (1.2), (1.4)–(1.6) *имеет вид*
$$u(x_1, x_2, t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^{-n/2} \Big[t^{p/2} S_n(\eta_1, \eta_2) + t^{-1/2} \ln t \, \Pi_n(\eta_1, \eta_2) \exp(-\eta_1^2 - \eta_2^2) \Big]$$
в смысле Эрдейи по асимптотической последовательности $\{(x_1^2 + x_2^2 + t)^{-\rho' n}\}_{n=1}^{\infty}$ *с некоторым* $\rho' > 0$, *где* $S_n(\eta_1, \eta_2)$ *— это* C^∞*-гладкие функции медленного роста,* $\Pi_n(\eta_1, \eta_2)$ *— полиномы степени* n *по автомодельным переменным*
$$\eta_1 = \frac{x_1}{2\sqrt{t}}, \quad \eta_2 = \frac{x_2}{2\sqrt{t}}.$$

Формула для главного асимптотического приближения решения имеет следующий вид:
$$u(x_1, x_2, t) \approx t^{(p-1)/2} \left[\Pi_p^{(1)}(\eta_1) \int_{-\infty}^{\eta_1} \exp(-s^2 - \eta_2^2) \, ds + \Pi_{p-1}^{(2)}(\eta_1) \exp(-\eta_1^2 - \eta_2^2) \right],$$
где $\Pi_p^{(1)}(\eta_1)$ и $\Pi_{p-1}^{(2)}(\eta_1)$ — полиномы степеней p и $p-1$ соответственно. При подстановке этой формулы в (1.1) получаются следующие уравнения:
$$\frac{d^2 \Pi_p^{(1)}}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d\Pi_p^{(1)}}{d\eta} - 2p \Pi_p^{(1)} = 0,$$
$$\frac{d^2 \Pi_{p-1}^{(2)}}{d\eta^2} - 2\eta \frac{d\Pi_{p-1}^{(2)}}{d\eta} - 2(p+1) \Pi_{p-1}^{(2)} = -2 \frac{d\Pi_p^{(1)}}{d\eta}.$$
Отсюда вытекает, что $\Pi_p^{(1)}(\eta_1)$ — это полиномы Эрмита мнимого аргумента с точностью до числового множителя.

В заключение отметим, что для многомерной задачи справедлив следующий результат.

Теорема 2. *Пусть* $u(x_1, \ldots, x_m, t)$ *— решение задачи Коши*
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}, \quad t > 0,$$
$$u(x_1, \ldots, x_m, 0) = \Lambda(x_1, \ldots, x_m), \quad (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m,$$

с локально интегрируемой начальной функцией Λ *медленного роста. При выполнении условий*

$$\Lambda(x_1, \ldots, x_m) = 0, \quad x_1 < 0,$$

$$\Lambda(x_1, \ldots, x_m) = x_1^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda_n(x_2, \ldots, x_m)}{x_1^n}, \quad x_1 \to +\infty,$$

где

$$\operatorname{supp} \Lambda \subset \big\{(x_1, \ldots, x_m) \colon x_1 > 0,\ |x_2| + \ldots + |x_m| < |x_1|^{\nu},\ \nu > 0\big\},$$

$$\operatorname{supp} \Lambda_n \subset [-R_n, R_n]^{m-1}, \quad R_n > 0,$$

справедлива асимптотическая формула

$$u(x_1, \ldots, x_m, t) = t^{-m/2} \sum_{n=0}^{\infty} t^{-n/2} \Big[t^{(p+1)/2} S_n(\eta_1, \ldots, \eta_m) + \ln t\, \Pi_n(\eta_1, \ldots, \eta_m) \exp(-\eta_1^2 - \ldots - \eta_m^2) \Big],$$

$$|x_1| + \ldots + |x_m| + t \to \infty,$$

в смысле Эрдейи по асимптотической последовательности $\{(x_1^2 + \ldots + x_m^2 + t)^{-\rho_m n}\}_{n=1}^{\infty}$*, где* $\rho_m > 0$*,* $S_n(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ *— гладкие функции медленного роста,* $\Pi_n(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ *— полиномы степени* n *по автомодельным переменным*

$$\eta_1 = \frac{x_1}{2\sqrt{t}}, \quad \ldots, \quad \eta_m = \frac{x_m}{2\sqrt{t}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится совершенно аналогично двумерному случаю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
2. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
3. **Федорюк М.В.** Асимптотика. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.
4. **Захаров С.В.** О распределении тепла в бесконечном стержне // Мат. зам. 2006. Т. 80, вып. 3. С. 379–385.
5. **Данилин А.Р.** Асимптотика ограниченных управлений для сингулярной эллиптической задачи в области с малой полостью // Мат. сб. 1998. Т. 189, № 11. С. 27–60.
6. **Данилин А.Р.** Асимптотика оптимального значения функционала качества при быстростабилизирующемся непрямом управлении в сингулярном случае // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2006. Т. 46, № 12. С. 2166–2177.
7. **Ильин А.М., Данилин А.Р.** Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 248 с.

Захаров Сергей Викторович
канд. физ.-мат. наук
страший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: svz@imm.uran.ru

Поступила 20.04.2015