ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 1 2016

УДК 512.517

СТРОГАЯ ВЕЩЕСТВЕННОСТЬ И РАЦИОНАЛЬНОСТЬ ГРУПП УНИТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ ПОРЯДКА $\leqslant 8$ НАД ПОЛЯМИ ХАРАКТЕРИСТИКИ 2 [1]

О. А. Дубина, С. Г. Колесников, Н. С. Манагарова

Доказывается, что произвольная матрица из группы унитреугольных матриц $UT_n(K)$, $n \leqslant 8$, над произвольным полем K сопряжена в ней с матрицей, граф коммутативности которой является лесом. Отсюда выводится строгая вещественность и рациональность группы $UT_n(K)$ при $n \leqslant 8$ над произвольным полем K характеристики 2.

Ключевые слова: строго вещественная группа, рациональная группа, группа унитреугольных матриц.

O. A. Dubina, S. G. Kolesnikov, N. S. Managarova. The strong reality and rationality of groups of unitriangular matrices of order ≤ 8 over fields of characteristic 2.

It is proved that an arbitrary matrix from the group of unitriangular matrices $UT_n(K)$, $n \leq 8$, over an arbitrary field K is conjugate in this group to a matrix whose commutativity graph is a forest. From this fact we derive the strong reality and rationality of the group $UT_n(K)$ for $n \leq 8$ over an arbitrary field K of characteristic 2.

Keywords: strong real group, rational group, group of unitriangular matrices.

Введение

В работе [1] А. А. Кирилловым была высказана гипотеза о вещественности всех неприводимых комплексных характеров группы $UT_n(2)$ — нижних (в оригинале верхних) унитреугольных матриц порядка $n \geqslant 2$ над полем из двух элементов. Напомним, что характер конечной группы называется *вещественным* (*рациональным*), если все его значения лежат в поле вещественных (рациональных) чисел. Группа, все комплексные неприводимые характеры которой вещественны, называется *вещественной*, а если все они рациональны — *рациональной* группой (иногда — *Q-группой*). Отметим, что вещественность значения произвольного характера на фиксированном элементе группы равносильна сопряженности данного элемента с ему обратным. Используя компьютерные вычисления и результаты из [2;3], Дж. Арреги и А. Вера-Лопес подтвердили гипотезу А. А. Кириллова для всех $n \leqslant 12$. Позже И. Айзекс и Д. Карагёзян [4] указали пример унитреугольной матрицы порядка 13 над полем $GF(2)$ (с опечатками, исправленный вариант приведен в [5]), которая не сопряжена в $UT_{13}(2)$ со своей обратной матрицей и, таким образом, гипотеза о вещественности группы $UT_n(2)$ в общем случае была опровергнута.

Помимо приведенного результата в [4] был установлен признак сопряженности матрицы $A = \|a_{ij}\| \in UT_n(K)$, K — поле характеристики p, с любой своей степенью A^r такой, что $r \equiv 1 \pmod p$. Его суть состоит в следующем. Сопоставим матрице A ориентированный граф $\overrightarrow{\Gamma}(A)$, множество вершин которого совпадает с множеством отличных от нуля недиагональных элементов матрицы A, две вершины a_{ij} и a_{km} соединяются направленным ребром $a_{ij} \to a_{km}$, только если $j = k$. Оказывается [4, теорема на с. 708], что если на вершинах $\overrightarrow{\Gamma}(A)$ можно задать такую целочисленную функцию F (будем называть ее L-функцией), что $F(a_{ij}) + 1 = F(a_{km})$, когда ребро $a_{ij} \to a_{km}$ принадлежит графу $\overrightarrow{\Gamma}(A)$, то матрица A сопряжена с любой своей степенью A^r такой, что $r \equiv 1 \pmod p$. В частности, когда поле K имеет характеристику 2, получаем достаточное условие сопряженности матрицы A с любой своей нечетной степенью.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-01-00707).

Последнее замечание позволяет исследовать вопрос не только о вещественности характеров $UT_n(2^q)$, но и об их рациональности. Напомним, что рациональность значений всех комплексных неприводимых характеров произвольной конечной группы G на элементе $g \in G$ эквивалентна сопряженности g со всеми своими степенями g^m такими, что НОД$(|g|, m) = 1$ (см., например, [6, предложение 9]). Используя построенные Дж. Арреги и А. Вера-Лопес таблицы представителей классов сопряженных элементов групп $UT_n(2)$ для небольших n, И. Айзекс и Д. Карагёзян при $n \leqslant 6$ выяснили, что в каждом классе лежит матрица A, граф $\overrightarrow{\Gamma}(A)$ которой обладает L-функцией, и, как следствие, установили рациональность группы $UT_n(2)$ для указанных n. В дальнейшем, говоря о рациональной группе, мы будем иметь в виду периодическую группу, в которой каждый элемент сопряжен с любой своей степенью, взаимно простой с его порядком. Данное определение не изменяет класс конечных рациональных групп, а с другой стороны, позволяет рассматривать вопрос о рациональности унитреугольной группы над произвольным полем характеристики 2.

Близкой к задачам описания вещественных и рациональных унитреугольных групп, в частности по методам исследования, является задача описания строго вещественных максимальных унипотентных подгрупп групп Шевалле над полями характеристики 2, записанная Я. Н. Нужиным в Коуровскую тетрадь [7, вопрос 16.76]. Напомним, что группа G называется *строго вещественной*, если любой ее неединичный элемент является строго вещественным, т. е. сопряжен некоторой инволюцией из G со своим обратным элементом. В работах [8–10] ответ на поставленный вопрос был получен для групп Шевалле классического лиева типа и ранга $n \leqslant 4$ (для типа A_n при ограничении $n \leqslant 6$), ранга $n \geqslant 13$, а также для всех исключительных лиевых типов. Кроме того, в [9] было указано достаточное условие строгой вещественности элемента группы, в основе которого лежит следующий факт (см. [11, лемма 1]). Пусть G — произвольная группа, $g_1, \dots, g_n$ — любые ее элементы и $g = g_1 \dots g_n$. Сопоставим g неориентированный граф $\Gamma(g)$ (следуя [9], будем называть его графом коммутативности g), вершинами которого являются элементы $g_1, \dots, g_n$, две вершины g_i и g_j соединяются ребром в том и только том случае, если коммутатор $[g_i, g_j] = g_i^{-1} g_j^{-1} g_i g_j$ отличен от единицы. Оказывается, когда $\Gamma(g)$ — лес (т. е. граф без циклов), то для любой перестановки π чисел $1, \dots, n$ элемент g сопряжен в G с произведением $g_{\pi(1)} \dots g_{\pi(n)}$. В [9, лемма 3] было замечено, что если элементы $g_1, \dots, g_n$ являются инволюциями и $\Gamma(g)$ — лес, то множество вершин $\Gamma(g)$ разбивается на два непересекаюшихся подмножества I и J таким образом, что произведения всех элементов из I и всех элементов из J, взятые в любом порядке, являются инволюциями. Вспомнив, что произвольная матрица $A = \|a_{ij}\| \in UT_n(K)$ раскладывается в произведение трансвекций $(t_{ij}(a_{ij}) = E + a_{ij} e_{ij},\ i \neq j)$

$$A = t_{21}(a_{21}) t_{31}(a_{31}) t_{32}(a_{32}) \dots t_{n,n-1}(a_{n,n-1}),$$

и, когда поле K имеет характеристику 2, каждая неединичная трасвекция является инволюцией, получаем достаточное условие строгой вещественности матрицы A.

Цель статьи — распространить результаты [4] о рациональности $UT_n(2)$ при $n \leqslant 6$ (в смысле данного выше определения) на произвольные поля характеристики 2 и $n \leqslant 8$; установить строгую вещественность группы $UT_8(K)$ над произвольным полем K характеристики 2.

Статья организована следующим образом. В первом разделе для произвольного поля K и любого $n \geqslant 2$ доказываются две теоремы о сопряженности фиксированной матрицы из группы $UT_n(K)$ с выделенными отличными от нуля поддиагональными элементами с матрицей, у которой почти все элементы, стоящие ниже (в столбце) и левее (в строке) выделенных элементов, равны нулю. С учетом полученных результатов во втором разделе устанавливается (теорема 3), что при $n \leqslant 8$ в каждом классе сопряженных элементов группы $UT_n(K)$ лежит матрица, граф коммутативности которой является лесом. Как отмечено выше, отсюда следует строгая вещественность групп $UT_n(K)$ при $n \leqslant 8$ над полями характеристики 2. Поскольку при любом выборе ориентации ребер произвольного леса полученный ориентированный граф всегда обладает L-функцией (лемма 1 настоящей статьи), то из теоремы 3 также следует рациональность группы $UT_n(K)$ при $n \leqslant 8$ и $\operatorname{char} K = 2$. Завершается статья разделами, в которых доказывается просто проверяемый критерий рациональности 2-группы и устанавливается (без компьютерных вычислений) несопряженность матрицы из [5] со своей обратной.

1. Теоремы сопряженности в унитреугольной группе

Пусть K — произвольное поле. С каждой матрицей $A = ||a_{ij}|| \in UT_n(K)$, $n \geqslant 2$, свяжем множество $M = M(A)$, которое по определению состоит из таких натуральных чисел k, что $a_{k,k-1} \neq 0$. Непустое подножество $N \subseteq M$ назовем *связным*, если вместе с каждыми i, j, $i \leqslant j$, входящими в N, оно содержит и все натуральные числа отрезка $[i, j]$. Максимальные (относительно включения) связные подмножества M определяются однозначно, и M является их дизъюнктным объединением.

Теорема 1. *Пусть K — поле, $A = \|a_{ij}\| \in UT_n(K)$. Пусть также $M' \subseteq M = M(A)$ непусто и $M'_1, \ldots, M'_m$ — все максимальные связные подмножества M', упорядоченые таким образом, что для любого $a \in M'_i$ и $b \in M'_j$ имеем $a < b$, когда $i < j$. Тогда матрица A сопряжена в $UT_n(K)$ с матрицей $B = \|b_{ij}\|$, элементы которой удовлетворяют условиям*:

1) $b_{i,i-1} = a_{i,i-1}$ *для всех* $i, 2 \leqslant i \leqslant n$;

2) $b_{ij} = 0$, *если* а) $j + 1 \in M'$ *и* $i > j + 1$ *либо* б) $i \in M'$, $j < i - 1$ *и* j *отлично от максимальных элементов множеств* $M'_1, \ldots, M'_{m-1}$.

Перед тем как перейти к доказательству теоремы, приведем пример, иллюстрирующий ее применение.

П р и м е р 1. Пусть известно, что элементы $a_{32}, a_{54}, a_{87}, a_{98}$ матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{81} & a_{82} & a_{83} & a_{84} & a_{85} & a_{86} & a_{87} & 1 & 0 \\ a_{91} & a_{92} & a_{93} & a_{94} & a_{95} & a_{96} & a_{97} & a_{98} & 1 \end{pmatrix}$$

отличны от нуля, а в качестве M' выбрано множество, состоящее из чисел $3, 5, 8, 9$. Тогда M' является объединением максимальных связных подмножеств $M'_1 = \{3\}$, $M'_2 = \{5\}$, $M'_3 = \{8, 9\}$ и по теореме 1 матрица A сопряжена в $UT_9(K)$ с матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{41} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{53} & a_{54} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{61} & 0 & b_{63} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_{71} & 0 & b_{73} & 0 & b_{75} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{83} & 0 & b_{85} & 0 & a_{87} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b_{93} & 0 & b_{95} & 0 & 0 & a_{98} & 1 \end{pmatrix}$$

при подходящих b_{ij}.

Доказательство теоремы 1. Начнем с замечания. Известно и легко проверяется, что 1) умножение произвольной матрицы A слева на трансвекцию $t_{ij}(\alpha)$, $i \neq j$, равносильно прибавлению к i-й строке матрицы A ее j-й строки, умноженной на α; 2) умножение матрицы A справа на трансвекцию $t_{ij}(\alpha)$ равносильно прибавлению к j-му столбцу матрицы A ее i-го столбца, умноженного на α. Следовательно, при сопряжении матрицы A трансвекцией $t_{ij}(\alpha)$ к i-й строке A прибавляется j-я строка, умноженная на $-\alpha$, а к j-му столбцу полученной матрицы прибавляется ее i-й столбец, умноженный на α. В частности, при сопряжении унитреугольной матрицы $A = \|a_{ij}\| \in UT_n(K)$ трансвекцией $t_{ij}(\alpha)$, $i > j$, элементы A, стоящие в i-й строке и j-м столбце, изменяются по формулам

$$a'_{ik} = a_{ik} - \alpha a_{jk}, \quad k = 1, \dots, j-1; \quad a'_{sj} = a_{sj} + \alpha a_{si}, \quad s = i+1, \dots, n,$$

а элементы, стоящие на других местах, не изменяются. Например, не изменяются элементы, стоящие под главной диагональю (на местах $(2,1), (3,2), \dots, (n, n-1)$). Поскольку произвольная матрица из группы $UT_n(K)$ раскладывается в произведение лежащих в ней трансвекций, последнее замечание означает, что любая матрица B, сопряженная в $UT_n(K)$ с матрицей A, удовлетворяет условию 1).

Отметим, что представленные ниже рассуждения очень похожи на рассуждения из метода Гаусса, однако они проводятся более осторожно в связи с тем, что приходится работать одновременно со строками и столбцами матрицы.

Перейдем к доказательству. По условию $a_{k,k-1} \neq 0$ для всякого $k \in M'$. Зафиксируем $k \in M' \setminus \{n\}$ (если множество $M' \setminus \{n\}$ пусто, то условию 2 а) не удовлетворяет ни одна пара индексов и поэтому его можно считать выполненым), положим $\alpha_i^{(k)} = a_{i,k-1}/a_{k,k-1}$, $i = k+1, \dots, n$, и проделаем над матрицей $A' = A - E$ следующие преобразования: k-ю строку A' будем последовательно умножать на $-\alpha_{k+1}^{(k)}, \dots, -\alpha_n^{(k)}$ и прибавлять соответственно к $k+1, \dots, n$-й строкам A'; затем к k-му столбцу полученной матрицы прибавим столбцы с номерами $k+1, \dots, n$, умноженные соответственно на $\alpha_{k+1}^{(k)}, \dots, \alpha_n^{(k)}$. Указанные преобразования над матрицей A' равносильны умножению A' справа на матрицу $T_k = t_{k+1,k}(\alpha_{k+1}^{(k)}) \dots t_{n,k}(\alpha_n^{(k)})$, а слева — на T_k^{-1}, причем

$$T_k^{-1} A T_k = T_k^{-1}(E + A')T_k = E + T_k^{-1} A' T_k.$$

Заметим, что матрицы A' и $T_k^{-1} A' T_k$ могут отличаться только элементами, стоящими на пересечении строк с номерами $k+1, \dots, n$ и столбцов с номерами $1, \dots, k$. Причем если $a_{kj} = 0$ и $j < k-1$, то j-е столбцы матриц A' и $T_k^{-1} A' T_k$ совпадают.

Обозначим через $k_1, \dots, k_s$ все элементы множества $M' \setminus \{n\}$, упорядоченные в порядке возрастания. Будем сопрягать матрицу A сначала матрицей T_{k_1}, затем матрицей T_{k_2}, элементы $\alpha_j^{(k_2)}$ которой вычисляются по матрице $A_1 = T_{k_1}^{-1} A T_{k_1}$, и так далее. После сопряжения матрицей T_{k_s} получим сопряженную с A матрицу, обозначим ее через $C = \|c_{ij}\|$, у которой все элементы, стоящие в столбцах ниже элементов $a_{k,k-1}$, где $k \in M'$, равны нулю. Таким образом, матрица, сопряженная с A и удовлетворяющая условиям 1) и 2 а), существует.

Покажем, что условия 2 б) также можно удовлетворить. Обозначим через R множество таких натуральных чисел j, что $j \in M'$ или $j+1 \in M'$, а через L обозначим совокупность максимальных элементов множеств $M'_1, \dots, M'_{m-1}$. Зафиксируем $k \in M' \setminus \{2\}$ (если $M' \setminus \{2\} = \varnothing$, то условию 2 б) не удовлетворяет ни одна пара индексов и поэтому его можно считать выполненым), для каждого $j \in R_k = \{1, \dots, k-2\} \setminus R$ положим $\beta_j^{(k)} = -c_{kj}/c_{k,k-1}$ и определим матрицу S_k как произведение трансвекций $t_{k-1,j}(\beta_j)$ для всех таких j. Матрица $C' S_k$, где $C' = C - E$, получается из C' прибавлением $k-1$-го столбца C', умноженного на β_j, к j-му столбцу C' для всех $j \in R_k$. Следует заметить, что кроме $c_{k,k-1}$ все элементы $k-1$-го столбца матрицы C' равны нулю, поэтому строки матриц C' и $C' S_k$, отличные от k-й, совпадают. Далее, матрица $S_k^{-1} C' S_k$ получается из матрицы $C' S_k$ прибавлением к ее k-й строке всех строк с номерами $j \in R_k$, умноженных $-\beta_j$. Здесь также следует отметить, что элементы k-й строки матрицы $S_k^{-1}C'S_k$, стоящие в столбцах с номерами $j \in R_k$, останутся равными нулю, поскольку элементы матрицы $C'S_k$, стоящие в i-й строке и j-м столбце, где $i, j \in R_k$, равны нулю. Из приведенных замечаний следует, что все элементы матрицы $S_k^{-1}C'S_k$, стоящие в k-й строке левее $a_{k,k-1}$ и в столбцах, номера которых не лежат в L, будут равны нулю.

Заставим k пробегать элементы множества $M' \setminus \{2\}$ в порядке убывания от максимального до минимального элементов и будем сопрягать сначала C, а затем каждую вновь полученную матрицу, матрицей S_k, элементы β_j которой вычисляются по предыдущей матрице. В результате получим сопряженную с A матрицу, элементы которой будут удовлетворять условиям 1) и 2) теоремы. Теорема доказана.

Действуя в обратном порядке, т. е. добиваясь равенства нулю сначала элементов строк, а затем столбцов, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть K — поле, $A = \|a_{ij}\| \in UT_n(K)$. Предположим, что подмножество $M' \subseteq M = M(A)$ непусто, а $M'_1, \ldots, M'_m$ — все его максимальные связные подмножества. Тогда матрица A сопряжена в $UT_n(K)$ с матрицей $B = \|b_{ij}\|$, удовлетворяющей условиям:*

1) $b_{i,i-1} = a_{i,i-1}$ *для всех* $i, 2 \leqslant i \leqslant n$;

2) $b_{ij} = 0$, *если* а) $i \in M'$ *и* $j < i - 1$ *либо* б) $j + 1 \in M'$, $i > j + 1$ *и* $i + 1$ *отлично от минимальных элементов множеств* $M'_2, \ldots, M'_m$.

П р и м е р 2. Так, по теореме 2 матрица из примера 1 сопряжена в $UT_9(K)$ с матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{41} & b_{42} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{61} & 0 & b_{63} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_{71} & b_{72} & b_{73} & b_{74} & b_{75} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{87} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{98} & 1 \end{pmatrix}$$

при подходящих b_{ij}.

З а м е ч а н и е 1. Теоремы 1 и 2 останутся верными, если первая, вторая и так далее s-я диагонали матрицы A (состоит из элементов, у которых разность между первым и вторым индексом равна s) состоят из нулей, а множество M определяется по $s + 1$-й диагонали A.

2. Основная теорема и ее следствия

Как отмечалось во введении, строгая вещественность произвольной матрицы A из группы $UT_n(K)$, $\operatorname{char} K = 2$, следует из сопряженности A с матрицей, граф коммутативности которой является лесом. Как показывают следующая лемма 1 и теорема из [4, с. 708], это условие является достаточным и для сопряженности A с любой своей нечетной степенью.

Лемма 1. *При любом выборе ориентаций ребер произвольного леса Γ полученный ориентированный граф обладает L-функцией.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Лемму, очевидно, достаточно доказать для случая, когда граф Γ является деревом.

Зафиксируем какую-либо ориентацию ребер графа Γ и обозначим полученный ориентированный граф через $\overrightarrow{\Gamma}$. Будем строить изоморфный $\overrightarrow{\Gamma}$ граф и L-фунцию на нем следующим образом. На первом шаге выберем произвольным образом начальную вершину, обозначим ее v_1 и припишем ей число t_1. Далее на каждом следующем шаге будем добавлять к полученному на предыдущем шаге графу по одной вершине и одному ребру таким образом, чтобы вновь образованный граф всегда оставался связным и был изморфен подграфу из $\overrightarrow{\Gamma}$, порожденному выбранными вершинами. При этом добавленной на k-м шаге вершине v_k мы приписываем число $t_k = t_i + 1$, если она является концом добавленного на этом шаге ребра, а добавленная ранее (не обязательно на предыдущем шаге) вершина v_i — его началом, в противном случае полагаем $t_k = t_i - 1$. Очевидно, что по завершении построения изоморфного $\overrightarrow{\Gamma}$ графа мы построим и требуемую L-функцию. Лемма доказана.

Теорема 3. *Каждый класс сопряженных элементов группы $UT_n(K)$, $n \leqslant 8$, K — произвольное поле, содержит матрицу, граф коммутативности которой является лесом.*

Доказательство. Для всякого $n \geqslant 2$ имеет место изоморфизм $UT_n(K)/H \simeq UT_{n-1}(K)$, где $H = \langle t_{n,i}(x) \mid x \in K,\ 1 \leqslant i \leqslant n-1\rangle$. Поэтому теорему достаточно доказать для $n = 8$.

Пусть $A = \|a_{ij}\|$ — произвольная нееденичная матрица из $UT_8(K)$. Покажем, что матрица A сопряжена в $UT_8(K)$ с матрицей, граф коммутативности которой является лесом. Доказательство разобьем на несколько случаев, в зависимости от равенства или неравенства нулю элементов a_{43}, a_{54}, a_{65} матрицы A.

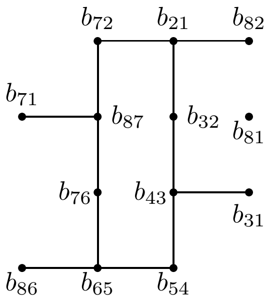

Рис. 1. Граф G_1.

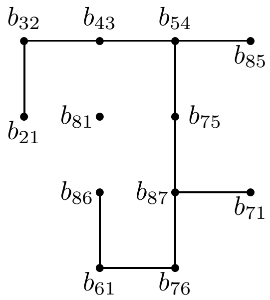

Рис. 2. Граф G_2.

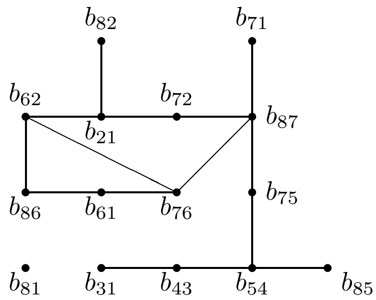

Рис. 3. Граф G_3.

Случай 1. Пусть $a_{43} \neq 0$, $a_{54} \neq 0$, $a_{65} \neq 0$. По теореме 1 (с $M' = \{4,5,6\}$) матрица A сопряжена в $UT_8(K)$ с матрицей B, элементы b_{ij} которой равны нулю, если $4 \leqslant i \leqslant 6$, $1 \leqslant j < i-1$ или $3 \leqslant j \leqslant 5$, $j < i \leqslant 8$. Граф $\Gamma(B)$ является подграфом изображенного на рис. 1 графа G_1 (обозначаем $\Gamma(B) \subseteq G_1$). Если $\Gamma(B)$ имеет цикл, то элементы $b_{21}, b_{32}, \ldots, b_{87}$ отличны от нуля, а в этом случае по теореме 1 B сопряжена с матрицей $E + b_{21}e_{21} + b_{32}e_{32} + \ldots + b_{87}e_{87}$, граф коммутативности которой является цепью.

Случай 2. Пусть $a_{43} \neq 0$, $a_{54} \neq 0$, $a_{65} = 0$. Если $a_{32} \neq 0$, то по теореме 1 ($M' = \{3,4,5\}$) матрица A сопряжена с матрицей B, граф $\Gamma(B)$ которой содержится в графе G_2 (рис. 2) и поэтому не имеет циклов. Когда $a_{32} = 0$, матрица A сопряжена по теореме 1 ($M' = \{4,5\}$) с матрицей B и $\Gamma(B) \subseteq G_3$ (рис. 3). Если $\Gamma(B)$ содержит хотя бы один цикл, то $b_{76} \neq 0$ и, применив к B теорему 1 ($M' = \{4,5,7\}$), получим матрицу D с $\Gamma(D) \subseteq G_3'$, где граф G_3' получается из G_3 после удаления вершин b_{86}, b_{72}, b_{71} и инцидентных им ребер (обозначаем $G_3' = G_3 - \langle b_{86}, b_{72}, b_{71}\rangle$). Граф G_3' циклов не имеет.

Замечание 2. Для произвольной матрицы A обозначим через ${}^tA$ матрицу, полученную из A симметрией ее элементов относительно побочной диагонали. Нетрудно видеть, что для любых матриц A, B имеет место равенство ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ и если $A \in UT_n(K)$, то графы $\Gamma(A)$ и $\Gamma({}^tA)$ изоморфны. Отсюда, в частности, следует, что если матрица $A \in UT_n(K)$ сопряжена в $UT_n(K)$ с матрицей B, граф коммутативности которой является лесом, то это же справедиво и для матрицы ${}^tA$. Таким образом, при возникновении симметричных относительно побочной диагонали случаев достаточно рассматривать только один из них.

С л у ч а й 3. Пусть $a_{43} \neq 0$, $a_{54} = 0$, $a_{65} \neq 0$. Предположим, что $a_{32} \neq 0$. По теореме 1 ($M' = \{3, 4, 6\}$) матрица A сопряжена с матрицей B, граф $\Gamma(B)$ которой содержится в G_4 (рис. 4), и если $b_{64} = 0$ или $b_{76} = 0$, то $\Gamma(B)$ — лес. Когда $b_{64} \neq 0$ и $b_{76} \neq 0$, положим

$$U = t_{76}\Big(\frac{b_{74}}{b_{64}}\Big)t_{87}\Big(\frac{b_{86}}{b_{76}} + \frac{b_{74}b_{87}}{b_{64}b_{76}}\Big)t_{65}\Big(\frac{b_{74}b_{65}}{b_{64}b_{76}}\Big)t_{51}\Big(\frac{b_{74}b_{51}}{b_{64}b_{76}}\Big)$$

и рассмотрим матрицу $B' = U^{-1}BU$. Имеем $\Gamma(B') \subseteq G_4'$, где G_4' получается из G_4 в результате удаления вершин b_{86}, b_{74} и инцидентных им ребер и добавления вершины b_{85} и ребра (b_{51}, b_{85}) (пишем $G_4' = (G_4 - \langle b_{86}, b_{74}\rangle) + \langle b_{85}\rangle)$, поскольку b_{51} — единственная вершина из $G_4 - \langle b_{86}, b_{74}\rangle$, не коммутирующая с b_{85}. $\Gamma(B')$ не имеет циклов.

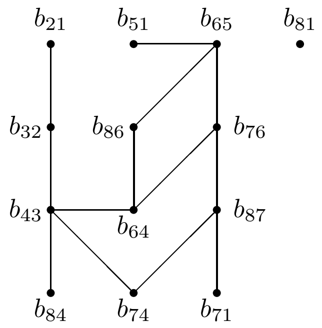

Рис. 4. Граф G_4.

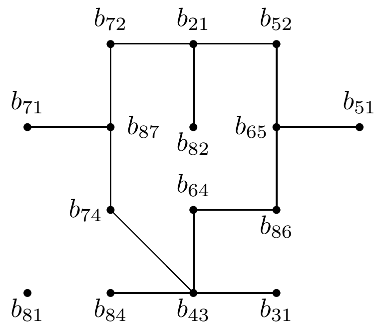

Рис. 5. Граф G_5.

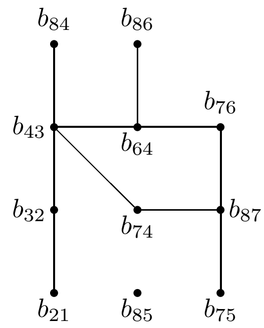

Рис. 6. Граф G_a.

Пусть $a_{32} = 0$. Когда $b_{76} \neq 0$, возвращаемся к рассмотренному выше симметричному случаю: $a_{54} = 0$ и $a_{32} \neq 0, a_{43} \neq 0, a_{65} \neq 0$. Иначе, матрица A по теореме 1 ($M' = \{4, 6\}$) сопряжена с матрицей B и $\Gamma(B) \subseteq G_5$ (рис. 5). Если $\Gamma(B)$ содержит цикл, то $b_{52} \neq 0$ и, сопрягая B матрицей $U = t_{75}(b_{72}/b_{52})t_{86}(b_{87}b_{72}/b_{52}b_{65})$, получим $\Gamma(B^U) \subseteq G_5 - \langle b_{72}\rangle$, т. е. $\Gamma(B^U)$ — лес.

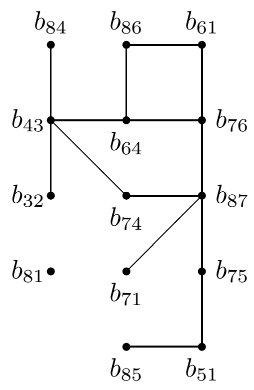

Рис. 7. Граф G_b.

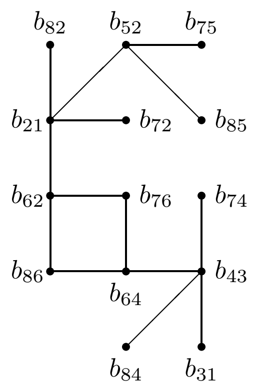

Рис. 8. Граф G_c^1.

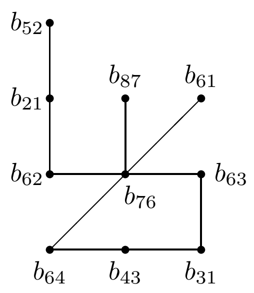

Рис. 9. Граф G_c^2.

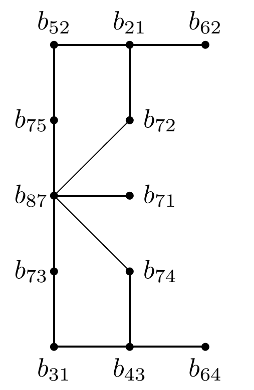

Рис. 10. Граф G_c^3.

С л у ч а й 4. Пусть $a_{43} \neq 0$, $a_{54} = a_{65} = 0$. Чтобы не анализировать граф с большим количеством ребер, рассмотрим четыре подслучая: a) $a_{21} \neq 0$, $a_{32} \neq 0$; b) $a_{21} = 0$, $a_{32} \neq 0$; c) $a_{21} \neq 0$, $a_{32} = 0$; d) $a_{21} = a_{32} = 0$.

a), b) По теореме 1 матрица A сопряжена: в случае a) ($M' = \{2, 3, 4\}$) — с матрицей B_a, в случае b) ($M' = \{3, 4\}$) — с матрицей B_b, где $\Gamma(B_a) \subseteq G_a$ и $\Gamma(B_b) \subseteq G_b$ (см. рис. 6 и 7 соответственно). Если $\Gamma(B_a)$ содержит цикл, то $b_{64} \neq 0$ и $\Gamma(B_a^U)$, где $U = t_{76}(b_{74}/b_{64})$, содержится в графе без циклов $G_a - \langle b_{74}\rangle$. Так же $b_{64} \neq 0$, когда $\Gamma(B_b)$ содержит цикл, и $\Gamma(B_b^V)$, где $V = U \cdot t_{41}(-b_{61}/b_{64})$, содержится в графе без циклов $G_b - \langle b_{74}, b_{61}\rangle$.

c) Если $a_{87} = 0$, то по теореме 2 ($M' = \{2, 4\}$) матрица A сопряжена с матрицей B и $\Gamma(B) \subseteq G_c^1$ (рис. 8). Граф $\Gamma(B)$ является лесом или $b_{76} \neq 0$. При $b_{76} \neq 0$ имеем включение $\Gamma(B^U)$, где $U = t_{87}(b_{86}/b_{76})$, в граф без циклов $G_c^1 - \langle b_{86}\rangle$.

Пусть далее $a_{87} \neq 0$. Если $a_{76} \neq 0$, то по теореме 2 ($M' = \{2, 4, 7, 8\}$) матрица A сопряжена с матрицей B и $\Gamma(B) \subseteq G_c^2$ (рис. 9). Когда $b_{64} \neq 0$, граф $\Gamma(B^U)$, где $U = t_{43}(-b_{63}/b_{64})$, содержится в графе без циклов $(G_c^2 - \langle b_{63} \rangle) + \langle b_{41} \rangle$, иначе, лесом является граф $\Gamma(B)$. Если, напротив, $a_{76} = 0$, то по теореме 2 ($M' = \{2, 4, 8\}$) матрица A сопряжена с матрицей B и $\Gamma(B) \subseteq G_c^3$ (рис. 10). Положив $U = t_{74}(b_{73}/b_{43})$, будем иметь $\Gamma(B^U) \subseteq \bar{G}_c^3 = (G_c^3 - \langle b_{73} \rangle) + \langle b_{84} \rangle$. Если $\Gamma(B^U)$ имеет цикл, то $b_{52} \neq 0$ и, положив $V = t_{75}(b_{72}/b_{52})$, получим включение $\Gamma(B^{UV})$ в граф без циклов $(\bar{G}_c^3 - \langle b_{72} \rangle) + \langle b_{85} \rangle$.

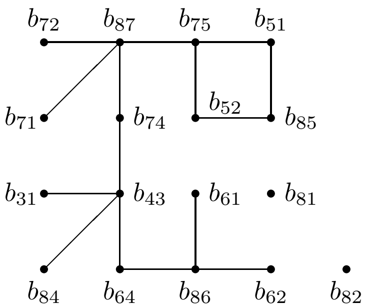

Рис. 11. Граф G_d^1.

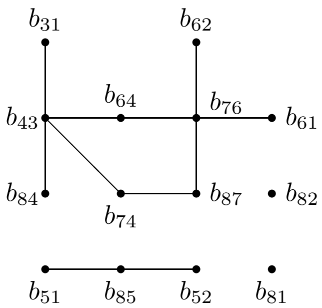

Рис. 12. Граф G_d^2.

d) Пусть $a_{76} = 0$. По теореме 1 ($M' = \{4\}$) матрица A сопряжена с матрицей B и $\Gamma(B) \subseteq G_d^1$ (рис. 11). Если $\Gamma(B)$ содержит цикл, то $b_{75} \neq 0$ и, положив $U = t_{87}(b_{85}/b_{75})$, получим включение $\Gamma(B^U)$ в граф без циклов $G_d^1 - \langle b_{85} \rangle$. Предположим, что $a_{76} \neq 0$. Тогда по теореме 1 ($M' = \{4, 7\}$) матрица A сопряжена с матрицей B и $\Gamma(B) \subseteq G_d^2$ (рис. 12). Если $\Gamma(B)$ не является лесом, то $b_{74} \neq 0$. Полагая в этом случае $U = t_{76}(b_{74}/b_{64}) t_{87}(b_{87} b_{64}/b_{64} b_{76})$, получим включение $\Gamma(B^U)$ в граф без циклов $(G_d^2 - \langle b_{74} \rangle) + \langle b_{72}, b_{71} \rangle$.

С л у ч а й 5. Пусть $a_{54} \neq 0$, $a_{43} = a_{65} = 0$. Как и выше, рассмотрим четыре подслучая: a) $a_{21} \neq 0$, $a_{32} \neq 0$; b) $a_{21} \neq 0$, $a_{32} = 0$; c) $a_{21} = 0$, $a_{32} \neq 0$; d) $a_{21} = a_{32} = 0$.

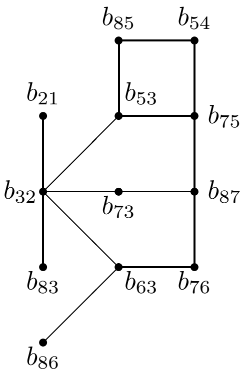

Рис. 13. Граф G_a.

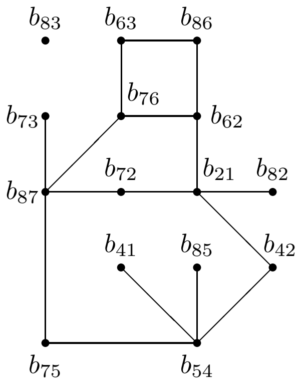

Рис. 14. Граф G_b.

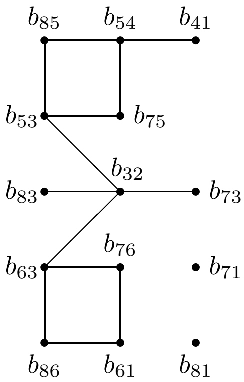

Рис. 15. Граф G_c.

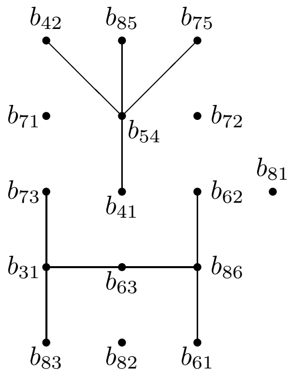

Рис. 16. Граф G_d.

a) По теореме 1 ($M' = \{1, 5\}$) матрица A сопряжена с матрицей B, и $\Gamma(B) \subseteq G_a$ (рис. 13). Если $b_{53} = 0$ и $\Gamma(B)$ имеет цикл, то этот цикл единственный и $b_{63} \neq 0$. Граф $\Gamma(B^U)$, где $U = t_{76}(b_{73}/b_{63})$, содержится в графе $G_a - \langle b_{53}, b_{73} \rangle$, который является лесом. Пусть $b_{53} \neq 0$. Сопрягая B матрицей $U = t_{65}(b_{63}/b_{53}) t_{75}(b_{73}/b_{53})$, получим матрицу D, граф $\Gamma(D)$ которой содержится в $G_a' = (G_a - \langle b_{63}, b_{73} \rangle) + \langle b_{64}, b_{74} \rangle$. Если $\Gamma(D)$ обладает циклом, то он единственный и $d_{75} \neq 0$. Граф $\Gamma(D^V)$, где $V = t_{87}(d_{85}/d_{75})$, циклов не содержит.

b) По теореме 2 ($M' = \{2, 5\}$) матрица A сопряжена с матрицей B и $\Gamma(B) \subseteq G_b$ (рис. 14). Если $b_{87} = 0$, то граф $\Gamma(B)$ может содержать один простой цикл, проходящий через b_{86} и b_{76}. В этом случае граф $\Gamma(B^U)$, где $U = t_{87}(b_{86}/b_{76})$, содержится в графе без циклов $G_b -$

$\langle b_{87}, b_{86}\rangle$. Когда $b_{87} \neq 0$, можем дополнительно считать, что $b_{76} = 0$, иначе ${}^tB$ удовлетворяет a). Остается заметить, что $\Gamma(B)$ — лес, если $b_{75} = 0$, в противном случае $\Gamma(B^U)$, где $U = t_{52}(-b_{72}/b_{75})t_{87}(b_{85}/b_{75})$, содержится в графе без циклов $(G_b - \langle b_{76}, b_{72}, b_{85}\rangle) + \langle b_{51}, b_{82}\rangle$.

c) С самого начала можем предполагать, что $a_{87} = 0$, так как иначе матрица ${}^tA$ удовлетворяет условию a) или b). С учетом этого предположения матрица A сопряжена по теореме 1 ($M' = \{3, 5\}$) с матрицей B, граф $\Gamma(B)$ которой содержится в графе G_c (рис. 15). Сопрягая матрицу B матрицами: $U = t_{87}(b_{85}/b_{75})$, если $b_{75} \neq 0$, $b_{63} = 0$, далее, $V = t_{31}(-b_{61}/b_{63})$, когда $b_{75} = 0$, $b_{63} \neq 0$, наконец, произведением UV, если $b_{75} \neq 0$ и $b_{63} \neq 0$, — будем иметь $\Gamma(B^U) \subseteq G_c - \langle b_{85}, b_{63}\rangle$, $\Gamma(B^V) \subseteq (G_c - \langle b_{61}, b_{75}\rangle) + \langle b_{51}\rangle$, $\Gamma(B^{UV}) \subseteq (G_c - \langle b_{85}, b_{61}\rangle) + \langle b_{51}\rangle$. Сейчас остается заметить, что графы из правых частей включений циклов не содержат.

d) Когда $a_{76} \neq 0$ или $a_{87} \neq 0$, матрица ${}^tA$ удовлетворяет одному из рассмотренных выше условий a)–c), поэтому будем предполагать, что $a_{76} = a_{87} = 0$. В этом случае матрица A по теореме 1 ($M = \{5\}$) сопряжена с матрицей, граф коммутативности которой содержится в графе без циклов G_d (рис. 16).

С л у ч а й 6. Пусть $a_{43} = a_{54} = a_{65} = 0$. Также рассмотрим четыре подслучая: a) $a_{21} \neq 0$, $a_{32} \neq 0$; b) $a_{21} \neq 0$, $a_{32} = 0$; c) $a_{21} = 0$, $a_{32} \neq 0$; d) $a_{21} = a_{32} = 0$.

a) По теореме 1 ($M' = \{2, 3\}$) матрица A сопряжена с матрицей B и $\Gamma(B) \subseteq G_a$ (рис. 17). Если $b_{53} \neq 0$, то, положив $U = t_{65}(b_{63}/b_{53})t_{75}(b_{73}/b_{53})$, получим включение $\Gamma(B^U)$ в граф без циклов $G_a - \langle b_{63}, b_{73}\rangle$. Пусть $b_{53} = 0$. Тогда $b_{63} \neq 0$ и $b_{76} \neq 0$, если $\Gamma(B)$ содержит цикл. Сопрягая в этом случае B матрицей $U = t_{76}(b_{73}/b_{63})t_{87}(b_{86}/b_{76} + b_{87}b_{73}/b_{63}b_{76})$, будем иметь $\Gamma(B^U) \subseteq G_a - \langle b_{53}, b_{73}, b_{86}\rangle$ — лес.

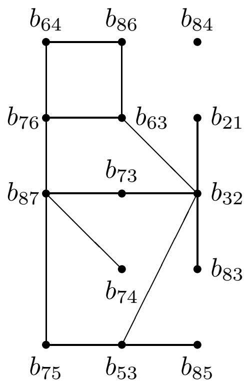

Рис. 17. Граф G_a.

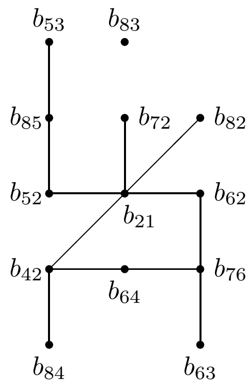

Рис. 18. Граф G_b^1.

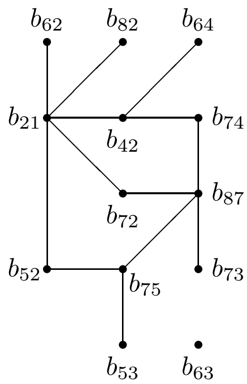

Рис. 19. Граф G_b^2.

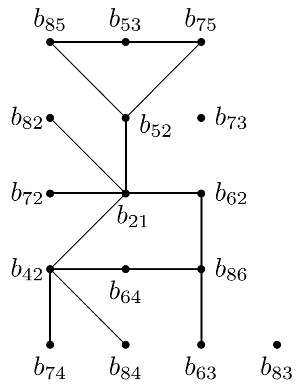

Рис. 20. Граф G_b^3.

b) Можем считать, что $a_{76} = 0$ или $a_{87} = 0$. Применяя к матрице A теорему 1, получим матрицу B, граф $\Gamma(B)$ которой содержится в графе G_b^1 (рис. 18), если $a_{76} \neq 0$ и $a_{87} = 0$, в графе G_b^2 (рис. 19), если $a_{76} = 0$ и $a_{87} \neq 0$, наконец, в графе G_b^3 (рис. 20), когда $a_{76} = a_{87} = 0$.

Пусть $\Gamma(B) \subseteq G_b^1$. Тогда $\Gamma(B)$ является лесом или $b_{42} \neq 0$. Однако, если $b_{42} \neq 0$, лесом является граф $\Gamma(B^U)$, где $U = t_{64}(b_{62}/b_{42})$, поскольку он содержится в графе без циклов $(G_b^1 - \langle b_{62}\rangle) + \langle b_{74}\rangle$.

Предположим, что $\Gamma(B) \subseteq G_b^2$. Граф $\Gamma(B)$ является лесом, когда $b_{42} = b_{75} = 0$. Если $b_{42} \neq 0$, то, положив $U = t_{54}(b_{52}/b_{42})t_{74}(b_{72}/b_{42})$, получим включение $\Gamma(B^U) \subseteq (G_b^2 - \langle b_{52}, b_{72}\rangle) + \langle b_{84}\rangle$ — лес. Когда $b_{42} = 0$ и $b_{75} \neq 0$, включение $\Gamma(B^U)$ в граф без циклов $(G_b^2 - \langle b_{42}, b_{72}, b_{74}\rangle) + \langle b_{41}, b_{51}\rangle$ получим при $U = t_{54}(-b_{74}/b_{75})t_{52}(-b_{72}/b_{75})$.

Пусть, наконец, $\Gamma(B) \subseteq G_b^3$. Граф $\Gamma(B)$ является лесом, когда $b_{42} = b_{75} = 0$. Если $b_{42} \neq 0$, то, положив $U = t_{54}(b_{52}/b_{42})t_{64}(b_{62}/b_{42})$ получим включение $\Gamma(B^U) \subseteq (G - \langle b_{52}, b_{62}\rangle)$ — лес. Когда $b_{42} = 0$ и $b_{75} \neq 0$, включение $\Gamma(B^U)$ в граф без циклов $(G - \langle b_{42}, b_{85}\rangle)$ получим при $U = t_{87}(b_{85}/b_{75})$.

c) Можем считать, что $a_{87} = 0$. Тогда по теореме 1 ($M' = \{3\}$) матрица A сопряжена с матрицей B и $\Gamma(B) \subseteq G_c$ (рис. 21). Граф $\Gamma(B)$ является лесом, если $b_{53} = b_{76} = 0$. В противном случае, положив $U = t_{31}(-b_{51}/b_{53})$ и $V = t_{87}(b_{86}/b_{76})$, будем иметь: $\Gamma(B^U) \subseteq G_c - \langle b_{76}, b_{51}\rangle$ — лес, если $b_{76} = 0$ и $b_{53} \neq 0$, далее, $\Gamma(B^V) \subseteq G_c - \langle b_{53}, b_{86}\rangle$ — лес, когда $b_{76} \neq 0$ и $b_{53} = 0$, наконец, $\Gamma(B^{UV}) \subseteq G_c - \langle b_{86}, b_{51}\rangle$ — лес, если $b_{76} \neq 0$ и $b_{53} \neq 0$.

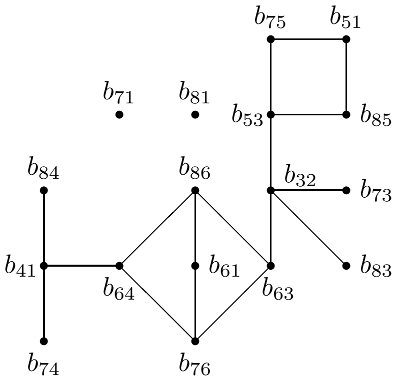

Рис. 21. Граф G_c.

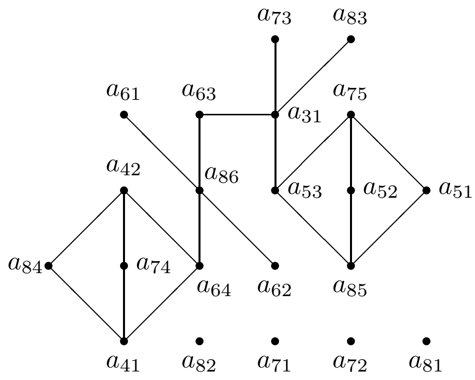

Рис. 22. Граф G_d.

d) Можем считать, что $a_{76} = a_{87} = 0$. Тогда $\Gamma(A) \subseteq G_d$ (рис. 22). Граф $\Gamma(A)$ является лесом, когда $a_{42} = a_{75} = 0$. Иначе, положив $U = t_{87}(a_{85}/a_{75})$ и $V = t_{21}(-a_{41}/a_{42})$, будем иметь: $\Gamma(A^U) \subseteq G_d - \langle a_{42}, a_{85}\rangle$ — лес, если $a_{42} = 0$ и $a_{75} \neq 0$, далее, $\Gamma(A^V) \subseteq G_d - \langle a_{41}, a_{75}\rangle$ — лес, когда $a_{42} \neq 0$ и $a_{75} = 0$, наконец, $\Gamma(A^{UV}) \subseteq G_d - \langle a_{41}, a_{85}\rangle$ — лес, если $a_{42} \neq 0$ и $a_{75} \neq 0$. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть K — поле характеристики 2. Группа $UT_n(K)$ является строго вещественной и рациональной, если $n \leqslant 8$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рациональность и строгая вещественность группы $UT_8(K)$ следуют из теоремы 3 и леммы 1. Далее, при переходе к факторгруппе оба свойства сохраняются, поэтому утверждение о рациональности и строгой вещественности группы $UT_n(K)$ для размерностей $n \leqslant 7$ вытекает из указанного выше изоморфизма $UT_n(K)/H \simeq UT_{n-1}(K)$. Теорема доказана.

3. Критерий рациональности 2-группы

Во введении группа G была названа рациональной, если она периодическая и всякий ее элемент g сопряжен с любой своей степенью g^m такой, что нод$(|g|, m) = 1$. Как показывает следующая теорема, это условие может быть существенно ослаблено, если G является 2-группой.

Теорема 5. *2-группа G является рациональной тогда и только тогда, когда для любого элемента $x \in G$ найдутся такие элементы $y, z \in G$, что $x^y = x^3$ и $x^z = x^{-1}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нам потребуется следующий теоретико-числовой результат.

Лемма 2. *Пусть натуральное число m представленно в виде $m = 2^s l$, $s \geqslant 1$ и l — нечетное число. Тогда $3^m - 1 = 2^{s+2}t$, где t — нечетное число. При $s = 0$ разность $3^m - 1$ делится на 2, но не делится на 4.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$3^m - 1 = (3-1)(3^{m-1} + 3^{m-2} + \ldots + 3^0).$$

При нечетном m вторая скобка является суммой нечетного числа нечетных слагаемых, поэтому число $3^m - 1$ кратно двум, но не кратно четырем.

Далее, остатки от деления чисел 3 и 9 на 8 равны соответственно 3 и 1. Так как при перемножении чисел их остатки перемножаются, то число 3^m при делении на 8 при нечетном m дает остаток 3, а при четном m — остаток 1. Значит, число 3^m+1 кратно 2, но не кратно 4 при четном m, и кратно 4, но не кратно 8 при m нечетном. Для завершения доказательства леммы остается воспользоваться разложением

$$(3^{2^s l} - 1) = (3^{2^{s-1} l} - 1)(3^{2^{s-1} l} + 1) = \ldots = (3^l - 1)(3^l + 1)(3^{2l} + 1) \ldots (3^{2^{s-1} l} + 1).$$

Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы. Необходимость сформулированных условий очевидна. Докажем их достаточность. Пусть $x \in G$, $|x| = 2^n$, и существуют элементы $y, z \in G$ такие, что $x^y = x^3$ и $x^z = x^{-1}$. Достаточно показать, что x сопряжен с любой своей нечетной степенью. Это очевидно, когда $n \leqslant 2$, поэтому далее считаем, что $n \geqslant 3$. Положим

$$M = \{x^{y^i} = x^{3^i} \mid 0 \leqslant i < 2^{n-2}\}, \quad N = \{x^{y^i z} = x^{-3^i} \mid 0 \leqslant i < 2^{n-2}\}.$$

Ввиду леммы 2 все элементы множества M различны. Множество N состоит из элементов, обратных к элементам из M, поэтому в нем тоже нет одинаковых элементов. Предположив, что M и N имеют общий элемент, например $x^{3^k} = x^{-3^m}$, получим, что число

$$3^k + 3^m = 3^{\min\{k,m\}}(1 + 3^{\max\{k,m\} - \min\{k,m\}})$$

должно делиться на 2^n. Однако из доказательства леммы 2 следует, что числа вида $1 + 3^t$ делятся на 2 или 4, но никогда не делятся на 8, противоречие. Значит, $M \cap N = \varnothing$. Так как

$$|M \cup N| = |M| + |N| - |M \cap N| = 2^{n-2} + 2^{n-2} = 2^{n-1} = \varphi(2^n),$$

где φ — функция Эйлера, то x сопряжен с любой своей нечетной степенью. Теорема доказана.

4. Пример Айзекса — Карагёзяна

В работе [4] отмечается, что доказательство несопряженности представленных ниже матриц A и A^{-1}

$$\begin{pmatrix}
1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{pmatrix}, \quad
\begin{pmatrix}
1&1&1&1&0&1&1&1&0&1&1&0&0\\
0&1&1&1&0&1&1&1&0&1&1&0&0\\
0&0&1&1&0&1&1&1&0&1&1&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&1&1\\
0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&1&1\\
0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{pmatrix}$$

из группы верхних унитреугольных матриц $UT_{13}(2)$ проводилось с использованием специально написанных двумя различными коллективами в системе Magma программ для решения систем линейных уравнений над полем $GF(2)$. Представленное ниже доказательство несопряженности матриц A и A^{-1} не использует машинных вычислений и достаточно кратко. В нем мы определенным образом нумеруем элементы предполагаемой сопрягающей матрицы и решаем полученную систему линейных уравнений, разбивая ее естественным образом на блоки. Пусть

$$I = E + x_1e_{12} + x_2e_{23} + \ldots + x_{12}e_{12,13} + y_1e_{13} + \ldots + y_{11}e_{11,13} + z_1e_{14} + \ldots + z_{10}e_{10,13}$$
$$+ u_1e_{15} + \ldots + u_9e_{9,13} + v_1e_{16} + \ldots + v_8e_{8,13} + a_1e_{17} + \ldots + a_7e_{7,13} + \ldots,$$

и предположим, что матрица I инвертирует A, т. е. имеет место равенство $AI = IA^{-1}$. Сравнив элементы матриц AI и IA^{-1}, стоящие на второй диагонали (разность между вторым и первым индексом элемена равна 2), получим систему уравнений только на $x_1, \ldots, x_{12}$:

$$x_1 + x_2 = x_2 + x_3 = x_5 + x_6 = x_6 + x_7 = x_7 + x_8 = x_{10} + x_{11} = x_{11} + x_{12} = 1,\ x_4 = x_9 = 0,$$

общее решение которой следующее: $(x_1, 1 + x_1, x_1, 0, x_5, 1 + x_5, x_5, 1 + x_5, 0, x_{10}, 1 + x_{10}, x_{10})$. Подставив полученные выражения для x_i в матрицу I и сравнив элементы матриц AI и IA^{-1}, стоящие на третьей диагонали, получим систему на $x_1, x_5, x_{10}, y_1, \ldots, y_{11}$ вида $y_3 = y_4 = 0$,

$$y_1+y_2+x_1 = y_5+y_6+x_5 = x_5+y_8 = x_5+y_8+y_9+x_{10} = 1,\ y_6+y_7+x_5 = y_9+x_{10} = y_{10}+y_{11} = 0$$

с общим решением $(x_1, x_5, x_{10}, y_1, 1 + x_1 + y_1, 0, 0, y_5, 1 + x_5 + y_5, 1 + y_5, 1 + x_5, x_{10}, y_{10}, y_{10})$. Проводя аналогичные рассуждения с элементами четвертой, пятой и шестой диагоналей, будем получать следующие системы (сверху) и их решения (снизу):

$$\left\{\begin{array}{rcl} z_2 &=& 0,\\ x_1 + z_2 + z_3 &=& 0,\\ z_3 + z_4 + x_5 &=& 0,\\ z_4 &=& 0,\\ z_5 + z_6 + y_5 + x_5 &=& 1,\\ y_5 + z_7 &=& 1,\\ y_5 + z_7 + z_8 &=& 1,\\ x_5 + z_8 + z_9 + y_{10} &=& 0,\\ z_9 + y_{10} + x_{10} &=& 1; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} x_1 + y_1 + u_1 + u_2 &=& 1,\\ x_1 + u_2 + u_3 &=& 0,\\ y_5 + u_3 + u_4 &=& 0,\\ u_4 &=& 0,\\ x_1 + y_5 + z_5 + u_6 &=& 1,\\ x_1 + y_5 + z_5 + u_6 + u_7 &=& 1,\\ x_1 + y_5 + u_7 + u_8 &=& 0,\\ x_1 + z_{10} + u_8 + u_9 &=& 0; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} x_1 + y_5 + v_1 + v_2 &=& 0,\\ y_5 + v_2 + v_3 &=& 0,\\ x_1 + z_5 + v_4 + v_5 &=& 1,\\ u_5 + v_5 + v_6 &=& 0,\\ x_1 + z_5 + v_6 + v_7 &=& 0,\\ x_1 + y_5 + v_7 + v_8 &=& 0; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_5 &=& x_1,\\ z_3 &=& x_1,\\ z_6 &=& 1 + x_1 + y_5 + z_5,\\ z_7 &=& 1 + y_5,\\ z_8 &=& z_4 = z_2 = 0,\\ z_9 &=& x_1 + y_{10},\\ x_{10} &=& 1 + x_1; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} u_1 &=& 1 + y_1 + y_5,\\ u_2 &=& x_1 + y_5,\\ u_3 &=& y_5,\\ u_6 &=& 1 + x_1 + y_5 + z_5,\\ u_7 &=& u_4 = 0,\\ u_8 &=& x_1 + y_5,\\ u_9 &=& y_5 + z_{10}; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} v_2 &=& x_1 + y_5 + v_1,\\ v_3 &=& x_1 + v_1,\\ v_4 &=& 1 + z_5 + v_1,\\ v_6 &=& u_5 + v_5,\\ v_7 &=& x_1 + z_5 + u_5 + v_5,\\ v_8 &=& y_5 + z_5 + u_5 + v_5. \end{array}\right.$$

Подставив сейчас все найденные выражения для x_i, y_j, z_k, u_l, v_m в матрицу I и сравнив элементы произведений IA и IA^{-1}, стоящие на позициях $(3, 10)$ и $(4, 11)$, получим два уравнения

$$x_1 + v_1 + a_4 + z_5 = 0, \quad x_1 + v_1 + a_4 + z_5 = 1,$$

которые вместе, очевидно, образуют несовместную систему. Значит, матрицы A и A^{-1} не сопряжены.

В заключение сформулируем вопрос, связаный с вопросом Хигмана о представимости числа классов сопряженных элементов группы $UT_n(q)$ многочленом от q при фиксированном n.

Вопрос. Пусть граф коммутативности матрицы A из группы $UT_n(K)$, $n \geqslant 2$, K — произвольное поле, является лесом, причем число вершин леса минимально среди всех сопряженных с A матриц. Предположим, что матрица B получена из матрицы A заменой одного или нескольких отличных от нуля недиагональных элементов A на другие (из K), тоже отличные от нуля. Верно ли, что матрицы A и B не сопряжены в $UT_n(K)$?

Авторы статьи выражают благодарность профессору Я. Н. Нужину за интересные обсуждения рассматриваемых вопросов и полезные ссылки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Kirillov A.** Variation on the triangular theme // Lie groups and Lie algebras: E. B. Dynkin's Seminar. Providence: Amer. Math. Soc., 1995. P. 43–73. (Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2; vol. 169.)
2. **Arregi J.M., Vera-Lopez A.** Conjugacy classes in Sylow p-subgroups of $\mathrm{GL}(n, q)$ // J. Algebra. 1992. Vol. 152, no. 1. P. 1–19.
3. **Arregi J.M., Vera-Lopez A.** Some algorithms for the calculation conjugacy classes in the Sylow p-subgroups of $\mathrm{GL}(n, q)$ // J. Algebra. 1995. Vol. 177, no. 3. P. 899–925.
4. **Isaacs I.M., Karagueuzian D.** Conjugacy in groups of upper triagular matrices // J. Algebra. 1998. Vol. 202, no. 2. P. 704–711.
5. **Isaacs I.M., Karagueuzian D.** Erratum: "Conjugacy in groups of upper triangular matrices" // J. Algebra. 1998. Vol. 208, no. 2. P. 722.
6. **Kletzing D.** Structure and representations of Q-groups. Berlin: Springer-Verlag, 1984. 290 p. (Lecture Notes in Math.; vol. 1084.)
7. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп / Ин-т математики СО РАН. Изд. 18-е, доп. Новосибирск, 2014. 253 с. URL: http://math.nsc.ru/ alglog/alglogf.html .
8. **Газданова М.А.** О строгой вещественности группы унитреугольных матриц размерности 6×6 над полем характеристики 2 // Algebra and Model Theory: coll. of papers. Novosibirsk: NSTU Publ., 2005. Vol. 5. P. 44–53.
9. **Газданова М.А., Нужин Я.Н.** О строгой вещественности унипотентных подгрупп групп лиева типа над полем характеристики 2 // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 5. С. 1031–1051.
10. **Газданова М.А.** О строгой вещественности группы унитреугольных матриц размерности 7×7 над полем характеристики 2 // Вестн. КрасГУ. Сер. физ.-мат. наук. 2006. № 7. С. 43-53.
11. **Бурбаки Н.** Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1972. 331 с.

Поступила 31.12.2014

Дубина Оксана Андреевна
аспирант
Институт математики и фундаментальной информатики СФУ
e-mail: eshk@mail.ru

Колесников Сергей Геннадьевич
д-р физ.-мат. наук, доцент
зав. кафедрой
Сибирский государственный аэрокосмический университет им. академика М. Ф. Решетнева
e-mail: sklsnkv@mail.ru

Манагарова Наталья Сергеевна
аспирант
Институт математики и фундаментальной информатики СФУ
e-mail: nsmanagarova@mail.ru