ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 1 2016

УДК 512.542

О ГИПОТЕЗЕ ТОМПСОНА ДЛЯ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ И СИММЕТРИЧЕСКИХ ГРУПП СТЕПЕНИ, БОЛЬШЕЙ 1361 [1]

И. Б. Горшков

Пусть G — конечная группа и $N(G)$ — множество размеров ее классов сопряженных элементов. Доказано, что если $N(G)$ равно $N(\mathrm{Alt}_n)$ или $N(\mathrm{Sym}_n)$, где $n > 1361$, то G имеет композиционный фактор, изоморфный знакопеременной группе Alt_m, где $m \leq n$ и полуинтервал $(m, n]$ не содержит простых чисел.

Ключевые слова: конечная группа, простая группа, знакопеременная группа, симметрическая группа, класс сопряженных элементов, гипотеза Томпсона.

I. B. Gorshkov. On Thompson's conjecture for alternating and symmetric groups of degree greater than 1361.

Let G be a finite group G, and let $N(G)$ be the set of sizes of its conjugacy classes. It is shown that if $N(G)$ equals $N(\mathrm{Alt}_n)$ or $N(\mathrm{Sym}_n)$, where $n > 1361$, then G has a composition factor isomorphic to an alternating group Alt_m with $m \leq n$ and the half-interval $(m, n]$ contains no primes.

Keywords: finite group, simple group, alternating group, symmetric group, conjugacy class, Thompson's conjecture.

Введение

Рассмотрим конечную группу G. Положим $N(G) = \{|g^G| \mid g \in G\}$. В 1987 г. Томпсон сформулировал следующую гипотезу.

Гипотеза Томпсона (см. [16], вопрос 12.38). *Пусть L — конечная неабелева простая группа, G — конечная группа с тривиальным центром и $N(G) = N(L)$. Тогда $G \simeq L$.*

Аналогичную гипотезу можно сформулировать для групп автоморфизмов конечных неабелевых простых групп.

Обозначим через $\pi(n)$ множество всех простых делителей натурального числа n. Для сокращения записи вместо $\pi(|G|)$ будем писать $\pi(G)$. Пусть $GK(G)$ — граф простых чисел группы G, множеством вершин которого является $\pi(G)$ и две вершины p и q которого соединены ребром тогда и только тогда, когда в G найдется элемент порядка pq. В [10] доказана справедливость гипотезы Томпсона для всех простых групп, граф простых чисел которых имеет более чем две компоненты связности. В настоящий момент справедливость гипотезы доказана для многих простых групп лиева типа (см., например, [6]). В [7] доказана справедливость гипотезы для знакопеременных групп Alt_n, где среди чисел $n, n-1, n-2$ найдется простое число. В [4; 17] доказана справедливость гипотезы для групп Alt_{10} и Alt_{16} соответственно. В недавней работе автора [13] доказано, что конечная группа с тем же множеством размеров классов сопряженных элементов, что и некоторая знакопеременная или симметрическая группа, не разрешима. В настоящей статье изучаются композиционные факторы группы с тем же множеством размеров классов сопряженных элементов, что и у некоторой знакопеременной или симметрической группы степени, большей 1361. Доказана следующая

Теорема. *Пусть G — конечная группа такая, что $N(G) = N(V_n)$, где $V_n \in \{\mathrm{Alt}_n, \mathrm{Sym}_n\}$ и $n > 1361$. Тогда G имеет композиционный фактор, изоморфный знакопеременной группе Alt_m, где $m \leq n$ и полуинтервал $(m, \ldots, n]$ не содержит простых чисел.*

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 15-11-10025).

1. Предварительные результаты

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [8; 12]. Если p — простое число, то наибольшая степень числа p, делящая натуральное число n, будет обозначаться через n_p. Через $\gamma(x)$ обозначается число простых чисел, не превосходящих действительного числа x. Пусть π — некоторое множество простых чисел. Говорят, что конечная группа обладает свойством D_π, если в ней существует холлова π-подгруппа и все ее холловы π-подгруппы сопряжены. Для сокращения записи будем писать $G \in D_\pi$, если группа G обладает свойством D_π.

Лемма 1.1 [5, следствие 6.7]. *Пусть G — конечная группа и π — некоторое множество простых чисел. Тогда $G \in D_\pi$, если и только если каждый композиционный фактор группы G обладает свойством D_π.*

Лемма 1.2 [18]. *Пусть G — конечная группа и π — некоторое множество простых чисел. Если группа G обладает нильпотентной холловой π-подгруппой, то $G \in D_\pi$.*

Лемма 1.3 [2, лемма 14]. *Любое нечетное число из $\pi(\mathrm{Out}(L))$, где L — конечная простая неабелева группа, лежит в $\pi(L)$ или не превосходит $m/2$, где $m = max\{p \mid p \in \pi(L)\}$.*

Лемма 1.4 [17, лемма 5]. *Пусть K — нормальная подгруппа конечной группы G и $\overline{G} = G/K$. Пусть $x \in G$ и $\overline{x} = xK \in G/K$. Справедливы следующие утверждения:*

(i) *$|x^K|$ и $|\overline{x}^{\overline{G}}|$ делят $|x^G|$;*

(ii) *если L и M — соседние члены композиционного ряда группы G, $L < M$, $S = L/M$, $x \in M$ и $\widetilde{x} = xL$, то $|\widetilde{x}^S|$ делит $|x^G|$;*

(iii) *если $y \in G, xy = yx$ и $(|x|, |y|) = 1$, то $C_G(xy) = C_G(x) \cap C_G(y)$;*

(iv) *если $(|x|, |K|) = 1$, то $C_{\overline{G}}(\overline{x}) = C_G(x)K/K$.*

Лемма 1.5 [12, теорема 5.2.3]. *Пусть конечная группа A действует как группа автоморфизмов на конечной абелевой группе G и $(|G|, |A|) = 1$. Тогда $G = C_G(A) \times [G, A]$.*

Лемма 1.6. *Пусть S— конечная неабелева простая группа. Тогда для любого $p \in \pi(S)$ существует $a \in N(S)$ такое, что $|a|_p = |S|_p$.*

Доказательство. Если S — группа лиева типа или спорадическая группа, то утверждение леммы следует из [3].

Пусть $S \simeq \mathrm{Alt}_n, n \geq 5$ и $p \in \pi(S)$. Несложно показать, что одно из чисел $n - p + 1, \ldots, n$ при нечетном p и одно из чисел $n - 3, n - 2, n - 1, n$ при $p = 2$ разлагается в сумму нечетных попарно различных простых чисел, отличных от p. Следовательно, в S найдется элемент g такой, что $p \notin \pi(C_S(g))$. □

Лемма 1.7. *Пусть G — конечная группа, $p \in \pi(G)$ и p^2 не делит n для любого $n \in N(G)$. Тогда силовская p-подгруппа группы G абелева.*

Доказательство аналогично доказательству [17, лемма 2]. □

Лемма 1.8 [14, лемма 5]. *Пусть $3 < n \in \mathbb{N}$ и p — простое число. Тогда $|n!|_p \leq |n!|_2 < 2^n$.*

Лемма 1.9. *Пусть $\Omega = \{t \mid t$ — простое число, $n/2 < t \leq n\}$. Если $n > 1361$, то $|\Omega| > \log_2(n!/p!)$.*

Доказательство. Существует оценка $0,921 \cdot (x/\ln x) < \gamma(x) < 1,106 \cdot (x/\ln x)$ (см. [1, гл. 35, §1]). Имеем $|\Omega| = \gamma(n) - \gamma(n/2) \geq \dfrac{0,921 \cdot n}{\ln n} - \dfrac{1,106 \cdot n/2}{\ln(n/2)}$. В [9] доказано, что $n - p < n^{0,525}$. Из полученных оценок легко следует утверждение леммы при $n \geq 1000000$. При $1361 < n < 1000000$ утверждение леммы проверяется при помощи [11]. $\square$

Лемма 1.10. *Пусть A равно произведению всех простых чисел t таких, что $n/2 < t < 3n/4$, где $n > 1000$. Тогда $\ln A > n/9$.*

Доказательство. При $1000 < n < 10^{11}$ утверждение леммы проверяется при помощи [11]. Таким образом, можно считать, что $n \geq 10^{11}$. Пусть p_k — k-е простое число и $\vartheta(m) = \sum \ln p$, где p пробегает простые числа, не превосходящие m. Тогда $k(\ln k + \ln\ln k - 1 + (\ln\ln k - 2.050735)/\ln k) \leq \vartheta(p_k) \leq k(\ln k + \ln\ln k - 1 + (\ln\ln k - 2)/\ln k)$ (см. [15, леммы 6.2, 6.3]). Из этих неравенств и того, что $n/\ln n < \gamma(n) < 1,25506 \cdot n/\ln n$, следует утверждение леммы. $\square$

Лемма 1.11. *Пусть $\Upsilon_n = \{t \mid t$ — простое число, $3n/4 < t \leq n\}$. Тогда $|\Upsilon_n| > 0,1n/\ln n$.*

Доказательство аналогично доказательству [2, лемма 3]. $\square$

2. Доказательство теоремы

Введем следующие обозначения: $V_n \in \{\mathrm{Alt}_n, \mathrm{Sym}_n\}$, где $n > 1361$, G — конечная группа такая, что $N(G) = N(V_n)$, $\Omega = \{t \mid t$ — простое число, $n/2 < t \leq n\}$, t_1 — наименьшее число из Ω, $p = t_{|\Omega|}$ — наибольшее число из Ω. Ввиду основного результата статьи [7] будем считать, что если $V_n = \mathrm{Alt}_n$, то числа n и $n-1$ не просты.

Лемма 2.1. *Пусть $g \in G$ и $|g| = t \in \Omega$. Если $\rho = \pi(|g^G|) \cap \Omega \neq \varnothing$, то в G существует неабелев композиционный фактор S с элементом a таким, что $|a| = t$ и $\rho \subseteq \pi(|a^S|)$.*

Доказательство. Заметим, что из леммы 1.7 следует, что силовская t-подгруппа группы G абелева и, следовательно, $|g^G|$ не делится на t. Пусть K — максимальная нормальная подгруппа в G такая, что образ $\overline{g}$ элемента g в группе $\overline{G} = G/K$ нетривиален и $\rho \subseteq \pi(|\overline{g}^{\overline{G}}|)$. Пусть R — минимальная нормальная подгруппа в $\overline{G}$. Подгруппа R представима в виде $R = R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_l$ — прямого произведения l изоморфных простых групп.

Предположим, что $|\overline{g}^R|$ делится на $r \in \rho$. Допустим, что найдется i такое, что $R_i^{\overline{g}} \neq R_i$. Поскольку R — прямое произведение изоморфных групп, то $r \in \pi(|R_i|)$. Следовательно, $|\overline{g}^R|$ делится на $r^{|\overline{g}|-1}$. Из леммы 1.4 следует, что $|g^G|$ делится на $r^{|\overline{g}|-1}$; противоречие с тем, что в $N(G)$ нет числа, делящегося на r^2. Таким образом, если $|\overline{g}^R|$ делится на $r \in \rho$, то $R_i^{\overline{g}} = R_i$ для $1 \leq i \leq l$. По лемме 1.3 можно считать, что $\overline{g}$ индуцирует на группе R ее внутренний автоморфизм. Таким образом, в R найдется элемент z такой, что для любого $h \in R$ выполнено равенство $h^z = h^{\overline{g}}$. Поскольку группы $R_i, 1 \leq i \leq l$, изоморфны, то при $l > 1$ в R найдется элемент y такой, что $|y^R|$ делится на r^2, а следовательно, и в G найдется элемент h такой, что $|h^G|$ делится на r^2; противоречие. Таким образом, $l = 1$.

Поскольку k^2 не делит α для всех $k \in \Omega$ и $\alpha \in N(G)$, из леммы 1.6 следует, что k^2 не делит $|R|$ для всех $k \in \Omega$.

Допустим, что существует $r_2 \in \pi(|z^{\overline{G}}|) \cap (\rho \setminus \pi(|z^R|))$. Легко показать, что найдется элемент $x \in \overline{G} \setminus R$ порядка r_2 такой, что любой элемент из $x^{\overline{G}}$ не централизует z. Элемент x индуцирует на группе R ее внутренний автоморфизм. Следовательно, найдется элемент $x' \in R$ такой, что $b^{x'} = b^x$ для любого $b \in R$. Поскольку $r_2 \notin \pi(|z^R|)$, централизатор $C_R(z)$ содержит некоторую силовскую r_2-подгруппу группы R, в частности найдется элемент $y \in R$ такой, что $(x')^y \in C_R(z)$. Но тогда $z = z^{(x'^{-1}x)^y} = z^{x^y}$; противоречие с тем, что любой элемент, сопряженный в $\overline{G}$ с x, не централизует z. Таким образом, $\pi(|z^{\overline{G}}|) \cap \rho = \pi(|z^R|) \cap \rho$.

Допустим, что существует $r_2 \in \rho \setminus \pi(|z^R|)$. Пусть $\widetilde{G} = \overline{G}/R$ и $\widetilde{g} = \overline{g}R$. Докажем, что $r_2 \in \pi(|\widetilde{g}^{\widetilde{G}}|)$. Допустим противное. Пусть $H \in Syl_{r_2}(\overline{G})$ и k — наименьшее натуральное число такое, что $\overline{g}'' := \overline{g}^k \in R$. Поскольку $|R|_{r_2} \le r_2$ и $|z^{\overline{G}}|_{r_2} = |z^R|_{r_2} = 1$, имеем $|\overline{g}''^{\overline{G}}|_{r_2} = 1$. Как было замечено выше, $\pi(C_R(z)) \cap \rho = \pi(C_R(\overline{g})) \cap \rho$. Таким образом, можно считать, что $H \cap R \le C_{\overline{G}}(\overline{g})$ и $H \le C_{\overline{G}}(\overline{g}'')$. В H найдется элемент h, не централизующий $\overline{g}$. Пусть $\widetilde{h} \in \widetilde{G}$. Ввиду предположения $\widetilde{h}$ централизует $\widetilde{g}$. Таким образом, в $\overline{G}$ найдутся прообразы h' и $\widehat{g}$ элементов $\widetilde{h}$ и $\widetilde{g}$ соответственно такие, что $\widehat{g}h' = h'\widehat{g}$. Поскольку $h' \in H$, элемент h' централизует любой прообраз порядка t элемента $\widetilde{g}$, в частности централизует $\overline{g}$. Поскольку элемент $\overline{g}$ централизует $H \cap R$, он централизует любой прообраз порядка r_2 элемента $\widetilde{h}$, в частности централизует h; противоречие. Итак, $r_2 \in \pi(|\widetilde{g}^{\widetilde{G}}|)$.

Покажем, что в $\widetilde{G}$ найдется элемент $\widetilde{h}$ порядка r_2 такой, что $t \in \pi(|\widetilde{h}^{\widetilde{G}}|)$. Пусть T — максимальная нормальная подгруппа в $\widetilde{G}$ такая, что $|(\widehat{g})^{\widehat{G}}|$ делится на r_2, где $\widehat{G} = \widetilde{G}/T$ и $\widehat{g} = \widetilde{g}T$. Как и выше, показывается, что группа $\widehat{G}$ имеет простой цоколь $\widehat{R}$ и $|\widehat{g}^{\widehat{R}}|$ делится на r_2. Следовательно, в $\widehat{R}$ найдется элемент $\widehat{h}$ такой, что $|\widehat{h}| = r_2$ и $|\widehat{h}^{\widehat{R}}|$ делится на t. Значит, и в $\widetilde{G}$ найдется элемент $\widetilde{h}$ порядка r_2 такой, что $|\widetilde{h}^{\widetilde{G}}|$ делится на t.

Пусть $\overline{h} \in \overline{G}$ — некоторый прообраз порядка r_2 элемента $\widetilde{h}$. По лемме 1.4 число $|\overline{h}^{\overline{G}}|$ делится на t. Ввиду леммы 1.3 можно считать, что $R \le C_{\overline{G}}(\overline{h})$. Из леммы 1.6 следует, что в R найдется элемент $\overline{u}$ такой, что $|\overline{u}| \ne r_2$ и $t \in \pi(|\overline{u}^R|)$. Из леммы 1.4 следует, что t^2 делит $|\overline{uh}^{\overline{G}}|$; противоречие. Таким образом, $\rho \subseteq \pi(|z^R|)$. Следовательно, z — искомый элемент и $R = S$, т. е. $\pi(|\overline{g}^R|) \cap \rho = \varnothing$.

Предположим, что $\pi(|\overline{g}^R|) \cap \rho = \varnothing$. Покажем, что в этом случае $\overline{g} \in R$. Допустим противное. Из леммы 1.4(iv) и максимальности подгруппы K следует, что $t \in \pi(R)$. Используя леммы 1.6 и 1.4, легко показать, что силовская t-подгруппа группы R имеет порядок t, в частности R — простая группа. Пусть g' — элемент порядка t в $R \cap C_{\overline{G}}(\overline{g})$. Как и выше, показывается, что $|(g')^{\overline{G}}| \cap \rho = \varnothing$. Пусть $N = N_{\overline{G}}(\langle g' \rangle)$. Из аргумента Фраттини следует, что $N/N \cap R \simeq \overline{G}/R = \widetilde{G}$. Поскольку силовская t-подгруппа группы G абелева и $|(g')^{\overline{G}}|$ не делится на числа из ρ, можно считать, что $\overline{G} = N$. Ввиду максимальности подгруппы K найдется число $r \in \pi(\widetilde{G}) \cap \Omega$ такое, что $|\widetilde{G}|_r = |C_{\widetilde{G}}(\widetilde{g})|_r$, где $\widetilde{g} = \overline{g}K$. Пусть $\widetilde{h}$ — элемент порядка r в $C_{\overline{G}}(\widetilde{g})$ и $\overline{h}$ — некоторый прообраз элемента $\widetilde{h}$ в $\overline{G}$. Элемент $\overline{h}$ централизует любой из прообразов порядка t^j элемента $\widetilde{g}$ для любого j, в частности $\widetilde{h}$ централизует элемент $\overline{g}$. Таким образом, $|\overline{g}^{\overline{G}}|$ не делится на r; противоречие. Следовательно, $\overline{g} \in R$. Как и выше, показывается, что в этом случае $\rho = \varnothing$; противоречие. □

Лемма 2.2. *Пусть $t \in \Omega$, $g \in G$ и $|g| = t$. Если существует $r \in \pi(|g^G|) \cap \Omega$, то в G существует элемент h порядка r такой, что $t \in \pi(|h^G|)$.*

Доказательство. По лемме 2.1 в G найдется композиционный фактор S такой, что $\overline{g} \in S, |\overline{g}| = t$ и $|\overline{g}^S|$ делится на r. Из лемм 1.6 и 1.4 следует, что силовские t- и r-подгруппы группы S — циклические группы простых порядков. Пусть $\overline{h} \in S$ и $|\overline{h}| = r$. Предположим, что $|\overline{h}^S|$ не делится на t. Тогда существует $x \in S$, $|x| = t$, такой, что $\langle x \rangle < C_S(\overline{h})$. Подгруппа $\langle x \rangle$ является силовской t-подгруппой группы S. Следовательно, найдется элемент $y \in S$ такой, что $(\langle x \rangle)^y = \langle \overline{g} \rangle$, а значит, $\overline{h}^y \in C_S(\overline{g})$; противоречие. Таким образом, $t \in \pi(|\overline{h}^S|)$. Следовательно, в G найдется элемент h порядка r такой, что $|h^G|$ делится на t. □

Лемма 2.3. *Пусть $t \in \Omega$, $\alpha \in N(G)$ и α не делится на t. Тогда α равно $|V_n|/t|C|$ или $|V_n|/|V_{t+i}||B|$, где $C = C_{V_{n-t}}(g)$ для некоторого элемента $g \in V_{n-t}$, $t + i \le n$ и $B = C_{V_{n-t-i}}(h)$ для некоторого $h \in V_{n-t-i}$.*

Доказательство. Пусть $g \in V_n$ и $|g^H| = \alpha$. Рассмотрим естественное подстановочное представление группы H на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$. Пусть g действует нетривиально на k

точках. Если $k \leq n-t$, то $C_H(g) \simeq V_{n-k} \times B$, где $B \simeq C_{V_k}(g)$. В противном случае $g = xy = yx$, где $|x| = t$ и $y \in V_{n-t}$. Следовательно, $C_H(g) \simeq \langle x \rangle \times C$, где $C = C_{V_{n-t}}(y)$. Таким образом, $|g^H| = |H|/|V_{n-k} \times B|$, т. е. $|g^H| = |H|/|\langle x \rangle \times C|$. □

Пусть $\Phi_t = \{\alpha \in N(G) \mid \alpha = |V_n|/t|C|$, где $C = C_{V_{n-t}}(g)$ для некоторого элемента $g \in V_{n-t}\}$, и $\Psi_t = \{\alpha \in N(L) \mid \alpha = |V_n|/|V_{t+i}|B|$, где $i \geq 0$, $t+i < n-1$, $B = C_{V_{n-t-i}}(g)$ для $g \in V_{n-t-i}\}$.

Лемма 2.4. *Множество $\Psi_{t_i} \setminus \Psi_{t_{i+1}}$, где $t_i \in \Omega$ и $1 \leq i < |\Omega|$, не пусто.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $V_n = \mathrm{Alt}_n$, то по определению $n - p > 2$ и, следовательно, $n - t_{|\Omega|-1} > 2$. Пусть $h \in V_n$ — цикл длины $n - t_i$, если $n - t_i$ нечетно или $n - t_i = 2$ и длины $n - t_i - 1$ в противном случае. Очевидно, что $|h^G| \in \Psi_{t_i} \setminus \Psi_{t_{i+1}}$. □

Лемма 2.5. *Предположим, что существует элемент $g \in G$ такой, что $|g| = t_i \in \Omega$ и $|g^G| \in \Phi_{t_i}$. Тогда для любого числа $t \in \Omega$, большего t_i, существует элемент $h \in G$ такой, что $|h| = t$ и $|h^G| \in \Phi_t$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\pi(g^G) \cap \Omega = \Omega \setminus \{t_i\}$, из леммы 2.1 следует, что в G найдется неабелев композиционный фактор S, в котором существует элемент $\overline{g}$ порядка t_i со свойством $\pi(|\overline{g}^S|) \cap \Omega = \Omega \setminus \{t_i\}$. Из леммы 2.2 следует, что существует элемент $\overline{h} \in S$ такой, что $|\overline{h}| = t$ и $t_i \in |\overline{h}^S|$. Пусть $h \in G$ — некоторый прообраз порядка t элемента $\overline{h}$. Тогда по лемме 1.4 имеем $t_i \in |h^G|$. Поскольку любое число из Ψ_t не делится на числа из Ω, меньшие t, по лемме 2.3 имеем $|h^G| \in \Phi_t$. □

Пусть σ — наименьшее натуральное число такое, что существует элемент $g \in G$, для которого $|g| = t_\sigma \in \Omega$ и $|g^G| \in \Phi_{t_\sigma}$. Если не существует элемента $g \in G$ такого, что $|g| = t \in \Omega$ и $|g^G| \in \Phi_t$, то будем считать, что $\sigma = |\Omega| + 1$ и $\Psi_\sigma = \varnothing$.

Дальнейшее доказательство разобьем на три предложения.

Предложение 1. *Существует элемент $g \in G$ такой, что $|g| \in \Omega$ и $|g^G| \in \Phi_{|g|}$.*

Предложение 2. $\sigma < |\Omega|/2$.

Предложение 3. *Группа G содержит композиционный фактор, изоморфный Alt_m, где $m \leq n$ такое, что в полуинтервале $(m, \ldots, n]$ нет простых чисел.*

Завершение д о к а з а т е л ь с т в а предложения 1. Пусть Θ — конечное подмножество в $\mathbb{N}$. Обозначим через $\Gamma(\Theta)$ ориентированный граф, множеством вершин которого является Θ, и вершины $\alpha, \beta \in \Theta$ соединены ребром от α к β тогда и только тогда, когда α делит β и в Θ нет числа γ такого, что α делит γ и γ делит β. Пусть $h(\Theta)$ — длина максимального пути в графе $\Gamma(\Theta)$ с учетом направленности ребер. Для сокращения записи граф $\Gamma(N(G))$ будем обозначать через $\Gamma(G)$. Напомним, что $p = t_{|\Omega|}$— максимальное простое число из Ω. Предположим, что не существует элемента $g \in G$ такого, что $|g| \in \Omega$ и $|g^G| \in \Phi_{|g|}$.

Лемма 2.6. *Пусть $|g| \in \Omega$. Тогда $|g^G| \in \Psi_p$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $|g^G| \in \Psi_{|g|} \setminus \Psi_p$. Тогда $|g^G|$ делится на p. Следовательно, $|g| \neq p$. По лемме 2.2 в G найдется элемент h порядка p такой, что $|g| \in \pi(|h^G|)$ и, следовательно, $|h^G| \notin \Psi_p$. Из леммы 2.3 следует, что $|h^G| \in \Phi_p$; противоречие. □

Лемма 2.7. $G \in D_\Omega$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 1.1 следует, что достаточно проверить свойство D_Ω для каждого композиционного фактора группы G. Пусть S — неабелев композиционный фактор группы G такой, что $|\pi(S)\cap\Omega|\geq 2$, и r,t — два различных элемента из $\pi(S)\cap\Omega$. Из леммы 1.4 следует, что в $N(S)$ нет числа, делящегося на r^2 или t^2. Из леммы 1.6 следует, что силовская a-подгруппа имеет порядок a для каждого $a\in\{r,t\}$. Из лемм 2.6 и 1.4 следует, что в S существует холлова $\{r,t\}$-подгруппа H порядка rt. Ввиду определения чисел r и t группа H циклическая. Из леммы 1.2 следует, что S обладает свойством $D_{\{t,r\}}$. Пусть $l\in\pi(S)\cap\Omega\setminus\{t,r\}$, $g\in S$ и $|g|=l$. Так как $|g^S|$ не делится на t и r, для некоторого $x\in S$ имеем $H^x<C_S(g)$. Следовательно, в S существует циклическая холлова $\{t,r,l\}$-подгруппа. Используя лемму 1.2, получаем, что S обладает свойством $D_{\{t,r,l\}}$. Проводя эту процедуру $|\pi(S)\cap\Omega|$ раз, получим, что S обладает свойством D_Ω. □

Лемма 2.8. *Холлова Ω-подгруппа группы G абелева.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 1.7 следует, что силовские t-подгруппы группы G абелевы для любого $t\in\Omega$. Предположим, что холлова Ω-подгруппа группы G неабелева. Тогда в G найдется неабелева холлова $\{r,t\}$-подгруппа H для некоторых $r,t\in\Omega$. Пусть $R<G$ — максимальная нормальная подгруппа такая, что образ $\overline{H}$ группы H в группе $\overline{G}=G/R$ неабелев. В $\overline{H}$ найдутся нормальная l-подгруппа T, где $l\in\{r,t\}$, и элемент $g\in\overline{G}$, где $|g|\in\{r,t\}\setminus\{l\}$, действующий на T нетривиально. По лемме 1.5 имеем $T=C_T(g)\times[T,g]$, где $\langle g,[T,g]\rangle$ — группа Фробениуса. Поскольку $l-1$ не делится на $|g|$, получаем, что $|[T,g]|>l$ и T — нециклическая группа. Из определения групп R и T следует, что T лежит в некоторой минимальной нормальной подгруппе K группы G. Если K разрешима, то $K=T$ — элементарная абелева группа и, следовательно, подгруппа $K\cap C_K(g)$ является силовской l-подгруппой в $C_K(g)$. Из леммы 1.4 следует, что в G найдется прообраз h элемента g такой, что $|h^G|$ делится на $|[T,g]|$; противоречие. Поэтому $K=S_1\times S_2\times\ldots\times S_m$, где S_i — неабелева простая группа для $1\leq i\leq m$. Как в лемме 2.1, показывается, что $m=1$. Как отмечалось в лемме 2.7, холловы $\{r,t\}$-подгруппы любого композиционного фактора циклические. Получаем противоречие с тем, что K содержит нециклическую l-подгруппу T. □

Лемма 2.9. *Пусть T — холлова Ω-подгруппа группы G и $\Upsilon=\{|g^G|\mid g\in T\}$. Тогда $|\Omega|\leq h(\Upsilon)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $g_1\in T$ и $|g_1|=t_1\in\Omega$. Ввиду леммы 2.4 в G существует элемент $r_1\in G$ такой, что $|r_1^G|\in\Psi_{t_1}\setminus\Psi_{t_2}$, где t_2 — наименьшее число из $\Omega\setminus\{t_1\}$. Поскольку $G\in D_\Omega$ (см. лемму 2.7), можно считать, что $r_1\in C_G(g_1)$ и холлова Ω-подгруппа группы $C_G(r_1)$ лежит в T. Следовательно, в T найдется элемент g_2 такой, что $|g_2|=t_2$ и $C_G(g_1)\neq C_G(g_2)$. По лемме 2.8 группа T абелева. Таким образом, $|(g_1g_2)^G|>|g_1^G|$. Заметим, что $|g_1^G|$ делит $|(g_1g_2)^G|$. Повторяя эту процедуру $|\Omega|$ раз, получим множество $\Sigma=\{g_1,g_1g_2,g_1g_2g_3,\ldots,g_1g_2\cdots g_{|\Omega|}\}$ такое, что $|g_1^G|\mid|(g_1g_2)^G|\mid\ldots\mid|g_1g_2\ldots g_{|\Omega|}|$. В частности, $h(\Upsilon)\geq|\Omega|$. □

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения 1. Пусть T — холлова Ω-подгруппа группы G. По лемме 2.8 группа T абелева. Из леммы 2.3 следует, что $|g^G|\in\Psi_p$ для любого элемента $g\in T$. Покажем, что $|\Omega|>h(\Psi_p)$. Пусть элементы $h_1,\ldots,h_k\in\Psi_p$ такие, что $|h_1^G|\mid|h_2^G|\mid\ldots\mid|h_k^G|$. Тогда $2h_1\leq h_2,2h_2\leq h_3,\ldots,2h_{k-1}\leq h_k$. Любое число из Ψ_p делится на $n!/p!$. Следовательно, $h(\Psi_p)\leq log_2(n!/p!)$. Из леммы 1.9 получаем, что $|\Omega|\geq log_2(n!/p!)\geq h(\Psi_p)\geq h(\Upsilon)$, где $\Upsilon=\{|g^G|,\ g\in T\}$; противоречие с леммой 2.9. Предложение 1 доказано. □

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения 2. Из предложения 1 следует, что $\sigma\leq|\Omega|$. Допустим, что $\sigma\geq|\Omega|/2$. Пусть $g\in G,|g|=|t_\sigma|\in\Omega,|g^G|\in\Phi_{|g|}$ и $\Theta=\{t\in\Omega|t<t_\sigma\}$. Из леммы 2.1 следует, что в G найдутся композиционный фактор S и элемент $\overline{g}\in S$ такие, что $|\overline{g}|=t_\sigma$ и $\pi(|\overline{g}^S|)\cap\Omega=\Omega\setminus\{t_\sigma\}$. Как и в лемме 2.7, показывается, что в S найдется циклическая холлова Θ-подгруппа T.

Лемма 2.10. *Пусть $S \simeq \Lambda_m(q)$, где $\Lambda_m(q)$— неабелева простая классическая группа лиева типа лиева ранга m над конечным полем порядка q характеристики r. Тогда $m < 11$, если $\Lambda_m(q) \not\simeq A_m(q)$, и $m < 19$, если $\Lambda_m(q) \simeq A_m(q)$.*

Доказательство. Предположим, что $m \geq 11$, если $S \not\simeq A_m(q)$, и $m \geq 19$, если $S \simeq A_m(q)$. Поскольку T — циклическая группа, она лежит в некотором максимальном торе группы G. Из описания порядков максимальных торов (см. [3, лемма 1.2]) следует, что $|T| < q^{m+1}+1$. Из описания порядков конечных простых групп (см. [8]) следует, что $|S|_r \geq q^{m^2-1} > (|T|-1)^{m-1}$, если $S \not\simeq A_m(q)$, и $|S|_r \geq q^{m(m-1)/2} > (|T|-1)^{(m-2)/2}$, если $S \simeq A_m(q)$. Из леммы 1.6 следует, что существует элемент $x \in S$ такой, что $|x^S|_r = |S|_r$. Имеем $|S|_r \leq |V_n|_r$. Из леммы 1.10 и ограничения на m следует, что $\ln|S|_r > n$. Но по лемме 1.8 имеем $\ln|V_n|_r < n\ln 2$; противоречие. □

Лемма 2.11. *$S \not\simeq A_1(q)$.*

Доказательство. Предположим что $S \simeq A_1(q)$, где q —степень простого числа r. Допустим, что $r \in \Omega$. Возьмем в S элемент h порядка r. Поскольку $r^5 < \prod_{t\in\Omega} t$ и силовская r-подгруппа группы S имеет порядок r, получаем $\prod_{t\in\Omega} t > |S|$. Но $\Omega \subseteq \pi(S)$; противоречие. Следовательно, $r \notin \Omega$, $|g|$ делит $a \in \{q+1, q-1\}$ и $O = \prod_{t\in\Omega\setminus\{p\}} t$ делит $b \in \{q+1, q-1\} \setminus \{a\}$. Таким образом, для любого элемента $\overline{x}$ порядка $t_{\sigma-1}$ из S имеем $\pi(|\overline{x}^S|) \cap \Omega = \{p\}$. Следовательно, $\sigma = |\Omega|$. Таким образом, найдется прообраз $x \in G$ элемента $\overline{x}$ такой, что $|x| = |\overline{x}|$ и в $\pi(x) \cap \Omega = \pi(\overline{x}) \cap \Omega = \{p\}$. Следовательно, $|x^G| = c \in \Psi_{t_{|\Omega|-1}}$. В частности, $|\overline{x}^S|_r \leq |c|_r$. Имеем $|\overline{x}^S|_r = q \geq O-1$. Как в лемме 1.10, показывается, что $\ln O > n/5$. Любое число $d \in \Psi_{t_{|\Omega|-1}}$ делит $n!/t_{|\Omega|-1}!$. Используя лемму 1.8, показываем, что $|n!/t_{|\Omega|-1}!|_r \leq 2^{n/\ln(n)+\ln(n)}$. Следовательно, $|\overline{x}^S|_r > |c|_r$; противоречие. □

Аналогично доказательству леммы 2.11 доказываются следующая лемма.

Лемма 2.12. *Группа S не изоморфна конечной неабелевой простой группе ни классического лиева типа лиева ранга $m < 19$, ни исключительного лиева типа.*

Лемма 2.13. *Группа S не изоморфна ни одной из спорадических простых групп.*

Доказательство. Предположим, что S изоморфна спорадической простой группе R. Тогда $|g| > r$ для любого $r \in \pi(R)$, что противоречит включению $|g| \in \pi(|S|)$. □

Предложение 2 теперь следует из лемм 2.10–2.13 и того, что $S \not\simeq \mathrm{Alt}_m$ для $m \geq p$. □

Доказательство предложения 3. Ввиду предложения 2 имеем $\sigma < |\Omega|/2$. Пусть $g \in G$, $|g| = |t_\sigma| \in \Omega$, $|g^G| \in \Phi_{|g|}$ и $\Upsilon = \{t \in \Omega \mid t \geq t_\sigma\}$. Из леммы 2.1 следует, что в G найдутся композиционный фактор S и элемент $\overline{g} \in S$ такие, что $\pi(|\overline{g}^S|) \cap \Omega = \Omega \setminus \{|g|\}$.

Легко показать, что найдутся элементы $g_1, g_2, \ldots, g_{|\Upsilon|} \in S$ такие, что $|g_i| \in \Upsilon$ и $\Upsilon \setminus \{|g_i|\} \subseteq \pi(|g_i^S|)$ для $1 \leq i \leq |\Upsilon|$. Поскольку силовские t-подгруппы группы S — циклические группы порядка t для любого $t \in \Omega$, множество Υ образует коклику в графе $GK(S)$.

Лемма 2.14. *Группа S не изоморфна группе лиева типа.*

Доказательство. Предположим, что $S \simeq \Lambda_m(q)$, где $\Lambda_m(q)$— конечная неабелева простая группа лиева типа лиева ранга m над полем порядка q характеристики r. Как было замечено выше, $t(S) \geq |\Upsilon|$. Поскольку $|\Upsilon| > 20$, S — классическая группа лиева типа. Имеем $[(m-1)/2] > |\Upsilon|$. Таким образом, $|S|_r \geq q^{m(m-1)/2} \geq q^{|\Upsilon|^2-1}$. Из оценки числа $|\Upsilon|$ (см. лемму 1.11) получаем, что $|S|_r > 2^n$; противоречие с леммой 1.8. □

Из лемм 2.13 и 2.14 следует, что $S \cong \mathrm{Alt}_m$, где $m \geq p$.

Предложение 3 и теорема доказаны. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бухштаб А.А.** Теория чисел. М.: Просвещение, 1966. 385 с.
2. **Вакула И.А.** О строении конечных групп, изоспектральных знакопеременной группе // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 45–60.
3. **Васильев А.В., Вдовин Е.П.** Критерий смежности в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 682–725.
4. **Горшков И.Б.** О гипотезе Томпсона для простых групп со связным графом простых чисел // Алгебра и логика. 2012. Т. 51, № 2. С. 168–192.
5. **Ревин Д.О.** Свойство D_π в конечных простых группах // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 3. С. 364–394.
6. **Ahanjideh N., Ahanjideh M.** On the validity of Thompson's conjecture for finite simple groups // Comm. Algebra. 2013. Vol. 41, no. 11. P. 4116–4145.
7. **Alavi S.H., Daneshkhah A.** A new characterization of alternating and symmetric groups // J. Appl. Math. Comp. 2005. Vol. 17, no. 1. P. 245–258.
8. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
9. **Baker R.C.** The difference between consecutive primes. II // Proc. London Math. Soc. 2001. Vol. 83, no. 3. P. 532–562.
10. **Chen G.** On Thompson's conjecture // J. Algebra. 1996. Vol. 185, no. 1. P. 184–193.
11. GAP — Groups, Algorithms, and Programming. Ver. 4.4 [e-resource]. 2004. URL: http://www.gap-system.org .
12. **Gorenstein D.** Finite groups. N. Y.: Harper and Row, 1968. 528 p.
13. **Gorshkov I.B.** Toward Thompson's conjecture for alternating and symmetric groups [e-resource]. 2015. 6 p. URL: http://arxiv.org/pdf/1502.02978.pdf .
14. **Liu S., Yang Y.** On Thompson's Conjecture for alternating groups A_{p+3} // Sci. World J. 2014. Article ID 752598. 1–10 p.
15. **Pierre D.** Estimates of some functions over primes without R.H. [e-resource]. 2010. 20 p. URL: http://arxiv.org/abs/1002.0442 .
16. The Kourovka notebook: unsolved problems in group theory / eds. V.D. Mazurov, E.I. Khukhro. 18th ed. Novosibirsk, 2014. 253 p. URL: http://arxiv.org/pdf/1401.0300v6.pdf .
17. **Vasil'ev A.V.** On Thompson's conjecture // Сиб. электрон. мат. изв. 2009. Т. 6. С. 457–464.
18. **Wielandt H.** Zum Satz von Sylow // Math. Z. 1954. Vol. 60, iss. 1. P. 407–408.

Горшков Илья Борисович
канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: Ilygor8@gmail.com

Поступила 10.09.15