ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 1 2016

УДК 517.977

ПОЛНОЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НА ОТРЕЗКЕ С ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ[1]

А. Р. Данилин

Рассматривается задача оптимального управления решениями краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на отрезке при наличии малого параметра при второй производной. Управление скалярное и стеснено геометрическими ограничениями. Построены и обоснованы разложения решения рассматриваемой задачи с точностью до любой степени малого параметра.

Ключевые слова: оптимальное управление, асимптотическое разложение, сингулярно возмущенные задачи, малый параметр.

A. R. Danilin. A complete asymptotic expansion of a solution to a singular perturbation optimal control problem on an interval with geometric constraints.

We consider an optimal control problem for solutions of a boundary value problem on an interval for a second-order ordinary differential equation with a small parameter at the second derivative. The control is scalar and satisfies geometric constraints. Expansions of a solution to this problem up to any power of the small parameter are constructed and validated.

Keywords: optimal control, asymptotic expansion, singular perturbation problems, small parameter.

Введение

Рассматривается задача оптимального управления [1; 2] решениями краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на отрезке при наличии малого параметра при второй производной. Управление скалярное и стеснено геометрическими ограничениями, а критерий качества — интегральный. На данную задачу можно смотреть и как на частный случай общих задач управления, описанных в [3].

Особенностью рассматриваемой задачи является то, что система оптимальности имеет различную структуру на различных, не известных заранее, подобластях области определения системы.

Построены и обоснованы разложения решения рассматриваемой задачи с точностью до любой степени малого параметра.

В настоящей работе, в отличие от [4], построено и обосновано полное асимптотическое разложение решения рассматриваемой задачи для переменных коэффициентов; в статье используются методы, развитые в [5; 6].

1. Постановка задачи и основные соотношения

Рассматривается следующая задача оптимального управления:

$$\mathcal{L}_\varepsilon z_\varepsilon := -\varepsilon^2 z_\varepsilon'' + b(x) z_\varepsilon' + a(x) z_\varepsilon = f + u_\varepsilon, \quad x \in [0,1], \quad z \in H_0^1(0;1), \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \tag{1.1}$$

[1]Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ (проект 14-01-00322), комплексной программы ФНИ УрО РАН (проект “Разработка новых аналитических, численных и асимптотических методов исследования задач математической физики и приложения к обработке сигналов”) и Программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

$$u_\varepsilon \in \mathcal{U} := \{u(\cdot) \in L_2(0;1) \colon |u(x)| \leqslant 1 \text{ почти всюду}\}, \tag{1.2}$$

$$J := \int\limits_0^1 \big((z(x) - z_d(x))^2 + u^2(x)\big)\, dx \to \inf. \tag{1.3}$$

В дальнейшем будем считать, что функции $a(\cdot)$, $b(\cdot)$, $f(\cdot)$ и $z_d(\cdot)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{gathered} a(\cdot),\ b(\cdot),\ f(\cdot),\ z_d(\cdot) \in C^\infty[0;1], \\ \forall\, x \in [0;1] \quad a(x) \geqslant \alpha > 0, \quad b(x) \geqslant \alpha, \quad b'(x) \leqslant 0, \end{gathered} \tag{1.4}$$

а решение уравнения (1.1) понимается в слабом смысле:

$$\forall\, \varphi \in H_0^1(0;1)\ (\varepsilon^2 z_\varepsilon', \varphi') + (b z_\varepsilon', \varphi) + (a z_\varepsilon, \varphi) = (f + u_\varepsilon, \varphi), \tag{1.5}$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(0;1)$. В дальнейшем норму в пространстве $L_2(0;1)$ будем обозначать через $\|\cdot\|$.

Задача (1.1)–(1.3) состоит в том, чтобы привести управляемое состояние z_ε по возможности как можно ближе к некоторому заданному состоянию z_d, но с учетом затраченных на управление ресурсов.

В силу (1.4) для любого $Z \in H_0^1(0;1)$ выполняется

$$(\mathcal{L}_\varepsilon Z, Z) = \varepsilon^2 \|Z\|^2 + ((a - b'/2)Z, Z) \overset{(1.4)}{\geqslant} \varepsilon^2 \|Z'\| + \alpha \|Z\| \geqslant \varepsilon^2 \|Z\|_{H_0^1(0;1)}, \tag{1.6}$$

тем самым задача (1.1)–(1.3) разрешима единственным образом и существует $p_\varepsilon \in H_0^1(0;1)$ такое, что

$$\mathcal{L}_\varepsilon^* p_\varepsilon := -\varepsilon^2 p_\varepsilon'' - b(x) p_\varepsilon' + (a(x) - b'(x)) p_\varepsilon = -z_\varepsilon + z_d, \quad x \in [0,1], \quad z_\varepsilon \in H_0^1(0;1), \tag{1.7}$$

и

$$u_\varepsilon(x) = F(p_\varepsilon) \in H^1(0;1), \qquad \text{где } F(p) = \begin{cases} 1, & p > 1, \\ p, & |p| \leqslant 1, \\ -1, & p < 1. \end{cases} \tag{1.8}$$

Отметим, что равенство (1.7) также понимается в слабом смысле:

$$\forall\, \psi \in H_0^1(0;1)\ (\varepsilon^2 p_\varepsilon', \psi') - (b p_\varepsilon', \psi) + ((a - b') p_\varepsilon, \psi) = (-z_\varepsilon + z_d, \psi). \tag{1.9}$$

Таким образом, система оптимальности для задачи (1.1)–(1.3) имеет следующий вид:

$$\mathcal{L}_\varepsilon z_\varepsilon - F(p_\varepsilon) = f, \quad \mathcal{L}_\varepsilon^* p_\varepsilon + z_\varepsilon = z_d, \quad z_\varepsilon, p_\varepsilon \in H_0^1(0;1). \tag{1.10}$$

Отметим, что в силу свойств дифференциальных операторов второго порядка из условий (1.4) следует: $z_\varepsilon, p_\varepsilon \in C^2[0;1]$.

Целью данной работы является изучение поведения решения системы (1.10) при $\varepsilon \to +0$.

З а м е ч а н и е 1. По сравнению с [3, п. 2.1., формулы (2.25) и (2.26)] в данной работе в качестве сопряженной переменной $p_\varepsilon(\cdot)$ взята сопряженная переменная из [3] со знаком “минус”.

2. Априорные оценки и предельная задача

В силу определения функции F (см. (1.8)) для любых $p, p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ справедливы следующие соотношения:

$$F(-p) = -F(p), \quad |F(p)| \leqslant 1, \quad \bigl(F(p_1) - F(p_2)\bigr)(p_1 - p_2) \geqslant 0, \quad |F(p_1) - F(p_2)| \leqslant |p_1 - p_2|.$$

Поэтому

$$\forall\, p, p_1, p_2 \in L_2(0;1) \quad \|F(p)\|^2 \leqslant 1, \quad \|p_1 - p_2\|^2 \geqslant \bigl(F(p_1) - F(p_2), p_1 - p_2\bigr) \geqslant 0. \tag{2.1}$$

Как показано в [4, утверждение 1],

$$\varepsilon\|z_\varepsilon'\|, \|z_\varepsilon\|, \varepsilon\|p_\varepsilon'\|, \|p_\varepsilon\| = O(1) \ \text{ при } \varepsilon \to +0.$$

Теорема 1. *Пусть $f_{1,\varepsilon}, f_{2,\varepsilon} \in L_2(0;1)$, а $Z_\varepsilon, P_\varepsilon \in C^1[0;1]$ — слабое решение следующей краевой задачи*:

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_\varepsilon Z_\varepsilon - F(P_\varepsilon) = f + f_{1,\varepsilon}, \quad \mathcal{L}_\varepsilon^* P_\varepsilon + Z_\varepsilon = z_d + f_{2,\varepsilon},\\ &Z_\varepsilon(0) = Z_\varepsilon(1) = P_\varepsilon(0) = P_\varepsilon(1) = 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Если $\|f_{i,\varepsilon}\|, Z_\varepsilon(0), Z_\varepsilon(1), P_\varepsilon(0), P_\varepsilon(1) = O\bigl(\varepsilon^\gamma\bigr)$ при $\varepsilon \to +0$ и $\gamma > 0$, то

$$\varepsilon\|Z_\varepsilon' - z_\varepsilon'\|,\ \|Z_\varepsilon - z_\varepsilon\|,\ \varepsilon\|P_\varepsilon' - p_\varepsilon'\|,\ \|P_\varepsilon - p_\varepsilon\| = O\bigl(\varepsilon^\gamma\bigr) \ \text{ при } \varepsilon \to +0.$$

В частности, $\|Z_\varepsilon - z_\varepsilon\|_{C[0;1]}, \|P_\varepsilon - p_\varepsilon\|_{C[0;1]} = O\bigl(\varepsilon^{\gamma-1}\bigr)$ при $\varepsilon \to +0$.

Доказательство. Пусть сначала $Z_\varepsilon(0) = Z_\varepsilon(1) = P_\varepsilon(0) = P_\varepsilon(1) = 0$.

Обозначим $\overline{z}_\varepsilon := Z_\varepsilon - z_\varepsilon$ и $\overline{p}_\varepsilon := P_\varepsilon - p_\varepsilon$. Тогда $\overline{z}, \overline{p} \in H_0^1(0;1)$, а в силу (1.10), (2.2) и определения слабого решения (см. (1.5), (1.9))

$$\begin{aligned} &\forall\, \varphi \in H_0^1(0;1) \quad (\varepsilon^2\overline{z}_\varepsilon', \varphi') + (b\overline{z}_\varepsilon', \varphi) + (a\overline{z}_\varepsilon, \varphi) + (F(p_\varepsilon) - F(P_\varepsilon), \varphi) = (f_{1,\varepsilon}, \varphi),\\ &\forall\, \psi \in H_0^1(0;1) \quad (\varepsilon^2\overline{p}_\varepsilon', \psi') - (b\overline{p}_\varepsilon', \psi) + ((a - b')\overline{p}_\varepsilon, \psi) + (\overline{z}_\varepsilon, \psi) = (f_{1,\varepsilon}, \psi). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Положим сначала в (2.3) $\varphi := \overline{p}_\varepsilon$, $\psi := \overline{z}_\varepsilon$ и, вычитая из второго равенства первое, получим

$$\|\overline{z}_\varepsilon\|^2 + \bigl(P_\varepsilon - p_\varepsilon, F(P_\varepsilon) - F(p_\varepsilon)\bigr) \leqslant \|\overline{z}_\varepsilon\| \cdot \|f_{2,\varepsilon}\| + \|\overline{p}_\varepsilon\| \cdot \|f_{1,\varepsilon}\|. \tag{2.4}$$

Затем, положим в (2.3) $\varphi := \overline{z}_\varepsilon$, а $\psi := \overline{p}_\varepsilon$. В силу неравенств (1.6) и (2.1) получим

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2\|\overline{z}_\varepsilon'\|^2 + \alpha\|\overline{z}_\varepsilon\|^2 \leqslant \|\overline{z}_\varepsilon\| \cdot \|f_{1,\varepsilon}\| + \|\overline{z}_\varepsilon\| \cdot \|\overline{p}_\varepsilon\|,\\ &\varepsilon^2\|\overline{p}_\varepsilon'\|^2 + \alpha\|\overline{p}_\varepsilon\|^2 \leqslant \|\overline{z}_\varepsilon\| \cdot \|\overline{p}_\varepsilon\| + \|f_{2,\varepsilon}\| \cdot \|\overline{p}_\varepsilon\|. \end{aligned} \tag{2.5}$$

При этом все слагаемые, стоящие в левой части неравенств (2.4), (2.5), неотрицательны. Поэтому

$$\|\overline{z}_\varepsilon\|^2 \leqslant \|\overline{z}_\varepsilon\| \cdot \|f_{2,\varepsilon}\| + \|\overline{p}_\varepsilon\| \cdot \|f_{1,\varepsilon}\|, \quad \|\overline{p}_\varepsilon\| \leqslant \alpha^{-1}\|\overline{z}_\varepsilon\| + \alpha^{-1}\|f_{2,\varepsilon}\|.$$

Тем самым $\|\overline{z}_\varepsilon\|^2 \leqslant \|\overline{z}_\varepsilon\| \cdot \|f_{2,\varepsilon}\| + \|f_{1,\varepsilon}\| \cdot \bigl(\alpha^{-1}\|\overline{z}_\varepsilon\| + \alpha^{-1}\|f_{2,\varepsilon}\|\bigr)$. Решая получившееся квадратичное неравенство с учетом условий теоремы, получим $\|\overline{z}_\varepsilon\| = O\bigl(\varepsilon^\gamma\bigr)$. Отсюда в силу соотношений (2.5) следует, что $\|\overline{p}_\varepsilon\| = O\bigl(\varepsilon^\gamma\bigr)$, $\|\overline{z}_\varepsilon'\| = O\bigl(\varepsilon^{\gamma-1}\bigr)$ и $\|\overline{p}_\varepsilon'\| = O\bigl(\varepsilon^{\gamma-1}\bigr)$.

Теперь рассмотрим общую ситуацию.

Пусть $\widetilde{Z}_\varepsilon(x) := Z_\varepsilon(x) - Z_\varepsilon(1)x - Z_\varepsilon(0)(1-x)$ и $\widetilde{P}_\varepsilon(x) := P_\varepsilon(x) - P_\varepsilon(1)x - P_\varepsilon(0)(1-x)$. Тогда $\widetilde{Z}_\varepsilon$ и $\widetilde{P}_\varepsilon$ удовлетворяют нулевым граничным условиям, а

$$\mathcal{L}_\varepsilon\widetilde{Z}_\varepsilon - F(\widetilde{P}_\varepsilon) = f + \widetilde{f}_{1,\varepsilon}, \quad \mathcal{L}_\varepsilon^*\widetilde{P}_\varepsilon + \widetilde{Z}_\varepsilon = z_d + \widetilde{f}_{2,\varepsilon},$$

где $\widetilde{f}_{1,\varepsilon} = f_{1,\varepsilon} + \mathcal{L}(\widetilde{Z}_\varepsilon - Z_\varepsilon) + F(P_\varepsilon) - F(\widetilde{P}_\varepsilon)$, $\widetilde{f}_{2,\varepsilon} = f_{2,\varepsilon} + \mathcal{L}^*(\widetilde{P}_\varepsilon - P_\varepsilon) + (\widetilde{Z}_\varepsilon - Z_\varepsilon)$ и $\|f_{i,\varepsilon}\| = O(\varepsilon^\gamma)$ при $\varepsilon \to +0$.

Последняя оценка $\|Z_\varepsilon - z_\varepsilon\|_{C[0;1]}, \|P_\varepsilon - p_\varepsilon\|_{C[0;1]} = O(\varepsilon^{\gamma-1})$ при $\varepsilon \to +0$ следует из соответствующей теоремы вложения [7]. □

Как показано в [4, теоремы 2, 3], предельной задачей для (1.10) будет

$$\mathcal{L}_0 z_0 - F(p_0) = f, \quad \mathcal{L}_0^* p_0 + z_0 = z_d, \quad z_0(0) = 0, \quad p_0(1) = 0, \tag{2.6}$$

где $\mathcal{L}_0 z_0 := b(x) z_0' + a(x) z_0$, а $\mathcal{L}_0^* p_0 := -b(x) p_0' + \big(a(x) - b'(x)\big) p_0$.

При выполнении на отрезке $[0;1]$ условий

$$(a(x)' - b''(x))b(x) + (a(x) - b'(x))a(x) > \big(b'(x)\big)^2 \tag{2.7}$$

применима теорема 31.6 из [8] и существует $p_0 \in C^2[0;1]$, $z_0 \in C^1[0;1]$ — единственное решение задачи (2.6). При этом

$$\|z_\varepsilon - z_0\|, \ \|p_\varepsilon - p_0\| = O\big(\sqrt{\varepsilon}\big) \ \text{ при } \ \varepsilon \to +0.$$

З а м е ч а н и е 2. Если b — const, то условие (2.7) принимает вид: $a'b + a^2 > 0$. Если же и a – const, то условие (2.7) заведомо выполнено.

3. Внешнее разложение функций z_ε и p_ε

В дальнейшем будем считать, что функция p_0 удовлетворяет следующему условию:

$$\begin{gathered} \exists \ \overset{1}{\vartheta}_0, \overset{2}{\vartheta}_0 \in (0;1) : \overset{1}{\vartheta}_0 < \overset{2}{\vartheta}_0, \quad |p_0(x)| < 1 \text{ при } x \in [0; \overset{1}{\vartheta}_0) \cup (\overset{2}{\vartheta}_0; 1], \\ p_0(x) > 1 \text{ при } x \in (\overset{1}{\vartheta}_0; \overset{2}{\vartheta}_0), \quad p'(\overset{1}{\vartheta}_0) > 0, \ p'(\overset{2}{\vartheta}_0) < 0. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Для единообразия положим $\overset{0}{\vartheta}_0 = 0$, а $\overset{3}{\vartheta}_0 = 1$.

З а м е ч а н и е 3. Поскольку z_0 и p_0 на каждом из отрезков $[\overset{i-1}{\vartheta}_0; \overset{i}{\vartheta}_0]$ являются решениями систем линейных уравнений с гладкими коэффициентами, то и сами они бесконечно дифференцируемы на этих отрезках.

Асимптотическое представление решений z_ε и p_ε мы будем строить как решения систем линейных уравнений разной структуры на промежутках $(0; \overset{1}{\vartheta}_\varepsilon)$, $(\overset{1}{\vartheta}_\varepsilon; \overset{2}{\vartheta}_\varepsilon)$ и $(\overset{2}{\vartheta}_\varepsilon; 1)$, на которых функции $\overset{i}{P}_\varepsilon$, $i = 1, 2, 3$, являющиеся приближением функции p_ε, будут вести себя подобно ей: $|\overset{1}{P}_\varepsilon| < 1$, $|\overset{3}{P}_\varepsilon| < 1$, а $\overset{2}{P}_\varepsilon > 1$. При этом асимптотические разложения данных решений должны быть согласованы в точках $\overset{i}{\vartheta}_\varepsilon$ (построение которых ведется параллельно с построением асимптотических разложений неизвестных функций) по непрерывности до производных первого порядка.

Разложения на каждом из промежутков $(\overset{i-1}{\vartheta}_\varepsilon; \overset{i}{\vartheta}_\varepsilon)$ будут состоять из регулярной (внешнее разложение) и сингулярной (экспоненциально убывающие функции пограничного слоя) частей.

Внешнее разложение z_ε и p_ε будем искать в виде

$$\overset{i}{z}_\varepsilon := \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} \overset{i}{z}_n, \quad \overset{i}{p}_\varepsilon := \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} \overset{i}{p}_n, \quad i = 1, 2, 3, \tag{3.2}$$

где $\overset{i}{z}_n$ и $\overset{i}{p}_n$ при $n = 0$ — это сужение z_0 и p_0 на $[\overset{i-1}{\vartheta}_0; \overset{i}{\vartheta}_0]$, а при $n > 0$ эти функции удовлетворяют следующим системам:

$$\mathcal{L}_0 \overset{i}{z}_n - \beta_i \overset{i}{p}_n = (\overset{i}{z}_{n-1})'', \quad \mathcal{L}_0^* \overset{i}{p}_n + \overset{i}{z}_n = (\overset{i}{p}_{n-1})''; \tag{3.3}$$

здесь $\beta_1 = \beta_3 = 1$, а $\beta_2 = 0$.

Теорема 2. *Пусть* $\overset{i}{f},\overset{i}{g}\in C[\overset{i-1}{\vartheta};\overset{i}{\vartheta}]$ $(i=1,2,3)$. *Тогда для произвольного набора чисел* $\{A_i\}$, $\{B_j\}$ $(i=0,1,2,j=1,2,3)$ *существует единственное решение системы*

$$\mathcal{L}_0\overset{i}{z}-\beta_i\overset{i}{p}=\overset{i}{f},\quad \mathcal{L}_0^*\overset{i}{p}+\overset{i}{z}=\overset{i}{g},\quad x\in(\overset{i-1}{\vartheta};\overset{i}{\vartheta}),\quad i=1,2,3,$$

удовлетворяющее условиям

$$\overset{1}{z}(0)=A_0,\quad \overset{i}{z}(\overset{i}{\vartheta})=\overset{i+1}{z}(\overset{i}{\vartheta})+A_i,\quad \overset{i}{p}(\overset{i}{\vartheta})=\overset{i+1}{p}(\overset{i}{\vartheta})+B_i,\quad \overset{3}{p}(1)=B_3,\quad i=1,2.$$

При этом если $\overset{i}{f},\overset{i}{g}\in C^\infty[0;1]$ $(i=1,2,3)$, *то и* $\overset{i}{z},\overset{i}{p}\in C^\infty[0;1]$ $(i=1,2,3)$.

Доказательство. В силу формулы Коши для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений сформулированная задача удовлетворяет альтернативе Фредгольма: либо она разрешима единственным образом при всех правых частях и наборах чисел $\{A_i\}$, $\{B_j\}$, либо однородная задача имеет нетривиальное решение.

Рассмотрим однородную задачу, т. е. $\overset{i}{f}=\overset{i}{g}=0$ и $A_i=B_j=0$. В силу формулы интегрирования по частям

$$0=(\mathcal{L}_0^*\overset{i}{p}+\overset{i}{z},\overset{i}{z})=\|\overset{i}{z}\|^2-b(x)\overset{i}{z}(x)\overset{i}{p}(x)\Big|_{\overset{i-1}{\vartheta}}^{\overset{i}{\vartheta}}+(\overset{i}{p},\mathcal{L}_0\overset{i}{z})=\|\overset{i}{z}\|^2-b(x)\overset{i}{z}(x)\overset{i}{p}(x)\Big|_{\overset{i-1}{\vartheta}}^{\overset{i}{\vartheta}}+\beta_i\|\overset{i}{p}\|^2.$$

Складывая эти равенства, получим $0=\|\overset{1}{z}\|^2+\|\overset{2}{z}\|^2+\|\overset{3}{z}\|^2+\|\overset{1}{p}\|^2+\|\overset{3}{p}\|^2$. Тем самым $\overset{i}{z}=\overset{1}{p}=\overset{3}{p}=0$. Но тогда $\mathcal{L}_0^*\overset{2}{p}=0$ и $0=\overset{1}{p}(\overset{1}{\vartheta})=\overset{2}{p}(\overset{1}{\vartheta})$, поэтому $\overset{2}{p}=0$. □

4. Внутреннее разложение z_ε и p_ε

Внутреннее разложение в этой задаче возникает в малых окрестностях точек $\overset{i}{\vartheta}_0$:

$$\overset{i,j}{W}_\varepsilon(\overset{i,j}{\vartheta}):=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{2n}\overset{i,j}{W}_n(\overset{i,j}{\vartheta}),\quad \overset{i,j}{V}_\varepsilon(\overset{i,j}{\vartheta}):=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{2n}\overset{i,j}{V}_n(\overset{i,j}{\vartheta}),\quad \overset{i,j}{\vartheta}:=(-1)^j\,\frac{\overset{i}{\vartheta}_0-x}{\varepsilon^2}. \tag{4.4}$$

Здесь индекс i — номер рассматриваемой точки, $j=0$ соответствует левой части окрестности этой точки, а $j=1$ — правой части окрестности этой точки.

Точки $\overset{i}{\vartheta}_\varepsilon$ $(i=1,2)$ смены структуры систем будем искать в виде асимптотических рядов

$$\overset{i}{\vartheta}_\varepsilon:=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{2n}\,\overset{i}{\vartheta}_n\,. \tag{4.5}$$

В силу линейности систем на каждом из рассматриваемых промежутков функции $\overset{i,j}{W}$ и $\overset{i,j}{V}$ в пограничных слоях удовлетворяют соответствующим однородным уравнениям. Тогда коэффициенты внутренних разложений должны удовлетворять следующим системам уравнений:

$$\overset{i,j}{\mathcal{M}}\overset{i,j}{W}_n=\overset{i,j}{\mathcal{F}}\left(\{\overset{i,j}{W}_k\}_{n-1},\overset{i,j}{V}_{n-1}\right),\quad \overset{i,j}{\mathcal{M}}{}^*\overset{i,j}{V}_n=\overset{i,j}{\mathcal{G}}\left(\overset{i,j}{W}_{n-1},\{\overset{i,j}{V}_k\}_{n-1}\right), \tag{4.6}$$

где

$$\overset{i,j}{\mathcal{M}}=-\frac{d^2}{d\overset{i,j}{\vartheta}{}^2}-(-1)^j\,\overset{i}{b}\,\frac{d}{d\overset{i,j}{\vartheta}},\quad \overset{i,j}{\mathcal{M}}{}^*=-\frac{d^2}{d\overset{i,j}{\vartheta}{}^2}+(-1)^j\,\overset{i}{b}\,\frac{d}{d\overset{i,j}{\vartheta}},$$

$\overset{i}{b}=b(\overset{i}{\vartheta}_0)$, а $\overset{i,j}{\mathcal{F}}\left(\{\overset{i,j}{W}_k\}_{n-1},\overset{i,j}{V}_{n-1}\right)$, $\overset{i,j}{\mathcal{G}}\left(\overset{i,j}{W}_{n-1},\{\overset{i,j}{V}_k\}_{n-1}\right)$, — линейные комбинации функций $\overset{i,j}{W}_k$, $k\in\overline{0,n-1}$, их первых производных и $\overset{i,j}{V}_k$ ($\overset{i,j}{V}_k$, $k\in\overline{0,n-1}$, их первых производных и $\overset{i,j}{W}_k$, соответственно) и все коэффициенты в этих комбинациях — многочлены от $\overset{i,j}{\vartheta}$. Нас будут интересовать только решения, экспоненциально стремящиеся к 0 при $\overset{i,j}{\vartheta}\to+\infty$.

Хорошо известно следующее утверждение.

Утверждение. *Если все* $\overset{i,j}{W}_k$, $\overset{i,j}{V}_k$, $k \in \overline{0, n-1}$, *имеют вид* $e^{-\overset{i}{b}\cdot\overset{i,j}{\vartheta}} Q_{i,j,k}(\overset{i,j}{\vartheta})$, *где* $Q_{i,j,k}$ *— многочлены, то у системы* (4.6) *имеются решения такого же вида, при этом* $\overset{i,1}{W}_n$ *и* $\overset{i,0}{V}_n$ *определяются однозначно, а* $\overset{i,0}{W}_n$ *и* $\overset{i,1}{V}_n$ *— с точностью до слагаемого* $Ce^{-\overset{i}{b}\cdot\overset{i,j}{\vartheta}}$. □

Дополнительные условия на решения системы (4.6) проистекают из асимптотических равенств, выражающих удовлетворение граничных условий в точках $x = 0$ и $x = 1$ и согласование по непрерывности до первых производных включительно в точках $x = \overset{i}{\vartheta}_\varepsilon$, $i = 1, 2$.

5. Асимптотическое разложение z_ε и p_ε

Выпишем для рядов $\overset{i}{Z}_\varepsilon := \overset{i}{z} + \overset{i-1,1}{W} + \overset{i,0}{W}$ и $\overset{i}{P}_\varepsilon := \overset{i}{p} + \overset{i-1,1}{V} + \overset{i,0}{V}$ дополнительные условия согласования в виде асимптотических равенств

$$\overset{1}{Z}_\varepsilon(0) = 0 = \overset{1}{P}_\varepsilon(0), \quad \overset{i}{Z}_\varepsilon(\overset{i}{\vartheta}_\varepsilon) = \overset{i+1}{Z}_\varepsilon(\overset{i}{\vartheta}_\varepsilon), \quad \overset{i}{Z}{}'_\varepsilon(\overset{i}{\vartheta}_\varepsilon) = \overset{i+1}{Z}{}'_\varepsilon(\overset{i}{\vartheta}_\varepsilon),$$

$$\overset{i}{P}_\varepsilon(\overset{i}{\vartheta}_\varepsilon) = 1 = \overset{i+1}{P}_\varepsilon(\overset{i}{\vartheta}_\varepsilon), \quad \overset{i}{P}{}'_\varepsilon(\overset{i}{\vartheta}_\varepsilon) = \overset{i+1}{P}{}'_\varepsilon(\overset{i}{\vartheta}_\varepsilon), \quad \overset{1}{Z}_\varepsilon(1) = 0 = \overset{1}{P}_\varepsilon(1), \quad i = 1, 2.$$

Раскладывая

$$\overset{i}{z}_n(\overset{i}{\vartheta}_\varepsilon) = \overset{i}{z}_n\Big(\overset{i}{\vartheta}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{2n}\, \overset{i}{\vartheta}_n\Big), \quad \overset{i}{p}_n(\overset{i}{\vartheta}_\varepsilon) = \overset{i}{p}_n\Big(\overset{i}{\vartheta}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{2n}\, \overset{i}{\vartheta}_n\Big),$$

$$\overset{i,j}{W}_n{}^{(k)}\Big((-1)^j\, \frac{\overset{i}{\vartheta}_0 - \overset{i}{\vartheta}_\varepsilon}{\varepsilon^2}\Big) = \overset{i,j}{W}_n{}^{(k)}\Big((-1)^{j+1}\, \overset{i}{\vartheta}_1 + (-1)^{j+1} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{2n}\, \overset{i}{\vartheta}_{n+1}\Big),$$

$$\overset{i,j}{V}_n{}^{(k)}\Big((-1)^j\, \frac{\overset{i}{\vartheta}_0 - \overset{i}{\vartheta}_\varepsilon}{\varepsilon^2}\Big) = \overset{i,j}{V}_n{}^{(k)}\Big((-1)^{j+1}\, \overset{i}{\vartheta}_1 + (-1)^{j+1} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{2n}\, \overset{i}{\vartheta}_{n+1}\Big), \quad k = 0, 1,$$

в асимптотические ряды по степеням ε, стандартным образом получим системы для определения коэффициентов рассматриваемых рядов.

Для $n = 0$ в силу непрерывной дифференцируемости z_0 и p_0 на $[0; 1]$ имеем

$$\overset{0,1}{P}_0 = -p_0(0) e^{-\overset{0}{b}\,\frac{x}{\varepsilon^2}}, \quad \overset{3,0}{Z}_0 = -z_0(1) e^{-\overset{3}{b}\,\frac{x-1}{\varepsilon^2}}, \quad \overset{i,j}{Z}_0 = \overset{i,j}{P}_0 = 0 \quad \text{для остальных наборов } i, j.$$

Поэтому $(n = 1)$ $\overset{i,1}{W}_1 = \overset{i,0}{V}_1 = 0$, $i = 1, 2$, и

$$\begin{aligned}
&\overset{1}{z}_1(0) = -\overset{0,1}{W}_1(0), \quad \overset{1}{p}_1(0) + \overset{0,1}{V}_1(0) = 0, && \overset{3}{z}_1(1) + \overset{3,0}{W}_1(0) = 0, \quad \overset{3}{p}_1(1) = -\overset{3,0}{V}_1(0),\\
&\overset{i}{z}_1(\overset{i}{\vartheta}_0) + \overset{i,0}{W}_1(-\overset{i}{\vartheta}_1) = \overset{i+1}{z}_1(\overset{i}{\vartheta}_0), && \overset{i,0}{W}_1{}'(-\overset{i}{\vartheta}_0) = 0,\\
&p_0'(\overset{i}{\vartheta}_0)\, \overset{i}{\vartheta}_1 + \overset{i}{p}_1(\overset{i}{\vartheta}_0) = 0, && p_0'(\overset{i}{\vartheta}_0)\, \overset{i}{\vartheta}_1 + \overset{i+1}{p}_n(\overset{i}{\vartheta}_0) + \overset{i,1}{V}_1(\overset{i}{\vartheta}_1) = 0,\\
&\overset{i,1}{V}_1{}'(\overset{i}{\vartheta}_1) = 0, \quad i = 1, 2.
\end{aligned}$$

Отсюда получим, что $\overset{i,0}{W}_1 = \overset{i,1}{V}_1 = 0$, $i = 1, 2$, $\overset{i}{z}_1(\overset{i}{\vartheta}_0) = \overset{i+1}{z}_1(\overset{i}{\vartheta}_0)$ и $\overset{i}{p}_1(\overset{i}{\vartheta}_0) = \overset{i+1}{z}_1(\overset{i}{\vartheta}_0)$.

В силу теоремы 2 из (3.3) однозначно находятся $\overset{i}{z}_n$ и $\overset{i}{p}_n$, после чего также однозначно определяются $\overset{i}{\vartheta}_1$ и функции $\overset{3,0}{W}_1$ и $\overset{0,1}{V}_1$.

При $n>1$ имеем

$$\begin{gathered}\overset{1}{z}_n(0)=-\overset{0,1}{W}_n(0),\quad \overset{1}{p}_n(0)+\overset{0,1}{V}_n(0)=0,\quad \overset{3}{z}_n(1)+\overset{3,0}{W}_n(0)=0,\quad \overset{3}{p}_n(1)=-\overset{3,0}{V}_n(0),\\ \overset{i}{z}_n(\overset{i}{\vartheta}_0)+\overset{i,0}{W}_n(-\overset{i}{\vartheta}_1)=\overset{i+1}{z}_n(\overset{i}{\vartheta}_0)+A_{i,1,n},\quad \overset{i,0}{W}_n{}'(-\overset{i}{\vartheta}_1)=A_{i,2,n},\\ p_0'(\overset{i}{\vartheta}_0)\,\overset{i}{\vartheta}_n+\overset{i}{p}_n(\overset{i}{\vartheta}_0)=B_{i,1,n},\qquad p_0'(\overset{i}{\vartheta}_0)\,\overset{i}{\vartheta}_n+\overset{i+1}{p}_n(\overset{i}{\vartheta}_0)+\overset{i,1}{V}_n(\overset{i}{\vartheta}_1)=B_{i,2,n},\\ \overset{i,1}{V}_n{}'(0)=B_{i,3,n},\quad i=1,2,\end{gathered}\tag{5.1}$$

где константы $A_{i,j,n}$, $B_{i,j,n}$ и функции $\overset{i,1}{W}_n$ и $\overset{i,0}{V}_n$ однозначно определяются коэффициентами разложений с номерами, меньшими n.

Из этой системы однозначно находятся $\overset{i,0}{W}_n$ и $\overset{i,1}{V}_n$ при $i=1,2$, после чего (5.1) принимает вид

$$\begin{gathered}\overset{1}{z}_n(0)=-\overset{1,0}{W}_n(0),\quad \overset{i}{z}_n(\overset{i}{\vartheta}_0)=\overset{i+1}{z}_n(\overset{i}{\vartheta}_0)+A_{i,1,n}-\overset{i,0}{W}_n(-\overset{i}{\vartheta}_1),\\ \overset{i}{p}_n(\overset{i}{\vartheta}_0)=\overset{i+1}{p}_n(\overset{i}{\vartheta}_0)+B_{i,1,n}-B_{i,2,n},\quad \overset{1}{p}_n(1)=-\overset{1,1}{V}_n(\overset{i}{\vartheta}_1),\\ p_0'(\overset{i}{\vartheta}_0)\,\overset{i}{\vartheta}_n=B_{i,1,n}-\overset{i}{p}_n(\overset{i}{\vartheta}_0),\quad \overset{0,1}{V}_n(0)=-\overset{1}{p}_n(0),\quad \overset{3}{z}_n(1)+\overset{3,0}{W}_n(0)=0.\end{gathered}$$

Из нее в силу теоремы 2 однозначно находятся $\overset{i}{z}_n$ и $\overset{i}{p}_n$, после чего также однозначно определяются $\overset{i}{\vartheta}_n$ и функции $\overset{3,0}{W}_n$ и $\overset{0,1}{V}_n$.

Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Коэффициенты рядов* (3.2), (4.4) *и* (4.5) *однозначно определяются условием* (5.1).

В дальнейшем если на промежутках $[x_1;x_2)$, $[x_2;x_3)$, $[x_3;x_4]$ заданы функции g_1, g_2, g_3, то соотношением $g=\langle g_1,g_2,g_3\rangle$ будем обозначать функцию g, сужение которой на i-й промежуток совпадает с g_i.

З а м е ч а н и е 4. Отметим, что функции $z_1=\langle\overset{1}{z}_1,\overset{2}{z}_1,\overset{3}{z}_1\rangle$ и $p_1=\langle\overset{1}{p}_1,\overset{2}{p}_1,\overset{3}{p}_1\rangle$ оказались непрерывными на [0;1].

Теперь с помощью построенных рядов сконструируем приближение исходной задачи с точностью $O(\varepsilon^n)$.

Пусть

$$\begin{gathered}\overset{i}{Z}_{\varepsilon,n}:=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^{2k}\,\overset{i}{z}_k+\sum_{k=0}^{n+1}\varepsilon^{2k}\,\overset{i-1,1}{W}_k+\sum_{k=0}^{n+1}\varepsilon^{2k}\,\overset{i,0}{W}_k,\quad i=1,2,3,\\ \overset{i}{P}_{\varepsilon,n}:=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^{2k}\,\overset{i}{p}_k+\sum_{k=0}^{n+1}\varepsilon^{2k}\,\overset{i-1,1}{V}_k+\sum_{k=0}^{n+1}\varepsilon^{2k}\,\overset{i,0}{V}_k,\quad i=1,2,3,\\ \overset{i}{\vartheta}_{\varepsilon,n}:=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^{2k}\,\overset{i}{\vartheta}_k\ \ (i=1,2),\quad \overset{0}{\vartheta}_{\varepsilon,n}:=0,\quad \overset{3}{\vartheta}_{\varepsilon,n}:=1.\end{gathered}\tag{5.2}$$

Будем рассматривать функции $\overset{i}{Z}_{\varepsilon,n}$ и $\overset{i}{P}_{\varepsilon,n}$ как определенные на $[\overset{i-1}{\vartheta}_{\varepsilon,n};\overset{i}{\vartheta}_{\varepsilon,n}]$. Тогда по построению $\overset{i}{Z}_{\varepsilon,n},\overset{i}{P}_{\varepsilon,n}\in C^\infty[\overset{i-1}{\vartheta}_{\varepsilon,n};\overset{i}{\vartheta}_{\varepsilon,n}]$ и

$$\mathcal{L}_\varepsilon\,\overset{i}{Z}_{\varepsilon,n}-\overset{i}{\beta}\overset{i}{P}_{\varepsilon,n}=f+(1-\overset{i}{\beta})+O(\varepsilon^{2n}),\quad \mathcal{L}^*_\varepsilon\,\overset{i}{P}_{\varepsilon,n}+\overset{i}{Z}_{\varepsilon,n}=z_d+O(\varepsilon^{2n}),\quad x\in[\overset{i-1}{\vartheta}_{\varepsilon,n};\overset{i}{\vartheta}_{\varepsilon,n}]\tag{5.3}$$

(даже в смысле $C^1[\overset{i-1}{\vartheta}_{\varepsilon,n};\overset{i}{\vartheta}_{\varepsilon,n}]$).

Однако функции $\widetilde{Z}_{\varepsilon,n}=\langle\overset{1}{Z}_{\varepsilon,n},\overset{2}{Z}_{\varepsilon,n},\overset{3}{Z}_{\varepsilon,n}\rangle$ и $\widetilde{P}_{\varepsilon,n}=\langle\overset{1}{P}_{\varepsilon,n},\overset{2}{P}_{\varepsilon,n},\overset{3}{P}_{\varepsilon,n}\rangle$, вообще говоря, не будут непрерывно дифференцируемы в точках.

Рассмотрим соответствующие скачки этих функций и их производных при $i = 1, 2$:

$$\overset{i}{\varphi}_{1,\varepsilon,n} := \overset{i}{Z}_{\varepsilon,n}(\overset{i}{\vartheta}_{\varepsilon,n}) - \overset{i+1}{Z}_{\varepsilon,n}(\overset{i}{\vartheta}_{\varepsilon,n}), \qquad \overset{i}{\varphi}_{2,\varepsilon,n} := \overset{i}{Z}{}'_{\varepsilon,n}(\overset{i}{\vartheta}_{\varepsilon,n}) - \overset{i+1}{Z}{}'_{\varepsilon,n}(\overset{i}{\vartheta}_{\varepsilon,n}),$$
$$\overset{i}{\psi}_{0,\varepsilon,n} := 1 - \overset{i}{P}_{\varepsilon,n}(\overset{i}{\vartheta}_{\varepsilon,n}), \qquad \overset{i}{\psi}_{1,\varepsilon,n} := 1 - \overset{i+1}{P}_{\varepsilon,n}(\overset{i}{\vartheta}_{\varepsilon,n}),$$
$$\overset{i}{\psi}_{2,\varepsilon,n} := \overset{i}{P}{}'_{\varepsilon,n}(\overset{i}{\vartheta}_{\varepsilon,n}) - \overset{i+1}{P}{}'_{\varepsilon,n}(\overset{i}{\vartheta}_{\varepsilon,n}).$$

Отметим, что по построению

$$\overset{i}{\varphi}_{j,\varepsilon,n} = O(\varepsilon^{2n}), \quad \overset{i}{\psi}_{j,\varepsilon,n} = O(\varepsilon^{2n}) \quad \text{при } \varepsilon \to +0. \tag{5.4}$$

Далее, определим малые функции $\widehat{Z}_{\varepsilon,n}$ и $\widehat{P}_{\varepsilon,n}$ так, чтобы функции

$$Z_{\varepsilon,n} := \widetilde{Z}_{\varepsilon,n} + \widehat{Z}_{\varepsilon,n}, \quad P_{\varepsilon,n} := \widetilde{P}_{\varepsilon,n} + \widehat{P}_{\varepsilon,n} \tag{5.5}$$

были уже непрерывно дифференцируемы на $[0;1]$ и $P_{\varepsilon,n}(\overset{i}{\vartheta}_{\varepsilon,n}) = 1$:

$$\begin{gathered}\widehat{Z}_{\varepsilon,n} = \langle 0, (\overset{1}{\varphi}_{2,\varepsilon,n}(x - \overset{1}{\vartheta}_{\varepsilon,n}) + \overset{1}{\varphi}_{0,\varepsilon,n})\sigma_1 + (\overset{2}{\varphi}_{2,\varepsilon,n}(\overset{2}{\vartheta}_{\varepsilon,n} - x) + \overset{2}{\varphi}_{0,\varepsilon,n})\sigma_2, 0\rangle,\\ \widehat{P}_{\varepsilon,n} = \langle \overset{1}{\psi}_{0,\varepsilon,n}\sigma_1, (\overset{1}{\psi}_{2,\varepsilon,n}(x - \overset{1}{\vartheta}_{\varepsilon,n}) + \overset{1}{\psi}_{0,\varepsilon,n})\sigma_1\\ + (\overset{1}{\psi}_{2,\varepsilon,n}(\overset{2}{\vartheta}_{\varepsilon,n} - x) + \overset{1}{\psi}_{1,\varepsilon,n})\sigma_2, \overset{2}{\psi}_{1,\varepsilon,n}\sigma_2\rangle,\end{gathered} \tag{5.6}$$

Здесь σ_i — срезающие функции (гладкие функции с носителями в малых, но не бесконечно малых окрестностях точек $\overset{i}{\vartheta}$, равные тождественно 1 в некоторых подокрестностях этих точек; поэтому и сами они, и их производные 1-го и 2-го порядков ограничены).

Тогда построенные функции $Z_{\varepsilon,n}$ и $P_{\varepsilon,n}$ дважды непрерывно дифференцируемы на каждом из рассматриваемых промежутков, непрерывно дифференцируемы на $[0;1]$, имеют порядок $O(\varepsilon^{2n})$ на концах отрезка $[0;1]$ и

$$F(P_{\varepsilon,n}) = \langle P_{\varepsilon,n}, 1, P_{\varepsilon,n}\rangle.$$

Непосредственная подстановка этих функций в систему (1.10) с учетом (5.3) дает

$$\mathcal{L}_\varepsilon Z_{\varepsilon,n} - F(P_{\varepsilon,n}) = f + O(\varepsilon^{2n}), \quad \mathcal{L}^*_\varepsilon P_{\varepsilon,n} + Z_{\varepsilon,n} = z_d + O(\varepsilon^{2n}).$$

Поэтому применима теорема 2 и можно утверждать следующее.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (1.4), (3.1), z_ε *и* p_ε *— решение системы* (1.10), *а* $Z_{\varepsilon,n}$ *и* $P_{\varepsilon,n}$ *— функции, построенные по формулам* (5.2), (5.5), (5.6).

Тогда $\|z_\varepsilon - Z_{\varepsilon,n}\|_{C[0;1]} = O(\varepsilon^{2n-1})$, $\|p_\varepsilon - P_{\varepsilon,n}\|_{C[0;1]} = O(\varepsilon^{2n-1})$ *при* $\varepsilon \to +0$. □

З а м е ч а н и е 5. Поскольку в силу (5.4) $\widehat{Z}_{\varepsilon,n} = O(\varepsilon^{2n})$ и $\widehat{P}_{\varepsilon,n} = O(\varepsilon^{2n})$ в равномерной метрике пространства $M[0;1]$ ограниченных на $[0;1]$ функций, то

$$\|z_\varepsilon - \widetilde{Z}_{\varepsilon,n}\|_{M[0;1]} = O(\varepsilon^{2n-1}), \quad \|p_\varepsilon - \widetilde{P}_{\varepsilon,n}\|_{M[0;1]} = O(\varepsilon^{2n-1}).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
2. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
3. **Лионс Ж.-Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями в частных производных. М.: Мир, 1972. 441 с.

4. **Данилин А.Р., Коробицына Н.С.** Асимптотические оценки решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления на отрезке с геометрическими ограничениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3 С. 104-112.
5. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
6. **Данилин А.Р.** Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления на отрезке с интегральным ограничением // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 76-85.
7. **Соболев С.Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950. 255 с.
8. **Куфнер А., Фучик С.** Нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1988. 304 с.

Данилин Алексей Руфимович
Поступила 28.09.15
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отд.
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: dar@imm.uran.ru