Том 22 № 1 2016

УДК 517.977

АСИМПТОТИКА МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ, СИНГУЛЯРНО ЗАВИСЯЩИХ ОТ МАЛОГО ПАРАМЕТРА[1]

А. А. Ершов, М.И. Русанова

Построена асимптотика некоторого класса многомерных интегралов, сингулярно зависящих от малого параметра. Рассмотрен случай, когда знаменатель подынтегральной функции стремится к нулю на трех пересекающихся поверхностях.

Ключевые слова: многомерный интеграл, малый параметр, асимптотическое разложение, метод вычитания особенностей.

A. A. Ershov, M. I. Rusanova. Asymptotics of multidimensional integrals with singular dependence on a small parameter.

An asymptotic expansion is constructed for a class of multidimensional integrals that depend singularly on a small parameter. The case where the denominator of the integrand vanishes on three intersecting surfaces is considered. .

Keywords: multidimensional integral, small parameter, asymptotic expansion, singularity subtraction method.

Введение

Хорошо известна задача нахождения асимптотики интеграла, зависящего от параметра. В качестве примера подобных интегралов можно привести хорошо изученные интегралы вида $\int_0^1 f(x)e^{\lambda S(x)}dx$, где λ — большой положительный параметр [1]. Асимптотика различных интегралов описана в ряде работ (см., например, [2; 3]). Здесь рассматриваются недостаточно изученные до сих пор интегралы вида $\int \Psi(x,\varepsilon)dx$ от функции, которая регулярно зависит от малого параметра ε всюду, кроме некоторого множества (одной или нескольких точек, многообразий и т. п.). Однако при $\varepsilon = 0$ интеграл расходится и его асимптотика имеет довольно сложный характер.

В работе А. М. Ильина, А. А. Ершова [4] исследовано асимптотическое разложение сингулярных интегралов вида

$$\iint\limits_{\omega} \frac{dxdy}{\varepsilon^2 + U(x,y)}, \tag{0.1}$$

где неотрицательная функция $U(x,y)$ обращается в нуль на n пересекающихся кривых, а ω — некоторая окрестность критической точки (0,0), в которой эти кривые пересекаются. В монографии [5, гл. 7, § 30] была рассмотрена асимптотика двумерных сингулярных интегралов вида $\int_0^1\int_0^1 \frac{f(x,y)dxdy}{\varepsilon^2 + xy}$. Случаи, когда $U(x,y)$ равна нулю в точке или на одной кривой, более просты для рассмотрения.

В трехмерном случае функция $U(x,y,z)$ может обращаться в нуль на гораздо более сложных пересечениях кривых и поверхностей. В настоящей статье мы построим асимптотическое разложение интегралов вида

$$\iint\limits_{\omega} \frac{dxdydz}{\varepsilon^2 + U(x,y,z)},$$

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РНФ (проект 15-11-10018).

где неотрицательная функция $U(x,y,z)$ обращается в нуль на трех пересекающихся поверхностях, причем в точке пересечения нормали к этим поверхностям неколлинеарны.

Интегралы данного вида, сингулярно зависящие от малого параметра, иногда встречаются в различных областях математики. Например, асимптотика одномерного интеграла, сингулярно зависящего от малого параметра, находилась в [6]. В многомерном случае такие интегралы возникают при выражении через потенциал решений краевых задач для уравнения Лапласа вне тонких областей.

1. Построение асимптотики

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{-\delta_1}^{\delta_1}\int\limits_{-\delta_2}^{\delta_2}\int\limits_{-\delta_3}^{\delta_3} \frac{dxdydz}{\varepsilon^2+U(x,y,z)}, \tag{1.1}$$

где окрестность $[-\delta_1,\delta_1]\times[-\delta_2,\delta_2]\times[-\delta_3,\delta_3]$ достаточно мала, $U(x,y,z)=(z-h_1(x,y))^2\times(y-h_2(x,z))^2(x-h_3(y,z))^2G^2(x,y,z)$, $G(x,y,z)$ — гладкая функция, не обращающаяся в ноль, а уравнения $z=h_1(x,y)$, $y=h_2(x,z)$ и $x=h_3(y,z)$ задают достаточно гладкие поверхности, пересекающиеся на трех кривых с общей точкой в начале координат (т. е. $h_1(0,0)=h_2(0,0)=h_3(0,0)=0$), причем нормали к этим поверхностям в нуле не являются компланарными.

Заметим, что если применить предложенный в [4] метод разбиения области интегрирования на сектора и некоторые выпрямляющие замены, то нашу задачу можно существенно упростить, что мы покажем в следующей теореме.

Теорема 1. *Интеграл* (1.1) *представим в виде суммы интегралов вида*

$$I(\varepsilon)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{f(x,y,z)dxdydz}{\varepsilon^2+x^2y^2z^2}\,, \tag{1.2}$$

где $f(x,y,z)\in C^\infty\big([0,1]\times[0,1]\times[0,1]\big)$ *— некоторая положительная функция.*

Доказательство. Возьмем δ_1, δ_2 и δ_3 малыми настолько, чтобы при $-\delta_3<x<\delta_3$, $-\delta_2<y<\delta_2$, $-\delta_1<z<\delta_1$ выполнялись неравенства

$$-\delta_1<h_1(x,y)<\delta_1,\quad -\delta_2<h_2(x,z)<\delta_2,\quad -\delta_3<h_3(y,z)<\delta_3.$$

Тогда

$$\int\limits_{-\delta_1}^{\delta_1}\int\limits_{-\delta_2}^{\delta_2}\int\limits_{-\delta_3}^{\delta_3} \frac{dxdydz}{\varepsilon^2+U(x,y,z)}=S_1+S_2,$$

где

$$S_1=\int\limits_{-\delta_1}^{\delta_1}\int\limits_{-\delta_2}^{\delta_2}\int\limits_{-\delta_3}^{h_3(y,z)} \frac{dxdydz}{\varepsilon^2+U(x,y,z)},\quad S_2=\int\limits_{-\delta_1}^{\delta_1}\int\limits_{-\delta_2}^{\delta_2}\int\limits_{h_3(y,z)}^{\delta_3} \frac{dxdydz}{\varepsilon^2+U(x,y,z)}.$$

Рассмотрим интеграл S_2 (интеграл S_1 исследуется аналогично):

$$S_2=\left[\begin{array}{c}\xi=h_3(y,z)+(\delta_3-h_3(y,z))s,\\ d\xi=(\delta_3-h_3(y,z))ds\end{array}\right]=\int\limits_{-\delta_1}^{\delta_1}\int\limits_{-\delta_2}^{\delta_2}\int\limits_0^1 \frac{f_1(y,z)dsdydz}{\varepsilon^2+U_1(s,y,z)},$$

где

$$f_1(y,z)=\delta_3-h_3(y,z),$$

$$U_1(s,y,z) = U((\delta_3 - h_3(y,z))s + h_3(y,z), y, z) = s^2(z - \widetilde{h}_1(s,y,z))^2(y - \widetilde{h}_2(s,y,z))^2 G_1^2(s,y,z),$$
$$\widetilde{h}_1(s,y,z) = h_1((\delta_3 - h_3(y,z))s + h_3(y,z), y),$$
$$\widetilde{h}_2(s,y,z) = h_2((\delta_3 - h_3(y,z))s + h_3(y,z), z),$$
$$G_1(s,y,z) = (\delta_3 - h_3(y,z))G((\delta_3 - h_3(y,z))s + h_3(y,z), y, z).$$

Обозначим через функцию $y = H_2(s,z)$ решение уравнения $y = \widetilde{h}_2(s,y,z)$ относительно y и переставим пределы интегрирования. Тогда интеграл S_2 можно представить в виде суммы $S_2 = S_{2,1} + S_{2,2}$, где

$$S_{2,1} = \int\limits_{-\delta_1}^{\delta_1}\int\limits_0^1\int\limits_{-\delta_2}^{H_2(s,z)} \frac{f_1(y,z)dydsdz}{\varepsilon^2 + U_1(s,y,z)}, \quad S_{2,2} = \int\limits_{-\delta_1}^{\delta_1}\int\limits_0^1\int\limits_{H_2(s,z)}^{\delta_2} \frac{f_1(y,z)dydsdz}{\varepsilon^2 + U_1(s,y,z)}.$$

Интегралы $S_{2,1}$ и $S_{2,2}$ могут исследоваться практически одинаково, поэтому достаточно рассмотреть один из них. Преобразуем интеграл $S_{2,2}$ следующим образом:

$$S_{2,2} = \left[\begin{array}{c} y = H_2(s,z) + \eta, \\ dy = d\eta \end{array}\right] = \int\limits_{-\delta_1}^{\delta_1}\int\limits_0^1\int\limits_0^{\delta_2 - H_2(s,z)} \frac{f_1(H_2(s,z)+\eta, z)d\eta dsdz}{\varepsilon^2 + s^2\eta^2(z - \widetilde{h}_1(s, H_2(s,z)+\eta, z))^2\widetilde{G}_1^2(s,\eta,z)},$$

где

$$\widetilde{G}_1(s,\eta,z) = G_1(s, H_2(s,z)+\eta, z)\,\frac{H_2(s,z) + \eta - h_2(s, H_2(s,z)+\eta, z)}{\eta}.$$

После замены $\left[\begin{array}{c} \eta = (\delta_2 - H_2(s,z)t, \\ d\eta = (\delta_2 - H_2(s,z)dt \end{array}\right]$ интеграл $S_{2,2}$ принимает вид

$$S_{2,2} = \int\limits_{-\delta_1}^{\delta_1}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{f_2(s,t,z)dtdsdz}{\varepsilon^2 + U_2(s,t,z)},$$

где

$$f_2(s,t,z) = f_1(t\delta_2 + (1-t)H_2(s,z)),$$
$$U_2(s,t,z) = s^2\eta^2(z - \widetilde{h}_1(s, t\delta_2 + (1-t)H_2(s,z), z))^2\widetilde{G}_1^2(s, (\delta_2 - H_2(s,z))t, z).$$

В свою очередь, интеграл $S_{2,2}$ может быть разбит на сумму двух интегралов $S_{2,2,1} + S_{2,2,2}$, где

$$S_{2,2,1} = \int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_{-\delta_1}^{H_1(s,t)} \frac{f_2(s,t,z)dzdtds}{\varepsilon^2 + U_2(s,t,z)}, \quad S_{2,2,2} = \int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_{H_1(s,t)}^{\delta_1} \frac{f_2(s,t,z)dzdtds}{\varepsilon^2 + U_2(s,t,z)}.$$

Здесь функция $z = H_1(s,t)$ — решение уравнения $z = \widetilde{h}_1(s, t\delta_2 + (1-t)H_2(s,z), z)$.

Каждый из интегралов $S_{2,2,1}$ и $S_{2,2,2}$ аналогичными заменами может быть приведен к интегралу вида

$$S = \int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{f_3(s,t,\tau)d\tau dtds}{\varepsilon^2 + s^2t^2\tau^2G_3^2(s,t,\tau)}.$$

Теперь нужно избавиться от функции $G_3(s,t,\tau)$ в знаменателе. Для этого сделаем ряд замен, аналогичных заменам, проведенным в двумерном случае [4]:

$$S = \int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{f_3(s,t,\tau)d\tau dtds}{\varepsilon^2 + s^2t^2\tau^2G_3^2(s,t,\tau)} = \left[\begin{array}{c} \zeta = \tau G_3(s,t,\tau) = F(s,t,\tau), \\ \tau = F^{-1}(s,t,\zeta) \end{array}\right]$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{G_3(s,t,1)} \frac{f_3(s,t,F^{-1}(s,t,\zeta))d\zeta dtds}{F'_\tau(s,t,F^{-1}(s,t,\zeta))(\varepsilon^2+s^2t^2\zeta^2)} = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{G_3(s,t,1)} \frac{f_4(s,t,\zeta)d\zeta dtds}{\varepsilon^2+s^2t^2\zeta^2}$$

$$= \left[\begin{array}{c} \zeta = G_3(s,t,1)z, \\ d\zeta = G_3(s,t,1)dz \end{array} \right] = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{f_5(s,t,z)dzdtds}{\varepsilon^2+s^2t^2z^2G_3^2(s,t,1)},$$

где $F^{-1}(s,t,\zeta)$ обозначает функцию, обратную к функции $F(s,t,\tau)$ относительно третьей переменной.

Аналогично можно получить, что

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{f_5(s,t,z)dzdtds}{\varepsilon^2+s^2t^2z^2G_3^2(s,t,1)} = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{f_6(s,y,z)dzdtds}{\varepsilon^2+s^2y^2z^2G_3^2(s,1,1)}$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{f_7(x,y,z)dzdtds}{\varepsilon^2+x^2y^2z^2G_3^2(1,1,1)} = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{f_8(x,y,z)dzdtds}{\tilde\varepsilon^2+x^2y^2z^2},$$

где $\tilde\varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{G_3(1,1,1)}$. □

Таким образом, достаточно рассмотреть интеграл (1.2). Его асимптотику можно найти методом вычитания особенностей. Для этого представим функцию $f(x,y,z)$ в виде следующей суммы:

$$\begin{gathered}
f(x,y,z) = f(0,0,0) + xf'_x(0,0,0) + yf'_y(0,0,0) + zf'_z(0,0,0) \\
+\ xyf''_{xy}(0,0,0) + yzf''_{yz}(0,0,0) + xzf''_{xz}(0,0,0) + xyzf'''_{xyz}(0,0,0) \\
+\ x^2\varphi_1(x,0,0) + y^2\varphi_2(0,y,0) + z^2\varphi_3(0,0,z) \\
+\ x^2y\varphi'_{1y}(x,0,0) + x^2z\varphi'_{1z}(x,0,0) + \ldots \\
+\ x^2yz\varphi'_{1yz}(x,0,0) + y^2xz\varphi'_{2xz}(0,y,0) + z^2xy\varphi'_{3xy}(0,0,z) \\
+\ x^2y^2\psi_3(x,y,0) + x^2z^2\psi_2(x,0,z) + y^2z^2\psi_1(0,y,z) \\
+ x^2y^2z\psi'_{3z}(x,y,0) + x^2z^2y\psi'_{2y}(x,0,z) + y^2z^2x\psi'_{1x}(0,y,z) + x^2y^2z^2\varphi(x,y,z),
\end{gathered} \tag{1.3}$$

где

$$\varphi_1(x,y,z) = \frac{f(x,y,z)-f(0,y,z)-xf_x(0,y,z)}{x^2},$$

$$\varphi_2(x,y,z) = \frac{f(x,y,z)-f(x,0,z)-yf_y(x,y,z)}{y^2},$$

$$\varphi_3(x,y,z) = \frac{f(x,y,z)-f(x,y,0)-zf_z(x,y,z)}{z^2},$$

$$\psi_1(x,y,z) = \frac{1}{y^2z^2}\Big(f(x,y,z) - f(x,y,0) - f(x,0,z) + f(x,0,0)$$

$$+\ yf'_y(x,0,0) + zf'_z(x,0,0) - yf'_y(x,0,z) - zf'_z(x,y,0) + yzf''_{yz}(x,0,0)\Big),$$

$$\psi_2(x,y,z) = \frac{1}{x^2z^2}\big(f(x,y,z) - \ldots\big), \quad \psi_3(x,y,z) = \frac{1}{x^2y^2}\big(f(x,y,z) - \ldots\big),$$

$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{x^2y^2z^2}\big(f(x,y,z) - \ldots\big),$$

причем все эти функции являются бесконечно дифференцируемыми и ограниченными во всей области интегрирования.

Каждое слагаемое данной суммы соответствует одному из девяти различных видов интегралов, асимптотика каждого из которых по-прежнему не является столь очевидной, как в двумерном случае. Поэтому рассмотрим каждый вид интегралов по отдельности в приведенных ниже леммах.

Лемма 1. *Имеют место следующие асимптотические разложения*:

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{dxdydz}{\varepsilon^2+x^2y^2z^2} = \frac{\pi}{4}\frac{1}{\varepsilon}\ln^2\frac{1}{\varepsilon}+\frac{\pi^3}{16}\frac{1}{\varepsilon}+O(1), \quad \varepsilon\to 0, \tag{1.4}$$

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{xdxdydz}{\varepsilon^2+x^2y^2z^2} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon}-\frac{\pi}{2}\frac{1}{\varepsilon}+O(1), \quad \varepsilon\to 0, \tag{1.5}$$

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{xydxdydz}{\varepsilon^2+x^2y^2z^2} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{2}\ln^2\frac{1}{\varepsilon}-\ln\frac{1}{\varepsilon}+O(1), \quad \varepsilon\to 0, \tag{1.6}$$

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{xyzdxdydz}{\varepsilon^2+x^2y^2z^2} = \frac{1}{6}\ln^3\frac{1}{\varepsilon}+\frac{\pi^2}{24}\ln\frac{1}{\varepsilon}+O(1), \quad \varepsilon\to 0. \tag{1.7}$$

Доказательство. Одним из методов нахождения асимптотики многомерных интегралов вида $\int_\omega \frac{d\overline{x}}{\varepsilon+U(\overline{x})}$ могут являться замена $t=U(\overline{x})$ и дальнейшая перестановка пределов интегрирования. Действительно,

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{dxdydz}{\varepsilon^2+x^2y^2z^2} = \begin{bmatrix} t=xyz, \\ dt=yzdx \end{bmatrix} = \int_0^1\int_0^1\int_0^{yz} \frac{dtdydz}{(\varepsilon^2+t^2)yz} = \int_0^1\int_0^z\int_{t/z}^1 \frac{dydtdz}{(\varepsilon^2+t^2)yz}$$

$$= \int_0^1\int_t^1\int_{t/z}^1 \frac{dydzdt}{(\varepsilon^2+t^2)yz} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^2 t}{\varepsilon^2+t^2}.$$

Таким образом, мы свели задачу к одномерной. Для нахождения асимптотики одномерного интеграла можно с помощью замены избавиться от малого параметра в подынтегральной функции, а затем применить метод вычитания особенностей. В нашем случае

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^2 t}{\varepsilon^2+t^2} = [t=\varepsilon\xi] = \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^{1/\varepsilon} \frac{\ln^2(\varepsilon\xi)}{1+\xi^2}d\xi = \frac{1}{2\varepsilon}\left(\int_0^\infty \frac{\ln^2(\varepsilon\xi)}{1+\xi^2}d\xi - \int_{1/\varepsilon}^\infty \frac{\ln^2(\varepsilon\xi)}{1+\xi^2}d\xi\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\frac{1}{\varepsilon}\ln^2\frac{1}{\varepsilon}+\frac{\pi^3}{16}\frac{1}{\varepsilon}+O(1).$$

Таким образом, мы доказали равенство (1.4). Совершенно аналогично вычисляются разложения (1.5)–(1.7). □

Получить асимптотику интегралов, неприводимых к виду $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{x^\alpha y^\beta z^\gamma dxdydz}{\varepsilon^2+x^2y^2z^2}$, несколько сложнее. Рассмотрим их в следующей лемме.

Лемма 2. *Пусть функции* $f(x) \in C^\infty[0,1]$, $g(x,y) \in C^\infty([0,1]\times[0,1])$, $h(x,y,z) \in C^\infty([0,1]\times[0,1]\times[0,1])$. *Тогда справедливы разложения*

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2 f(x)dxdydz}{\varepsilon^2+x^2y^2z^2} = \frac{\pi}{2}\int_0^1 f(x)\cdot\frac{x}{\varepsilon}\ln\frac{x}{\varepsilon}\,dx + O(1), \quad \varepsilon\to 0, \tag{1.8}$$

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2 y f(x)dxdydz}{\varepsilon^2+x^2y^2z^2} = \frac{\pi}{2}\int_0^1 xf(x)dx\cdot\frac{1}{\varepsilon} - \int_0^1 f(x)dx\cdot\ln\frac{1}{\varepsilon} + O(1), \quad \varepsilon\to 0, \tag{1.9}$$

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2y^2 g(x,y)dxdydz}{\varepsilon^2+x^2y^2z^2} = \frac{\pi}{2}\int_0^1\int_0^1 xy\,g(x,y)dxdy\cdot\frac{1}{\varepsilon} + O(1), \quad \varepsilon\to 0, \tag{1.10}$$

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2yz f(x)dxdydz}{\varepsilon^2+x^2y^2z^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\ln^2\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)dx + O(1), \quad \varepsilon\to 0, \tag{1.11}$$

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2y^2z g(x,y)dxdydz}{\varepsilon^2+x^2y^2z^2} = \int_0^1\int_0^1 g(x,y)dxdy\cdot\ln\frac{1}{\varepsilon} + O(1), \quad \varepsilon\to 0, \tag{1.12}$$

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2y^2z^2 h(x,y,z)dxdydz}{\varepsilon^2+x^2y^2z^2} = O(1), \quad \varepsilon\to 0. \tag{1.13}$$

Доказательство. Для нахождения асимптотики данных интегралов удобно применить метод введения дополнительного параметра [5, гл. 7, § 30]. Действительно,

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2 f(x)dxdydz}{\varepsilon^2+x^2y^2z^2} = I_1(\mu)+I_2(\mu),$$

где

$$I_1(\mu) = \int_0^1\int_0^1\int_0^\mu \frac{x^2 f(x)dxdydz}{\varepsilon^2+x^2y^2z^2} = [x=\mu\xi] = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{\mu^3\xi^2 f(\mu\xi)d\xi dydz}{\varepsilon^2+\mu^2\xi^2y^2z^2}$$

$$= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{\mu\xi^2(f(0)+O(\mu))}{\big(\frac{\varepsilon}{\mu}\big)^2+\xi^2y^2z^2} = (f(0)+O(\mu))\Big(\frac{\pi}{4}\frac{\mu^2}{\varepsilon}\ln\frac{\mu}{\varepsilon} - \frac{\pi}{8}\frac{\mu^2}{\varepsilon} + O(\mu)\Big) \text{ при } \mu\to 0 \text{ и } \frac{\varepsilon}{\mu}\to 0,$$

$$I_2(\mu) = \int_0^1\int_0^1\int_\mu^1 \frac{f(x)dxdydz}{\big(\frac{\varepsilon}{x}\big)^2+y^2z^2} = \int_\mu^1 f(x)\int_0^1 \frac{x}{\varepsilon z}\operatorname{arctg}\frac{xz}{\varepsilon}\,dzdx = \begin{bmatrix} z=\frac{\varepsilon}{x}\xi, \\ dz=\frac{\varepsilon}{x}d\xi \end{bmatrix}$$

$$= \int_\mu^1 \frac{x}{\varepsilon}f(x)\int_0^{x/\varepsilon}\frac{\operatorname{arctg}\xi}{\xi}\,d\xi dx = \int_\mu^1 \frac{\pi}{2}f(x)\frac{x}{\varepsilon}\ln\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)dx + O(1)$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^1 f(x)\frac{x}{\varepsilon}\ln\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)dx - f(0)\Big(\frac{\pi}{4}\frac{\mu^2}{\varepsilon}\ln\frac{\mu}{\varepsilon} + \frac{\pi}{8}\frac{\mu^2}{\varepsilon}\Big) + O\Big(\frac{\mu^3}{\varepsilon}\ln\frac{\mu}{\varepsilon}\Big) + O(1) \text{ при } \mu\to 0 \text{ и } \frac{\varepsilon}{\mu}\to 0.$$

Выбирая $\mu=\sqrt{\varepsilon}$, получим оценку (1.8). Разложения (1.9) и (1.11) могут быть получены аналогично.

Для доказательства (1.10) и (1.12) можно применить двумерный метод введения дополнительного параметра. В качестве примера рассмотрим интеграл

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2y^2zg(x,y)dxdydz}{\varepsilon^2+x^2y^2z^2} = \int_0^1\int_0^1 g(x,y)\ln\frac{xy}{\varepsilon}dxdy + \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 g(x,y)\ln\Big(1+\frac{\varepsilon^2}{x^2y^2}\Big)dxdy.$$

Пусть $\sqrt{\varepsilon} \ll \mu \ll 1$. Тогда

$$\int_0^1\int_0^1 g(x,y)\ln\Big(1+\frac{\varepsilon^2}{x^2y^2}\Big)dxdy = J_1(\mu)+J_2(\mu)+J_3(\mu)+J_4(\mu),$$

где

$$J_1(\mu) = \int_\mu^1\int_\mu^1 g(x,y)\ln\Big(1+\frac{\varepsilon^2}{x^2y^2}\Big)dxdy = \int_\mu^1\int_\mu^1 g(x,y)\Big(\frac{\varepsilon^2}{x^2y^2}-\frac{\varepsilon^4}{2x^4y^4}+\dots\Big)dxdy,$$

$$J_2(\mu) = \int_0^\mu\int_\mu^1 g(x,y)\ln\Big(1+\frac{\varepsilon^2}{x^2y^2}\Big)dxdy = \int_0^\mu\int_\mu^1 \big(g(x,0)+yg'_y(x,0)+\dots\big)\ln\Big(1+\frac{\varepsilon^2}{x^2y^2}\Big)dxdy$$

$$= \int_\mu^1 g(x,0)\Big[\mu\ln\Big(1+\Big(\frac{\varepsilon}{x\mu}\Big)^2\Big)+2\varepsilon\,\mathrm{arctg}\,\Big(\frac{\mu x}{\varepsilon}\Big)\Big]dx$$

$$+\int_\mu^1 g'_y(x,0)\Big[\frac{\varepsilon^2}{x^2}\Big(\frac{1}{2}+\ln\Big(\frac{x\mu}{\varepsilon}\Big)\Big)+\frac{\varepsilon^4}{4x^4\mu^2}-\frac{\varepsilon^6}{12\mu^4x^6}+\dots\Big]dx+\dots,$$

$$J_3(\mu) = \int_0^\mu\int_\mu^1 g(x,y)\ln\Big(1+\frac{\varepsilon^2}{x^2y^2}\Big)dxdy,$$

$$J_4(\mu) = \int_0^\mu\int_0^\mu g(x,y)\ln\Big(1+\frac{\varepsilon^2}{x^2y^2}\Big)dxdy = \int_0^\mu\int_0^\mu \big(g(0,0)+xg'_x(0,0)+yg'_y+\dots\big)\ln\Big(1+\frac{\varepsilon^2}{x^2y^2}\Big)dxdy.$$

Для доказательства оценки (1.13) заметим, что

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2y^2z^2h(x,y,z)dxdydz}{\varepsilon^2+x^2y^2z^2} = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 h(x,y,z)dxdydz - \varepsilon^2\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{h(x,y,z)dxdydz}{\varepsilon^2+x^2y^2z^2}. \qquad \square$$

Из разбиения (1.3) и разложений (1.4)–(1.13) следует искомое асимптотическое разложение.

Теорема 2. *Пусть* $f(x,y,z)\in C^2([0,1]\times[0,1]\times[0,1])$. *Тогда*

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{f(x,y,z)dxdydz}{\varepsilon^2+x^2y^2z^2} = f(0,0,0)\Big(\frac{\pi}{4}\frac{1}{\varepsilon}\ln^2\frac{1}{\varepsilon}+\frac{\pi^3}{16}\frac{1}{\varepsilon}\Big)$$

$$+\big(f'_x(0,0,0)+f'_y(0,0,0)+f'_z(0,0,0)\big)\Big(\frac{\pi}{2}\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon}-\frac{\pi}{2}\frac{1}{\varepsilon}\Big)$$

$$+\frac{\pi}{2}\int_0^1 \big(\varphi_1(x,0,0)+\varphi_2(0,x,0)+\varphi_3(0,0,x)\big)\frac{x}{\varepsilon}\ln\frac{x}{\varepsilon}\,dx$$

$$+\big(f''_{xy}(0,0,0)+f''_{yz}(0,0,0)+f''_{xz}(0,0,0)\big)\Big(\frac{\pi}{2}\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{2}\ln^2\frac{1}{\varepsilon}-\ln\frac{1}{\varepsilon}\Big)$$

$$+\frac{\pi}{2}\int\limits_0^1\Big(\frac{x}{\varepsilon}-\ln\frac{1}{\varepsilon}\Big)\big(\varphi'_{1y}(x,0,0)+\varphi'_{1z}(x,0,0)+\varphi'_{2x}(0,x,0)+\varphi'_{2z}(0,x,0)+\varphi'_{3x}(0,0,x)+\varphi'_{3y}(0,0,x)\big)dx$$

$$+\frac{\pi}{2}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 xy\big(\psi_3(x,y,0)+\psi_2(x,0,y)+\psi_1(0,x,y)\big)dxdy\cdot\frac{1}{\varepsilon}$$

$$+f'''_{xyz}(0,0,0)\Big(\frac{1}{6}\ln^3\frac{1}{\varepsilon}+\frac{\pi^2}{24}\ln\frac{1}{\varepsilon}\Big)$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^1\big(\varphi''_{1yz}(x,0,0)+\varphi''_{2xz}(0,x,0)+\varphi''_{3xy}(0,0,x)\big)\ln^2\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)dx$$

$$+\int\limits_0^1\int\limits_0^1\big(\psi'_{3z}(x,y,0)+\psi'_{3y}(x,0,y)+\psi'_{3x}(0,x,y)\big)dxdy\cdot\ln\frac{1}{\varepsilon}+O(1),\quad \varepsilon\to 0,$$

где посредством φ'_{1x}, φ'_{1y}, φ'_{1z} обозначены частные производные функции $\varphi_1(\cdot,\cdot,\cdot)$ по первому, второму и третьему аргументу соответственно независимо от их значений.

З а м е ч а н и е. Рассмотренная в настоящей статье схема может применяться без каких-либо существенных отличий для исследования асимптотики интегралов более высокой размерности вида (0.1), у которых функция $U(x_1,\dots,x_n)$ обращается в ноль на n пересекающихся гиперплоскостях. В частности,

$$\int\limits_0^1\cdots\int\limits_0^1\frac{dx_1\dots dx_n}{\varepsilon^2+x_1^2\dots x_n^2}=\left[\begin{array}{c}t=x_1\dots x_n,\\ dt=x_2\dots x_n dx_1\end{array}\right]=\int\limits_0^1\cdots\int\limits_0^1\int\limits_0^{x_2\dots x_n}\frac{dtdx_2\dots dx_n}{x_2\dots x_n(\varepsilon^2+t^2)}$$

$$=\int\limits_0^1\int\limits_t^1\int\limits_{t/x_n}^1\cdots\int\limits_{t/(x_3\dots x_n)}^1\frac{d(\ln x_2)\dots d(\ln x_{n-1})d(\ln x_n)dt}{\varepsilon^2+t^2}$$

$$=\int\limits_0^1\int\limits_t^1\int\limits_{t/x_n}^1\cdots\int\limits_{t/(x_4\dots x_n)}^1\frac{\ln x_3+\ln(x_4\dots x_n)-\ln t}{\varepsilon^2+t^2}d(\ln x_3)\dots d(\ln x_{n-1})d(\ln x_n)dt$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^1\frac{(-\ln t)^{n-1}}{\varepsilon^2+t^2}dt=[t=\varepsilon\tau]=\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=0}^{n-1}\ln^k\Big(\frac{1}{\varepsilon}\Big)\cdot\frac{C^k_{n-1}}{(n-1)!}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\ln^{n-1-k}(1/\tau)}{1+\tau^2}d\tau+O\big(\ln^{n-1}\varepsilon\big).$$

2. Заключение

Как замечено А. М. Ильиным и А. А. Ершовым в работе [4], уже в трехмерном случае возникают значительные трудности, когда знаменатель подынтегральной функции стремится к нулю на пересекающихся многообразиях различной размерности. Здесь мы рассмотрели построение асимптотического разложения такого вида сингулярных интегралов. Остается открытым вопрос, например, об асимптотике интеграла $\iiint\limits_{\omega}\frac{dxdydz}{\varepsilon^2+U(x,y,z)}$, когда неотрицательная функция $U(x, y, z)$ обращается в ноль на трех пересекающихся кривых. Однако, интерес представляют и случаи, когда предельный знаменатель имеет критические точки более сложного вида, классификация которых имеется, например, в [7; 8].

Авторы признательны А.М. Ильину за постановку целого направления исследований, а также благодарны С.М. Воронину за полезные обсуждения работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Федорюк М.В.** Асимптотика, интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.
2. **Риекстыньш Э.Я.** Асимптотические разложения интегралов. Рига: Зинатне, 1974. Т. 1. 392 с.; Т. 2. 464 с.
3. **Риекстыньш Э.Я.** Асимптотические разложения интегралов. Рига: Зинатне, 1981. Т. 3. 373 с.
4. **Ильин А.М., Ершов А.А.** Асимптотика двумерных интегралов, сингулярно зависящих от малого параметра // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 116–126.
5. **Ильин А.М., Данилин А.Р.** Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 222 с.
6. **Медведева Н.Б.** Об аналитической неразрешимости проблемы устойчивости на плоскости // Успехи мат. наук. 2013. Т. 68, вып. 5(413). С. 147–176.
7. **Арнольд В.И.** Теория катастроф. М.: Изд-во МГУ, 1983. 80 с.
8. **Брекер Т., Ландер Л.** Дифференцируемые ростки и катастрофы. М.: Платон, 1997. 208 с.

Ершов Александр Анатольевич
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: ale10919@yandex.ru

Поступила 22.05.2015

Русанова Мария Игоревна
студент
Челябинский государственный университет
e-mail: rusanova_mary94@mail.ru