ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 1 2016

УДК 517.977

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ О БЫСТРОДЕЙСТВИИ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ[1]

А. Р. Данилин, О. О. Коврижных

Исследована задача оптимального быстродействия для сингулярно возмущенной линейной автономной системы. Основное отличие от ранее рассмотренных систем с быстрыми и медленными переменными заключается в том, что в данном случае собственные значения матрицы при быстрых переменных не удовлетворяют стандартному требованию отрицательности вещественной части. Получена и обоснована полная асимптотика в смысле Эрдейи по степенной асимптотической последовательности времени быстродействия и оптимального управления относительно малого параметра при производных в уравнениях системы.

Ключевые слова: оптимальное управление, задача быстродействия, асимптотическое разложение, сингулярно возмущенные задачи, малый параметр.

A. R. Danilin, O. O. Kovrizhnykh. Asymptotics of the optimal time in a time-optimal control problem with a small parameter.

A time-optimal control problem for a singularly perturbed linear autonomous system is considered. The main difference of this case from systems with fast and slow variables studied earlier is that the eigenvalues of the matrix at the fast variables do not satisfy the standard requirement of the negativity of the real part. We obtain and justify a complete power asymptotic expansion in the sense of Erdelyi of the optimal time and optimal control with respect to the small parameter at derivatives in the equations of the system.

Keywords: optimal control, time-optimal control problem, asymptotic expansion, singularly perturbed problems, small parameter.

1. Постановка задачи

Рассмотрим одну из задач теории оптимального управления [1; 2] — задачу о быстродействии для линейной автономной системы с быстрыми и медленными переменными (см. обзор [3]) в классе кусочно-непрерывных управлений с гладкими геометрическими ограничениями.

$$\begin{cases} \dot{x} = y, & x,\, y \in \mathbb{R}^2, \quad u \in \mathbb{R}^2, \\ \varepsilon\dot{y} = Jy - Ju, & \|u\| \leqslant 1, \quad \varepsilon \ll 1, \\ x(0) = x^0, \quad y(0) = y^0, & \\ x(T_\varepsilon) = 0, \quad y(T_\varepsilon) = 0, \quad T_\varepsilon \longrightarrow \min, & \end{cases} \tag{1.1}$$

где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta > 0.$$

Цель настоящего исследования — получить асимптотические разложения времени быстродействия, оптимального управления и компонент вектора состояния.

[1]Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 14-01-00322) и Программы повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (Соглашение с Минобрнауки РФ 02.A03.21.0006 от 27 августа 2013 г.).

Ранее в работе [4] для системы общего вида получены основные соотношения в случае, когда управление ограничено многоугольником, в работах [5; 6] исследовано поведение областей достижимости при стремлении малого параметра к нулю. Особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что вещественные части собственных значений матрицы при быстрых переменных равны нулю, и тем самым нарушено стандартное условие (см.[6]) их отрицательности. В настоящей работе используются методы, основы подхода к которым заложены в [7], и общие соотношения, полученные в [8;9]. Отметим статью [10], в которой впервые была исследована асимптотика решения для другой системы, в которой матрица при быстрых переменных также не удовлетворяет условию асимптотической устойчивости.

В этой работе показано, что время быстродействия, как и остальные характеристики в данной задаче, даже в случае общего положения не раскладываются в степенной асимптотический ряд в смысле Пуанкаре.

Без ограничения общности можно считать $\beta = 1$, т. е.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

поскольку посредством замены параметра по формуле $\varepsilon/\beta = \overline{\varepsilon}$ можно получить систему с $\beta = 1$.

Заметим, что тогда в силу вида матрицы (1.2) справедливы равенства

$$J^2 = -I, \quad J^{-1} = -J, \quad J^* = -J. \tag{1.3}$$

Здесь и далее $*$ — знак операции транспонирования матриц.

Обозначим

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & \varepsilon^{-1}J \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon^{-1}J \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad z^0 = \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

В силу критерия Калмана (см, например, [11, теорема 5]) при каждом фиксированном $\varepsilon > 0$ пара $(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon)$ из (1.4) вполне управляема.

Непосредственным вычислением из (1.4) получаем, что

$$e^{\mathcal{A}_\varepsilon t} = \begin{pmatrix} I & \int\limits_0^t e^{Js/\varepsilon} ds \\ 0 & e^{Jt/\varepsilon} \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Лемма 1. *Матрица $e^{Jt/\varepsilon}$ обладает следующими свойствами:*

1. *Для любого $\varepsilon > 0$ матричные функции $e^{Jt/\varepsilon}$ и $e^{\mathcal{A}_\varepsilon t}$ периодические с периодом $2\pi\varepsilon$.*
2. *Для любых t, $\varepsilon > 0$ и любого вектора ψ выполняются равенства*

$$\|e^{Jt/\varepsilon}\| = 1, \quad \|e^{Jt/\varepsilon}\psi\| = \|\psi\|. \tag{1.6}$$

3. *Если T ограничено, то*

$$\int\limits_0^T e^{Js/\varepsilon} ds = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0. \tag{1.7}$$

4. *Если T ограничено, $F(t,\varepsilon)$ — ограниченная при всех $t \in [0,T]$ и $\varepsilon > 0$ вместе со своей производной $\dfrac{d}{dt}F(t,\varepsilon)$ матричная функция, то*

$$\int\limits_0^T e^{Js/\varepsilon} F(s,\varepsilon) ds = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0. \tag{1.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость свойств 1, 2 непосредственно следует из формул (1.3) и определения матричной экспоненты с помощью ряда

$$e^{Jt/\varepsilon} = I + \frac{t}{1!\,\varepsilon}J - \frac{t^2}{2!\,\varepsilon^2}I - \frac{t^3}{3!\,\varepsilon^3}J + \ldots = \cos\frac{t}{\varepsilon}I + \sin\frac{t}{\varepsilon}J. \qquad (1.9)$$

Свойство 3 выполняется в силу обратимости матрицы J и соотношений (1.3), (1.6):

$$\int\limits_0^T e^{Js/\varepsilon}ds = \varepsilon \int\limits_0^{T/\varepsilon} e^{Js}ds = \varepsilon J(I - e^{JT/\varepsilon}).$$

Свойство 4 устанавливается интегрированием по частям интеграла (1.8):

$$\int\limits_0^T e^{Js/\varepsilon}F(s,\varepsilon)ds = \varepsilon\Big(- Je^{Js/\varepsilon}F(s,\varepsilon)\Big|_0^T + J\int\limits_0^T e^{Js/\varepsilon}\frac{d}{ds}F(s,\varepsilon)ds\Big),$$

его справедливость следует из ограниченности величины в скобках. □

Предельная задача (при $\varepsilon = 0$).

$$\begin{cases} \dot{x} = u, & x,\, u \in \mathbb{R}^2, \\ x(0) = x^0, & \|u\| \leqslant 1, \\ x(T_0) = 0, \quad T_0 \longrightarrow \min, & \end{cases} \qquad (1.10)$$

Согласно принципу максимума [1; 11, с. 140] оптимальное управление $u_0(t)$ имеет вид $u_0(t) = l_0$, $\|l_0\| = 1$, где вектор l_0 удовлетворяет соотношению

$$0 = x^0 + T_0 l_0. \qquad (1.11)$$

Естественным является предположение

$$x^0 \neq 0. \qquad (1.12)$$

Тогда из (1.11) получаем

$$T_0 = \|x^0\|, \quad l_0 = -\frac{x^0}{\|x^0\|}. \qquad (1.13)$$

Теорема 1. *Задача* (1.1) *разрешима при любом фиксированном* $\varepsilon \in (0,1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольного $\theta > 0$, следуя [2, с. 247; 12, с. 105] выпишем функцию управляемости $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^1$ для системы (1.1) для произвольного вектора $\psi = (\psi_1^*, \psi_2^*)^*$ такого, что $\|\psi\| = 1$,

$$\varphi_\varepsilon(\psi) = \rho(e^{\mathcal{A}_\varepsilon^*\theta}\psi|\{z^0\}) + \int\limits_0^\theta \rho(\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^* s}\psi|\mathcal{U})ds = \langle e^{\mathcal{A}_\varepsilon^*\theta}\psi, z^0\rangle + \int\limits_0^\theta \|\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^* s}\psi\|ds. \qquad (1.14)$$

Здесь $\rho(\psi|F)$ — опорная функция множества F; $\mathcal{U}$ — множество, ограничивающее управления — единичный шар в $\mathbb{R}^2$. В силу вида матричной экспоненты (1.5) и свойства 2 из леммы 1 имеем

$$|\langle e^{\mathcal{A}_\varepsilon^*\theta}\psi, z^0\rangle| = |\langle \psi, e^{\mathcal{A}_\varepsilon\theta}z^0\rangle| = |\langle \psi_1, x^0\rangle + \varepsilon\langle\psi_1, J(I - e^{J\theta/\varepsilon})y^0\rangle + \langle\psi_2, e^{J\theta/\varepsilon}y^0\rangle|$$

$$\leqslant \|\psi_1\|\cdot\|x^0\| + 2\varepsilon\|\psi_1\|\cdot\|y^0\| + \|\psi_2\|\cdot\|y^0\| \leqslant (2 + 2\varepsilon)\|z^0\| < 4\|z^0\|, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

В силу свойства 1 из леммы 1 подынтегральная функция в (1.14) периодическая с периодом $2\pi\varepsilon$. Справедливы следующие соотношения:

$$\int\limits_0^{2\pi\varepsilon} \|\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^* s}\psi\| ds = \int\limits_0^{2\pi\varepsilon} \|(I - e^{-Js/\varepsilon})\psi_1 + \varepsilon^{-1} J e^{-Js/\varepsilon}\psi_2\| ds$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \|(I - e^{-J\tau})\varepsilon\psi_1 + J e^{-J\tau}\psi_2\| d\tau = \int\limits_0^{2\pi} \|B^* e^{A^*\tau} q_\varepsilon\| d\tau = \|q_\varepsilon\| \int\limits_0^{2\pi} \Big\|B^* e^{A^*\tau} \frac{q_\varepsilon}{\|q_\varepsilon\|}\Big\| d\tau,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & J \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -J \end{pmatrix}, \quad q_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon\psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \|q_\varepsilon\| = \sqrt{\varepsilon^2\|\psi_1\|^2 + \|\psi_2\|^2}.$$

Как показано в лемме 1 работы [8], в силу вполне управляемости пары (A, B) найдется $\alpha > 0$ такое, что для всех векторов $\chi \in \mathbb{R}^4$, $\|\chi\| = 1$, имеем $\displaystyle\int_0^{2\pi} \|B^* e^{A^*\tau}\chi\| d\tau \geqslant \alpha$. Тем самым для любого вектора $\psi \in \mathbb{R}^4$, $\|\psi\| = 1$, при $0 < \varepsilon < 1$ выполняется

$$\int\limits_0^{2\pi\varepsilon} \|\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^* s}\psi\| ds \geqslant \alpha\|q_\varepsilon\| \geqslant \alpha\sqrt{\varepsilon^2\|\psi_1\|^2 + \|\psi_2\|^2} \geqslant \alpha\,\varepsilon\|\psi\| = \alpha\,\varepsilon.$$

Возвращаясь к (1.14), отметим, что для $\theta \geqslant 2\pi\varepsilon n$, где $n \geqslant 4\|z^0\|/(\alpha\,\varepsilon)$, справедливы неравенства

$$\int\limits_0^{\theta} \|\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^* s}\psi\| ds \geqslant n \int\limits_0^{2\pi\varepsilon} \|\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^* s}\psi\| ds \geqslant n\alpha\,\varepsilon \geqslant 4\|z^0\| > |\langle e^{\mathcal{A}_\varepsilon^*\theta}\psi, z^0\rangle|.$$

Тем самым при $\theta \geqslant 2\pi\varepsilon n \geqslant 8\pi\|z^0\|/\alpha$ для любого вектора $\psi \in \mathbb{R}^4$, $\|\psi\| = 1$, функция управляемости $\varphi_\varepsilon(\psi)$ неотрицательна, следовательно, задача разрешима и для оптимального времени справедлива оценка

$$T_\varepsilon \leqslant 8\pi\|z^0\|/\alpha. \tag{1.15}$$

2. Основная система уравнений и асимптотика ее решения

В силу принципа максимума Понтрягина [1; 11, с. 140], который в рассматриваемом случае является необходимым и достаточным условием оптимальности, существует вектор $r_\varepsilon = (\overset{1}{r}{}^*_\varepsilon, \overset{2}{r}{}^*_\varepsilon)^*$, $\overset{1}{r}_\varepsilon, \overset{2}{r}_\varepsilon \in \mathbb{R}^2$, такой, что оптимальное управление в задаче (1.1) имеет вид

$$u_\varepsilon(t) = \frac{\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{-\mathcal{A}_\varepsilon^* t} r_\varepsilon}{\|\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{-\mathcal{A}_\varepsilon^* t} r_\varepsilon\|} \tag{2.1}$$

при всех t таких, что $\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{-\mathcal{A}_\varepsilon^* t} r_\varepsilon \neq 0$. Тогда в силу формулы Коши из (1.1) для r_ε получим равенство

$$0 = z^0 + \int\limits_0^{T_\varepsilon} \frac{e^{-\mathcal{A}_\varepsilon t}\mathcal{B}_\varepsilon\,\mathcal{B}_\varepsilon^*\, e^{-\mathcal{A}_\varepsilon^* t} r_\varepsilon}{\|\mathcal{B}_\varepsilon^*\, e^{-\mathcal{A}_\varepsilon^* t} r_\varepsilon\|}\, dt. \tag{2.2}$$

Тем самым вектор r_ε является вектором, порождающим оптимальное управление, тогда и только тогда, когда r_ε удовлетворяет соотношению (2.2). Таким образом, исходная задача сводится к исследованию уравнения (2.2).

Отметим, что $\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{-\mathcal{A}_\varepsilon^* t} = (I - e^{Jt/\varepsilon},\ \varepsilon^{-1} J\, e^{Jt/\varepsilon})$. Тогда с учетом (1.3) для $r_\varepsilon = (\overset{1}{r^*}_\varepsilon, \overset{2}{r^*}_\varepsilon)^*$ запишем

$$\|\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{-\mathcal{A}_\varepsilon^* t} r_\varepsilon\| = \big\| \overset{1}{r}_\varepsilon + e^{Jt/\varepsilon}(\varepsilon^{-1} J \overset{2}{r}_\varepsilon - \overset{1}{r}_\varepsilon)\big\|.$$

Введем новые неизвестные векторы по формулам

$$l_\varepsilon = \overset{1}{r}_\varepsilon, \quad \rho_\varepsilon = \varepsilon^{-1} J \overset{2}{r}_\varepsilon - \overset{1}{r}_\varepsilon \tag{2.3}$$

и представим основную систему уравнений (2.2) в виде

$$\begin{cases} -x^0 &= \displaystyle\int_0^{T_\varepsilon} \frac{(I - e^{-Jt/\varepsilon}) l_\varepsilon + (e^{Jt/\varepsilon} - I)\rho_\varepsilon}{\|l_\varepsilon + e^{Jt/\varepsilon}\rho_\varepsilon\|}\, dt, \\ \varepsilon y^0 &= J \displaystyle\int_0^{T_\varepsilon} \frac{e^{-Jt/\varepsilon} l_\varepsilon + \rho_\varepsilon}{\|l_\varepsilon + e^{Jt/\varepsilon}\rho_\varepsilon\|}\, dt. \end{cases} \tag{2.4}$$

Лемма 2. *Для оптимального времени справедлива оценка снизу*

$$T_\varepsilon \geqslant \overline{T} > 0 \quad \textit{при всех} \ \ \varepsilon > 0. \tag{2.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, подынтегральная функция в первом уравнении системы (2.4) преобразуется к виду

$$\frac{l_\varepsilon + e^{Jt/\varepsilon}\rho_\varepsilon}{\|l_\varepsilon + e^{Jt/\varepsilon}\rho_\varepsilon\|} - \frac{e^{-Jt/\varepsilon} l_\varepsilon + \rho_\varepsilon}{\|e^{-Jt/\varepsilon} l_\varepsilon + \rho_\varepsilon\|},$$

следовательно, ограничена. Если бы нашлась последовательность $\{T_\varepsilon\}$ (здесь и далее будем для сокращения записи вместо номеров членов последовательности писать ε), сходящаяся к нулю, то интеграл в правой части уравнения стремился бы к нулю вместе с $T_\varepsilon \to 0$. Но левая часть уравнения нулю не равна в силу предположения (1.12), значит, такой последовательности нет и справедлива оценка (2.5). □

Естественным образом возникает вопрос о связи между нормированным вектором $L_\varepsilon = (l_\varepsilon^*, \rho_\varepsilon^*)^*$, удовлетворяющим уравнениям (2.4), и вектором l_0, порождающим оптимальное управление в вырожденной задаче (1.10).

Теорема 2. *Если* $L_\varepsilon = (l_\varepsilon^*, \rho_\varepsilon^*)^*$ *— нормированный вектор, порождающий оптимальное управление в задаче* (1.1), *т. е. удовлетворяет* (2.4), *и* $\|L_\varepsilon\| = 1$, *то*

$$\begin{pmatrix} l_\varepsilon \\ \rho_\varepsilon \\ T_\varepsilon \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} l_0 \\ 0 \\ T_0 \end{pmatrix} \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

где T_0 *— оптимальное время, а* l_0 *— вектор, порождающий оптимальное управление в предельной задаче* (1.10).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку уравнения (2.4) положительно однородны относительно вектора L_ε, то будем считать, что норма этого вектора равна единице. Тогда с учетом оценки (1.15) множество векторов $\{(l_\varepsilon^*, \rho_\varepsilon^*, T_\varepsilon)^*\}$ ограничено и, следовательно, имеет предельные точки. Пусть $(\overset{0}{l^*}, \overset{0}{\rho^*}, \overset{0}{T})^*$ — одна из них, т. е. некоторая последовательность $(l_\varepsilon^*, \rho_\varepsilon^*, T_\varepsilon)^* \to (\overset{0}{l^*}, \overset{0}{\rho^*}, \overset{0}{T})^*$ при $\varepsilon \to 0$.

Покажем, что случай $\| \overset{0}{\rho} \| \neq 0$ невозможен. От противного предположим, что $\overset{0}{\rho} \neq 0$, тогда, умножив скалярно второе уравнение системы (2.4) на ρ_ε, придем к соотношению

$$-\varepsilon\langle Jy^0, \rho_\varepsilon\rangle = \int\limits_0^{T_\varepsilon} \frac{\|\rho_\varepsilon\|^2 + \langle e^{-Jt/\varepsilon} l_\varepsilon, \rho_\varepsilon\rangle}{\|l_\varepsilon + e^{Jt/\varepsilon}\rho_\varepsilon\|}\, dt, \tag{2.6}$$

левая часть которого стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Оценим интеграл в правой части равенства:

$$\int\limits_0^{T_\varepsilon} \frac{\|\rho_\varepsilon\|^2 + \langle e^{-Jt/\varepsilon} l_\varepsilon, \rho_\varepsilon\rangle}{\|l_\varepsilon + e^{Jt/\varepsilon}\rho_\varepsilon\|}\, dt \geqslant \int\limits_0^{T_\varepsilon} \frac{\|\rho_\varepsilon\|^2 + \langle e^{-Jt/\varepsilon} l_\varepsilon, \rho_\varepsilon\rangle}{\|l_\varepsilon\| + \|\rho_\varepsilon\|}\, dt$$

$$= T_\varepsilon \frac{\|\rho_\varepsilon\|^2}{\|l_\varepsilon\| + \|\rho_\varepsilon\|} + \Big\langle \int\limits_0^{T_\varepsilon} e^{-Jt/\varepsilon}\, dt\, l_\varepsilon, \frac{\rho_\varepsilon}{\|l_\varepsilon\| + \|\rho_\varepsilon\|} \Big\rangle.$$

Тем самым в силу предположения, оценки (2.5) и свойства (1.7) правая часть равенства (2.6) при $\varepsilon \to 0$ к нулю не стремится. Найденное противоречие доказывает, что $\overset{0}{\rho} = 0$.

Тем самым для всех предельных точек выполняется $\| \overset{0}{l} \| = 1$. В силу свойства (1.7) из первого уравнения системы (2.4) вытекает, что $\overset{0}{T}$ и $\overset{0}{l}$ удовлетворяют предельному уравнению (1.11), поэтому $\overset{0}{T} = \|x^0\| = T_0$, $\overset{0}{l} = l_0$ и $(l_0^*, 0, T_0)^*$ — единственная предельная точка множества $\{(l_\varepsilon^*, \rho_\varepsilon^*, T_\varepsilon)^*\}$, что означает $(l_\varepsilon^*, \rho_\varepsilon^*, T_\varepsilon)^* \to (l_0^*, 0, T_0)^*$ при $\varepsilon \to 0$. □

Для нахождения и обоснования асимптотики решения системы уравнений (2.4) будут использованы подходы работ [13; 14].

Для сокращения записи формул введем обозначение $E_\varepsilon(\eta) := e^{J\eta/\varepsilon}$. Систему (2.4) можно преобразовать к более простому виду:

$$\begin{cases} -x^0 - \varepsilon J y^0 &= \displaystyle\int\limits_0^{T_\varepsilon} \frac{l_\varepsilon + E_\varepsilon(t)\rho_\varepsilon}{\|l_\varepsilon + E_\varepsilon(t)\rho_\varepsilon\|}\, dt, \\ -\varepsilon J y^0 &= \displaystyle\int\limits_0^{T_\varepsilon} \frac{E_\varepsilon^*(t) l_\varepsilon + \rho_\varepsilon}{\|l_\varepsilon + E_\varepsilon(t)\rho_\varepsilon\|}\, dt. \end{cases} \tag{2.7}$$

Для замыкания системы (2.7) добавим условие нормировки вектора L_ε:

$$\|l_\varepsilon\|^2 + \|\rho_\varepsilon\|^2 = 1. \tag{2.8}$$

В силу (1.6), (2.8) имеем

$$\|l_\varepsilon + E_\varepsilon(t)\rho_\varepsilon\|^{-1} = (\|l_\varepsilon\|^2 + \|\rho_\varepsilon\|^2 + 2\langle l_\varepsilon,\, E_\varepsilon(t)\rho_\varepsilon\rangle)^{-1/2}$$

$$= 1 - \langle l_\varepsilon,\, E_\varepsilon(t)\rho_\varepsilon\rangle + \frac{3}{2}\langle l_\varepsilon,\, E_\varepsilon(t)\rho_\varepsilon\rangle^2 + \sum_{k=3}^{\infty} a_k \langle l_\varepsilon,\, E_\varepsilon(t)\rho_\varepsilon\rangle^k, \tag{2.9}$$

где a_k $(k = 3, 4, \ldots)$ — известные числа. Этот ряд абсолютно сходится при $\|l_\varepsilon\| \cdot \|\rho_\varepsilon\| < 1/2$.

3. Алгоритм построения асимптотики решения

В силу (2.9) ряды для правых частей уравнений системы (2.7) состоят из слагаемых следующих типов:

$$T_\varepsilon l_\varepsilon, \quad T_\varepsilon \rho_\varepsilon, \quad \int\limits_0^{T_\varepsilon} E_\varepsilon(t)\rho_\varepsilon\, dt, \quad \int\limits_0^{T_\varepsilon} E_\varepsilon^*(t) l_\varepsilon\, dt, \quad \int\limits_0^{T_\varepsilon} \langle l_\varepsilon,\, E_\varepsilon(t)\rho_\varepsilon\rangle^k l_\varepsilon\, dt,$$

$$\int_0^{T_\varepsilon} \langle E^*_\varepsilon(t)l_\varepsilon,\, \rho_\varepsilon\rangle^k E^*_\varepsilon(t)l_\varepsilon\, dt, \quad \int_0^{T_\varepsilon} \langle E^*_\varepsilon(t)l_\varepsilon,\, \rho_\varepsilon\rangle^k \rho_\varepsilon\, dt, \quad \int_0^{T_\varepsilon} \langle l_\varepsilon,\, E_\varepsilon(t)\rho_\varepsilon\rangle^k E_\varepsilon(t)\rho_\varepsilon\, dt$$

(с известными числовыми коэффициентами).

Будем искать новый малый неизвестный вектор $\omega = (\lambda^*, \rho^*, \vartheta)^* = O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$ (зависимость его компонент от ε для сокращения записи опустим),

$$l_\varepsilon = l_0 + \lambda, \quad \|l_0\| = 1, \quad \rho_\varepsilon = \rho, \quad T_\varepsilon = T_0 + \vartheta \tag{3.1}$$

в виде

$$\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k, \quad \rho = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k, \quad \vartheta = \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta_k, \quad \lambda_k,\, \rho_k,\, \vartheta_k = O(\varepsilon^k), \quad \varepsilon \to 0, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{3.2}$$

Процедура для нахождения $\omega_k = (\lambda_k^*, \rho_k^*, \vartheta_k)^*$ стандартна: представления (3.1), (3.2) подставляем в систему (2.7), (2.8). С учетом (2.9) раскладываем правые части уравнений в ряды и приравниваем слагаемые одного порядка малости, принимая во внимание предположение (3.2).

4. Получение первых асимптотических приближений решения

Отметим, что в силу (3.1), (3.2) $\vartheta_1/\varepsilon = O(1)$, $(\vartheta - \vartheta_1)/\varepsilon = O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$, поэтому

$$E_\varepsilon(T_\varepsilon) = e^{\left(\frac{T_0}{\varepsilon} + \frac{\vartheta_1}{\varepsilon} + \frac{\vartheta - \vartheta_1}{\varepsilon}\right)J} = e^{\frac{T_0}{\varepsilon}J} e^{\frac{\vartheta_1}{\varepsilon}J}\left(I + \frac{\vartheta - \vartheta_1}{\varepsilon}J + \ldots\right) = E_{0\varepsilon}E_{1\varepsilon} + \frac{\vartheta - \vartheta_1}{\varepsilon}E_{0\varepsilon}E_{1\varepsilon}J + \ldots,$$

$$E^*_\varepsilon(T_\varepsilon) = e^{\left(\frac{T_0}{\varepsilon} + \frac{\vartheta_1}{\varepsilon} + \frac{\vartheta - \vartheta_1}{\varepsilon}\right)J^*} = e^{\frac{T_0}{\varepsilon}J^*} e^{\frac{\vartheta_1}{\varepsilon}J^*}\left(I - \frac{\vartheta - \vartheta_1}{\varepsilon}J + \ldots\right) = E^*_{0\varepsilon}E^*_{1\varepsilon} - \frac{\vartheta - \vartheta_1}{\varepsilon}E^*_{0\varepsilon}E^*_{1\varepsilon}J + \ldots,$$

где $E_{0\varepsilon} = e^{\frac{T_0}{\varepsilon}J}$, $\quad E_{1\varepsilon} = e^{\frac{\vartheta_1}{\varepsilon}J}$. Обозначим $\widetilde{E}_\varepsilon = E_{0\varepsilon}E_{1\varepsilon}$. Отметим, что в силу (1.9) и (3.2)

$$\int_0^{T_\varepsilon} \langle E^*_\varepsilon(t)l_\varepsilon,\, \rho_\varepsilon\rangle E^*_\varepsilon(t)l_\varepsilon\, dt = \int_0^{T_0} \langle E^*_\varepsilon(t)l_\varepsilon,\, \rho_\varepsilon\rangle E^*_\varepsilon(t)l_\varepsilon\, dt + O(\varepsilon^2)$$

$$= \frac{T_0}{2}(\langle l_0, \rho_1\rangle l_0 + \langle Jl_0, \rho_1\rangle Jl_0) + O(\varepsilon^2). \tag{4.1}$$

Уравнение (2.8) с учетом (3.1) преобразуется к виду

$$2\langle l_0, \lambda\rangle + \|\lambda\|^2 + \|\rho\|^2 = 0. \tag{4.2}$$

Принимая во внимание равенства (1.13), (4.1), выпишем для (2.7), (2.8) систему первого приближения:

$$\begin{cases} -\varepsilon J y^0 &= \vartheta_1 l_0 + T_0\lambda_1, \\ -\varepsilon J y^0 &= \varepsilon J(\widetilde{E}^*_\varepsilon - I)l_0 + T_0\rho_1 - \dfrac{T_0}{2}(\langle l_0, \rho_1\rangle l_0 + \langle Jl_0, \rho_1\rangle Jl_0), \\ 0 &= \langle l_0, \lambda_1\rangle. \end{cases} \tag{4.3}$$

Из первого и третьего уравнений системы (4.3) находим

$$\vartheta_1 = -\varepsilon\langle Jy^0, l_0\rangle, \quad \lambda_1 = \frac{\varepsilon}{T_0}\,(\langle Jy^0, l_0\rangle l_0 - Jy^0).$$

Второе уравнение системы (4.3) можно записать в виде

$$\mathcal{L}\rho_1 := 2\rho_1 - \langle l_0, \rho_1\rangle l_0 - \langle Jl_0, \rho_1\rangle Jl_0 = -\frac{2\varepsilon}{T_0}J(y^0 + (\widetilde{E}^*_\varepsilon - I)l_0). \tag{4.4}$$

Покажем, что оператор $\mathcal{L}$ обратим. Предположим противное, пусть $\mathcal{L}\rho = 0$ для некоторого вектора $\rho \neq 0$:

$$2\rho - \langle l_0, \rho\rangle l_0 - \langle Jl_0, \rho\rangle Jl_0 = 0. \tag{4.5}$$

Тогда

$$2\|\rho\|^2 = \langle l_0, \rho\rangle^2 + \langle Jl_0, \rho\rangle^2 \leqslant \|l_0\|^2\|\rho\|^2 + \|Jl_0\|^2\|\rho\|^2 \leqslant 2\|\rho\|^2,$$

поэтому $\|\rho\|^2 = \langle l_0, \rho\rangle^2$. Тем самым $\rho = \gamma l_0$ для некоторого $\gamma \neq 0$. Подставив это выражение для ρ в равенство (4.5), получим

$$2\gamma l_0 - \gamma l_0 - \gamma\langle Jl_0, l_0\rangle Jl_0 = 0. \tag{4.6}$$

В силу свойств матрицы J (1.3) имеем $\langle Jl_0, l_0\rangle = \langle l_0, J^* l_0\rangle = -\langle l_0, Jl_0\rangle = -\langle Jl_0, l_0\rangle$, т. е. $\langle Jl_0, l_0\rangle = 0$, и равенство (4.6) принимает вид $l_0 = 0$, что противоречит соотношению $\|l_0\| = 1$. Таким образом, оператор $\mathcal{L}$ обратим, уравнение (4.4) разрешимо единственным образом и

$$\rho_1 = -\frac{2\varepsilon}{T_0}\mathcal{L}^{-1}J\big(y^0 + (\widetilde{E}^*_\varepsilon - I)l_0\big).$$

Отметим, что отношение ρ_1/ε не константа по ε, в формуле для ρ_1 присутствует равномерно ограниченный по ε оператор $\widetilde{E}^*_\varepsilon = e^{-\left(\frac{T_0}{\varepsilon} + \frac{\vartheta_1}{\varepsilon}\right)J}$.

Покажем, что аналогичную структуру имеют и следующие члены ϑ_k $(k = 2, \ldots)$ ряда для T_ε. Выпишем первое уравнение системы второго приближения для (2.7), (2.8)

$$0 = \vartheta_2 l_0 + T_0\lambda_2 + \vartheta_1\lambda_1 - \varepsilon\langle l_0, J(I - \widetilde{E}_\varepsilon)\rho_1\rangle l_0$$

$$+ \left\{\frac{3}{2}\int\limits_0^{T_\varepsilon} (\langle l_0, E_\varepsilon(t)\rho_1\rangle^2\, dt\, l_0\right\}_2 + \varepsilon J(I - \widetilde{E}_\varepsilon)\rho_1 - \left\{\int\limits_0^{T_\varepsilon} (\langle l_0, E_\varepsilon(t)\rho_1\rangle E_\varepsilon(t)\rho_1\, dt\right\}_2.$$

Здесь $\{\}_2$ означает слагаемые порядка $O(\varepsilon^2)$ в указанном выражении. Таким образом, это уравнение имеет вид

$$0 = \vartheta_2 l_0 + T_0\lambda_2 + F(l_0, \lambda_1, \rho_1, T_0, \vartheta_1, \varepsilon) = \vartheta_2 l_0 + T_0\lambda_2 + O(\varepsilon^2). \tag{4.7}$$

С учетом последнего уравнения системы (4.3), условия $\|l_0\| = 1$ и полученного из (4.2) соотношения $\langle \lambda_2, l_0\rangle = -\|\lambda_1\|^2 - \|\rho_1\|^2 = O(\varepsilon^2)$ после умножения скалярно на l_0 уравнение (4.7) преобразуется к виду

$$0 = \vartheta_2 + \hat{F}(l_0, \lambda_1, \rho_1, T_0, \vartheta_1, \varepsilon) = \vartheta_2 + O(\varepsilon^2).$$

Таким образом, $\vartheta_2 = O(\varepsilon^2)$, $\varepsilon \to 0$. Но ϑ_2 не является постоянной, умноженной на ε^2, аналогично ρ_1, она содержит равномерно ограниченный по ε множитель $\widetilde{E}_\varepsilon$. Тем самым, ряд для решения будет асимптотическим в смысле Эрдейи [15, Definition 2.4] по степенной асимптотической последовательности.

5. Получение и обоснование асимптотики оптимального времени T_ε и оптимального управления $u_\varepsilon(t)$

Стандартным образом, последовательно выписывая задачи для $\omega_k = (\lambda^*_k, \rho^*_k, \vartheta_k)^*$, $k = 2, \ldots$ из (3.2), получим однозначно разрешимые уравнения

$$C\omega_k = G_k(\omega_1, \ldots, \omega_{k-1}, \varepsilon),$$

где

$$C\omega = \begin{pmatrix} T_0\lambda + \vartheta l_0 \\ \mathcal{L}\rho \\ \langle l_0, \lambda\rangle \end{pmatrix}, \quad \omega = (\lambda^*, \rho^*, \vartheta)^*, \quad G_k(\omega_1, \dots, \omega_{k-1}, \varepsilon) = O(\varepsilon^k),$$

откуда найдутся все $\omega_k = O(\varepsilon^k)$, $k = 2, \dots$. Пусть $\hat{\omega}_N = (l_0^*, 0, T_0)^* + \sum_{k=1}^N \omega_k$, а $\hat{\omega} = \omega - \hat{\omega}_N$, где в силу явного вида найденных ω_k справедливо соотношение $\hat{\omega} = o(1)$, $\varepsilon \to 0$, тогда система (2.7), (2.8) для $\hat{\omega}$ преобразуется к системе следующего вида

$$C\hat{\omega} = \mathcal{H}_N(\varepsilon, \hat{\omega}), \quad \mathcal{H}_N(\varepsilon, \hat{\omega}) = O(\varepsilon^{N+1}) + O(\varepsilon\|\hat{\omega}\|) + O(\|\hat{\omega}\|^2), \quad \varepsilon \to 0.$$

В силу обратимости оператора C и ограниченности C^{-1} приходим к уравнению

$$\hat{\omega} = \mathcal{F}_N(\varepsilon, \hat{\omega}), \quad \mathcal{F}_N(\varepsilon, \hat{\omega}) = O(\varepsilon^{N+1}) + O(\varepsilon\|\hat{\omega}\|) + O(\|\hat{\omega}\|^2), \quad \varepsilon \to 0,$$

и для любого $\varepsilon > 0$ отображение $\mathcal{F}_N(\varepsilon, \hat{\omega})$ непрерывно по $\hat{\omega}$.

Утверждение. *Если при $\hat{\omega} = o(1)$, $\varepsilon \to 0$ справедливо $\mathcal{F}_N(\varepsilon, \hat{\omega}) = O(\varepsilon^{N+1}) + O(\varepsilon\|\hat{\omega}\|) + O(\|\hat{\omega}\|^2)$ и для любого $\varepsilon > 0$ отображение $\mathcal{F}_N(\varepsilon, \hat{\omega})$ непрерывно по $\hat{\omega}$, то существует $\hat{\omega} = O(\varepsilon^{N+1})$ — решение уравнения $\hat{\omega} = \mathcal{F}_N(\varepsilon, \hat{\omega})$.*

Доказательство. Пусть $\|\mathcal{F}_N(\varepsilon, \hat{\omega})\| \leqslant K(\varepsilon^{N+1} + \varepsilon\|\hat{\omega}\| + \|\hat{\omega}\|^2)$. Возьмем $M := B[0; 2K\varepsilon^{N+1}]$ — шар с центром в точке 0 радиуса $2K\varepsilon^{N+1}$. Тогда, если $\hat{\omega} \in M$, то $\|\mathcal{F}_N(\varepsilon, \hat{\omega})\| \leqslant K\varepsilon^{N+1}(1 + 2K\varepsilon + 4K^2\varepsilon^{N+1})$ и при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, таких, что справедливо неравенство $2K\varepsilon + 4K^2\varepsilon^{N+1} \leqslant 1$ выполняется $\mathcal{F}_N(\varepsilon, \hat{\omega}) \in M$. Тогда по теореме Шаудера — Тихонова [16, с. 628] при всех таких $\varepsilon > 0$ существует $\hat{\omega} = O(\varepsilon^{N+1})$ неподвижная точка отображения $\mathcal{F}_N(\varepsilon, \hat{\omega})$. □

В силу утверждения существует такой вектор $(l_\varepsilon^*, \rho_\varepsilon^*, T_\varepsilon)^*$, что

$$(l_\varepsilon^*, \rho_\varepsilon^*, T_\varepsilon)^* = (l_0^*, 0, T_0)^* + \sum_{k=1}^{N} \omega_k + O(\varepsilon^{N+1}),$$

при этом вектор $r_\varepsilon = (\overset{1}{r}{}^*_\varepsilon, \overset{2}{r}{}^*_\varepsilon)^*$, для которого $\overset{1}{r}_\varepsilon = l_\varepsilon$, $\overset{2}{r}_\varepsilon = -\varepsilon J(\rho_\varepsilon + l_\varepsilon)$, удовлетворяет уравнению (2.2) и, тем самым, порождает оптимальное управление $u_\varepsilon(t)$.

Замечание 1. Отметим, что теорема о существовании неявного отображения в данном случае неприменима, поскольку производная оператора $\mathcal{F}_N(\varepsilon, \widetilde{\omega})$ по одной из компонент вектора $\widetilde{\omega}$ не определена при $\varepsilon = 0$ и не может быть доопределена по непрерывности.

Замечание 2. Отметим, что в данной работе мы не исследуем единственность представления оптимального управления через вектор r_ε (2.1) [8], и в связи с этим частичные суммы построенных рядов (3.2) для l_ε и ρ_ε могут в итоге приближать разные векторы r_ε. Тем не менее, в силу единственности как оптимального управления (доказательство этого факта аналогично доказательству второй теоремы единственности [12, с. 178]), так и времени быстродействия, ряд (3.2) для T_ε есть асимптотическое разложение времени быстродействия, а асимптотическое разложение оптимального управления получается подстановкой найденных рядов для l_ε и ρ_ε с учетом замены (2.3) вместо r_ε в формулу (2.1). Это позволяет далее получить и асимптотику компонент вектора состояния системы.

Из приведенных выше рассуждений вытекает справедливость следующей основной теоремы.

Теорема 3. *При выполнении предположения* (1.12) *время быстродействия T_ε, оптимальное управление и компоненты вектора состояния раскладываются в асимптотические в смысле Эрдейи ряды по степеням $\{\varepsilon^k\}$, слагаемые которых однозначно определяются рядами* (3.2).

Формула (2.1) *при подстановке в нее частичной суммы $\hat{\omega}_N$ без слагаемых порядка $O(\varepsilon^{N+1})$ дает так называемое субоптимальное управление* $(N+1)$*-го порядка* [17; 18]. □

З а м е ч а н и е 3. Отметим, что доказанная теорема справедлива и для задачи оптимального быстродействия вида (1.1), и в случае $x, y \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^n$, $n > 2$, если матрица J удовлетворяет соотношениям (1.3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
2. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
3. **Васильева А.Б., Дмитриев М.Г.** Математический анализ. Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ, 1982. Т. 20. С. 3–77.
4. **Kokotovic P.V., Haddad A.H.** Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast models // IEEE Trans. Automat. Control. 1975. Vol. 20, no. 1. P. 111–113.
5. **Дончев А.** Системы оптимального управления: Возмущения, приближения и анализ чувствительности. М.: Мир, 1987. 156 с.
6. **Гичев Т.Р., Дончев А.Л.** Сходимость решения линейной сингулярно возмущенной задачи быстродействия // Прикл. математика и механика. 1979. Т. 43, № 3. С. 466–474.
7. **Данилин А.Р., Ильин А.М.** О структуре решения одной возмущенной задачи быстродействия // Фундаментал. и прикл. математика. 1998. Т. 4, № 3. С. 905–926.
8. **Данилин А.Р., Коврижных О.О.** О зависимости задачи быстродействия для линейной системы от двух малых параметров // Вестн. ЧелГУ. 2011. № 27. С. 46–60. (Математика, механика, информатика; вып 14.)
9. **Данилин А.Р., Коврижных О.О.** Асимптотика оптимального времени в задаче о быстродействии с двумя малыми параметрами // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 92–99.
10. **Данилин А.Р., Коврижных О.О.** О задаче управления точкой малой массы в среде без сопротивления // Докл. РАН. 2013. Т. 451, № 6. С. 612–614.
11. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
12. **Благодатских В.И.** Введение в оптимальное управление. М.: Высш. шк., 2001. 239 с.
13. **Парышева Ю.В.** Асимптотика решения линейной задачи оптимального управления в сингулярном случае // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 266–270.
14. **Данилин А.Р., Коврижных О.О.** Асимптотическое представление решения сингулярно возмущенной линейной задачи быстродействия // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 67–79.
15. **Erdelyi A., Wyman M.** The asymptotic evaluation of certain integral // Arch. Rational Mech. Anal. 1963. Vol. 14. P. 217–260.
16. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
17. **Калинин А.И., Семенов К.В.** Асимптотический метод оптимизации линейных сингулярно возмущенных систем с многомерными управлениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 3. С. 432–443.
18. **Данилин А.Р., Коврижных О.О.** Асимптотика оптимального времени в сингулярно возмущенной линейной задаче быстродействия // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 63–75.

Поступила 25.09.2015

Данилин Алексей Руфимович
д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: dar@imm.uran.ru

Коврижных Ольга Олеговна
канд. физ.-мат. наук, с.н.с.
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
доцент УрФУ
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: koo@imm.uran.ru