ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 1 2016

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, ГРАФЫ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ КОТОРЫХ НЕ СОДЕРЖАТ ТРЕУГОЛЬНИКОВ. II [1]

О. А. Алексеева, А. С. Кондратьев

Продолжается исследование конечных групп, графы простых чисел которых не содержат треугольников. Основным результатом данной части работы является следующая теорема: если G — конечная неразрешимая группа, граф простых чисел которой не содержит треугольников, и $S(G)$ — наибольшая разрешимая нормальная подгруппа в G, то $|\pi(G)| \leq 8$ и $|\pi(S(G))| \leq 3$. Кроме того, получено детальное описание строения группы G, удовлетворяющей условиям теоремы, в случае, когда $\pi(S(G))$ содержит число, не делящее порядок группы $G/S(G)$. Построен также пример конечной разрешимой группы фиттинговой длины 5, граф простых чисел группы которой является 4-циклом, что завершает нахождение точной верхней оценки фиттинговой длины конечной разрешимой группы, граф простых чисел которой не содержит треугольников.

Ключевые слова: конечная группа, неразрешимая группа, разрешимая группа, фиттингова длина, граф простых чисел.

O. A. Alekseeva, A. S. Kondrat'ev. Finite groups whose prime graphs do not contain triangles. II

The study of finite groups whose prime graphs do not contain triangles is continued. The main result of the given part of the work is the following theorem: if G is a finite non-solvable group whose prime graph does not contain triangles and $S(G)$ is the greatest solvable normal subgroup in G then $|\pi(G)| \leq 8$ and $|\pi(S(G))| \leq 3$. Furthermore, a detailed description of the structure of a group G satisfying the conditions of the theorem in the case when $\pi(S(G))$ contains a number which does not divide the order of the group $G/S(G)$. It is also constructed an example of a finite solvable group with the Fitting length 5 whose prime graph is 4-cycle. This completes the determination of exact bound for the Fitting length of finite solvable groups whose prime graphs do not contain triangles.

Keywords: finite group, non-solvable group, solvable group, Fitting length, prime graph.

Введение

В первой части [1] работы мы исследовали разрешимые и почти простые группы, графы простых чисел которых не содержат треугольников. В данной части работы мы рассматриваем общий случай неразрешимых групп с таким свойством. Мы будем пользоваться обозначениями и терминологией из [1]. Используя результаты [1], мы доказываем следующую теорему.

Теорема. *Если G — конечная неразрешимая группа, граф простых чисел которой не содержит треугольников, и $S(G)$ — наибольшая разрешимая нормальная подгруппа в G, то $|\pi(G)| \leq 8$ и $|\pi(S(G))| \leq 3$.*

Кроме того, в леммах 2.2–2.6 получено детальное описание строения группы G, удовлетворяющей условиям теоремы, в случае, когда $\pi(S(G))$ содержит число, не делящее порядок группы $G/S(G)$ (если $|\pi(S(G))| = 3$, то это всегда так).

В [1] мы нашли верхние оценки фиттинговой длины $l_F(G)$ конечной разрешимой группы G, граф простых чисел которой не содержит треугольников. При этом мы показали, что полученные оценки для $l_F(G)$ точны, кроме, быть может, случая, когда граф простых чисел G является 4-циклом. В разд. 3 данной части работы мы строим пример конечной разрешимой группы фиттинговой длины 5, граф простых чисел которой является 4-циклом. Таким образом, полученная оценка фиттинговой длины и в этом случае точна.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 15-11-10025).

1. Обозначения, терминология и вспомогательные результаты

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [7; 9; 17; 18]. Рассмотрим некоторые результаты, которые используются в доказательстве теоремы.

Напомним, что *EPPO-группой* называется группа, порядки элементов которой являются степенями простых чисел.

Предложение 1 [19, теорема 1; 23, теорема 16; 20, теорема 8.2; 22, предложение 4.2; 11, теоремы 3.1 и 3.14]. *Пусть G — конечная непримарная EPPO-группа. Тогда*

(а) *если G разрешима, то $|\pi(G)| = 2$ и G — группа Фробениуса или 2-фробениусова группа*;

(б) *если G проста, то G изоморфна $L_2(q)$ для $q \in \{5, 7, 8, 9, 17\}$, $L_3(4)$, $Sz(8)$ или $Sz(32)$*;

(в) *если G неразрешима и непроста, то либо $G \cong M_{10}$, либо группа $G/O_2(G)$ изоморфна $L_2(q)$ для $q \in \{4, 8\}$ или $Sz(q)$ для $q \in \{8, 32\}$, где $O_2(G)$ — неединичная элементарная абелева 2-группа, которая как $GF(q)(G/O_2(G))$-модуль изоморфна прямой сумме естественных $GF(q)(G/O_2(G))$-модулей.*

Предложение 2 (лемма Мазурова [5, лемма 1]). *Пусть G — конечная группа, N — нормальная подгруппа в G, G/N — группа Фробениуса с ядром F и циклическим дополнением C. Если $(|F|, |N|) = 1$ и F не содержится в $NC_G(N)/N$, то $s|C| \in \omega(G)$ для некоторого $s \in \pi(N)$.*

Пусть G — конечная группа и V — kG-модуль для конечного поля k характеристики t. Действие группы G на V и пара (G, V) называются *p'-полурегулярными* для некоторого фиксированного простого числа p, если все нетривиальные p'-элементы из G действуют свободно на V (т. е. действуют без неподвижных точек на $V \setminus \{0\}$)), причем это действие и пара (G, V) называются *сепарабельными*, если t не делит $|G|$, и *несепарабельными* — в противном случае (тогда $t = p$).

Пусть $\mathcal{R}$ обозначает множество всех простых чисел r таких, что $r - 1 = 2^a \cdot 3^b$ для $a \geq 2$ и $b \geq 0$ и $(r + 1)/2$ — простое число. Известно, что $5, 13, 37, 73, 193, 1153 \in \mathcal{R}$, но неизвестно, бесконечно $\mathcal{R}$ или нет.

Предложение 3 [13, теорема 4.1]. *Пусть p — простое число и G — нетривиальная конечная группа такая, что $G' = G$ и $O_p(G) = 1$. Если (G, V) — несепарабельная p'-полурегулярная пара, то верно одно из следующих утверждений*:

(а) *$G \cong SL_2(p^a)$ для $a \geq 1$ и $p^a > 3$*;

(б) *$G \cong Sz(2^{2a+1}$ для $a \geq 1$ и $p = 2$*;

(в) *$G \cong Sz(2^{2a+1}) \times SL_2(2^{2b+1})$ для $a, b \geq 1$, $(2a + 1, 2b + 1) = 1$ и $p = 2$*;

(г) *$G \cong SL_2(r)$ для $r \in \mathcal{R}$ и $p = 2$.*

Обратно, если (G, p) удовлетворяет какому-либо из условий (а)–(г), то существует точный неприводимый G-модуль V над полем характеристики p такой, что пара (G, V) p'-полурегулярна.

Предложение 4 [13, теорема 5.6]. *Пусть G — нетривиальная конечная группа и $G' = G$. Если (G, V) — сепарабельная p'-полурегулярная пара, то верно одно из следующих утверждений*:

(а) *$p = 2$ и существует семейство $K_1, \ldots, K_m$ нормальных 2-подгрупп группы G со следующими свойствами*:

(а1) $\bigcap_{i=1}^{m} K_i = 1$;

(а2) *каждая факторгруппа G/K_i либо изоморфна $SL_2(5)$, либо имеет вид $2_-^{1+4}.A_5$*;

(а3) *если $G/K_i \cong G/K_j \cong SL_2(5)$, то $K_i = K_j$*;

(б) *$p = 3$ и $G \cong SL_2(r)$, где $r \in \mathcal{R} \bigcup \{7, 9, 17\}$*;

(в) *$p \geq 5$ и $G \cong SL_2(5)$.*

Обратно, если (G, p) удовлетворяет любому из условий (а)–(в), то существует точный неприводимый G-модуль V над полем характеристики, не делящей $|G|$, такой, что пара (G, V) p'-полурегулярна.

2. Доказательство теоремы

В дальнейшем пусть G — конечная неразрешимая группа, граф простых чисел которой не содержит треугольников, $S := S(G) \neq 1$ и $\overline{G} := G/S$. Тогда ввиду леммы 3.1 и теоремы 2 из [1] $\overline{G}$ — почти простая группа из заключения этой теоремы. Обозначим через F цоколь группы $\overline{G}$.

Лемма 2.1. *Пусть $r \in \pi(S)$ и R — силовская r-подгруппа в S. Тогда*

(а) *если R — циклическая группа или (обобщенная) группа кватернионов, то вершины r и p смежны в графе $\Gamma(G)$ для всех $p \in \pi(F) \setminus \{r\}$;*

(б) *если $r > 2$ и вершины r и 2 не смежны в графе $\Gamma(G)$, то силовская 2-подгруппа из G изоморфна (обобщенной) группе кватернионов, R абелева, $S = Z^*(G)$ и группа $G/O(G)$ изоморфна одной из групп $2{\cdot}A_7$, $SL_2(27).3$, $SL_2(27){\cdot}6$, $SL_2(q)$ или $SL_2(q){\cdot}2$, где либо $q \in \{5, 7, 9, 17, 25, 49, 81\}$, либо $q = 3^m$, m и $(q-1)/2$ — простые нечетные числа и $|\pi((q+1)/4)| = 1$, либо q — простое число, $q \geq 11$ и $|\pi(q-1)| = |\pi(q+1)| = 2$.*

Доказательство. Пусть $N = N_G(R)$. Тогда по лемме Фраттини $G = SN$. Поскольку $\overline{G} = SN/S \cong N/(S \cap N)$ — почти простая группа, $R \leq S \cap N = S(N)$. Поэтому можно считать, что $G = N$.

Если R — циклическая группа или (обобщенная) группа кватернионов, то $\mathrm{Aut}(R)$ — разрешимая группа и, следовательно, $F \leq \overline{C_G(R)}$, так что утверждение (а) верно.

Пусть выполняется условие утверждения (б) и T — силовская 2-подгруппа в G. Поскольку группа G неразрешима, ввиду теоремы Бернсайда [17, теорема 4.3] T нециклическая. Поскольку группа ST разрешима, в ней существует $\{2, r\}$-холлова подгруппа U, причем можно считать, что $U = RT$. По условию граф $\Gamma(U)$ несвязен, поэтому ввиду предложения 1 U — группа Фробениуса или 2-фробениусова группа и, следовательно, подгруппа $F(U)$ равна $O_2(U)$ или $O_r(U)$. В первом случае R — циклическая подгруппа и по п. (а) леммы r и 2 смежны в графе $\Gamma(G)$, что не так. Поэтому $F(U) = O_r(U)$ и, следовательно, U — группа Фробениуса с абелевым ядром R и дополнением T, изоморфным (обобщенной) группе кватернионов. Ввиду [17, замечание на с. 377] либо $G/O(G) \cong 2{\cdot}A_7$, либо $G/O(G)$ является расширением группы $SL_2(q)$, где $q > 3$ нечетно, посредством циклической группы нечетного или удвоенного нечетного порядка n. В первом случае утверждение (б) справедливо. Пусть выполняется второй случай. Поскольку граф $\Gamma(G)$ не содержит треугольников, имеем $|\pi(q-1)| \leq 2 \geq |\pi(q+1)|$ и, в частности, $|\pi(q^2-1)| \leq 3$. Ввиду п. (б) предложения 1 и [4] из последнего неравенства вытекает, что либо $q \in \{5, 7, 9, 17, 25, 49, 81\}$, либо $q = 3^m$, m и $(q-1)/2$ — простые нечетные числа и $|\pi((q+1)/4)| = 1$, либо q — простое число, $q \geq 11$ и $|\pi(q-1)| = |\pi(q+1)| = 2$.

Предположим, что n делится на нечетное простое число p. Тогда порядок группы $\mathrm{O}ut(F)$ (см. [9, Tabl. 5]) показывает, что $q = 3^m$, где $p = m$. Поэтому ввиду [18, теорема 2.5.12, предложения 4.9.1, 4.9.2] группа G/S содержит элемент x, индуцирующий на ее цоколе полевой автоморфизм порядка p и централизующий в этом цоколе подгруппу, изоморфную $L_2(3) \cong A_4$. Если $p > 3$, то граф $\Gamma(G)$ содержит треугольник $\{2, 3, p\}$. Отсюда $n = 3$ или 6 и $G/O(G) \cong SL_2(27).3$ или $SL_2(27){\cdot}6$. Получаем, что утверждение (б) верно. □

Лемма 2.2. *Пусть S — r-группа для некоторого простого числа r, не делящего $|\overline{G}|$. Тогда верно одно из следующих утверждений*:

(а) *$\overline{G}$ изоморфна $L_2(q)$ для $q \in \{5, 7, 8, 9, 17\}$, M_{10}, $L_3(4)$, $Sz(8)$ или $Sz(32)$;*

(б) *$\overline{G} \cong \mathrm{Aut}(Sz(8))$, $\overline{C_G(S)} = F$ и $C_S(x) = 1$ для элемента x порядка 3 из G.*

Доказательство. Покажем сначала, что F является $EPPO$-группой. Пусть $V = S/\Phi(S)$ и $C = C_G(V)$. Тогда $S \leq C \trianglelefteq G$ и, следовательно, либо $C = S$, либо $F \leq \overline{C}$.

Если $F \leq \overline{C}$, то F, очевидно, является $EPPO$-группой. Пусть $C = S$. Тогда группа $\overline{G}$ действует точно на V. Рассмотрим все возможности для F из заключения теоремы 2 из [1].

Пусть $F \cong L_2(q)$, где $q = p^m > 3$, p — простое число и $m \in \mathbb{N}$. Ввиду [10, Tabl. 8.2] в F есть циклические подгруппы A и B порядков $(q-1)/(q-1, 2)$ и $(q+1)/(q-1, 2)$ соответственно такие, что любой элемент из F либо имеет порядок p, либо сопряжен в F с элементом из $A \cup B$. Из таблицы характеров группы $L_2(q)$ (см. [12, теорема 38.1]) легко видеть, что для любого $\chi \in Irr(F)$ скалярные произведения $(1_A, \chi|_A)$ и $(1_B, \chi|_B)$ положительны. Поэтому ввиду [7, (35.14)] $C_V(A) \neq 1 \neq C_V(B)$ и наше утверждение выполняется.

Пусть $F \cong Sz(q)$, где $q = 2^m > 4$ и $m \in \mathbb{N}$. Ввиду [10, Tabl. 8.16] в F есть циклические подгруппы A, B и D порядков $q-1$, $q+\sqrt{2q}+1$ и $q-\sqrt{2q}+1$ соответственно такие, что любой элемент из F либо имеет порядок 2 или 4, либо сопряжен в F с элементом из $A \cup B \cup D$. Подгруппа A нормализует в F некоторую силовскую 2-подгруппу T, причем подгруппа TA изоморфна группе Фробениуса с ядром T и дополнением A, поэтому ввиду предложения 2 $C_V(A) \neq 1$. Из таблицы характеров группы $Sz(q)$ (см. [23]) легко видеть, что для любого $\chi \in Irr(F)$ скалярные произведения $(1_B, \chi|_B)$ и $(1_D, \chi|_D)$ положительны. Поэтому ввиду [7, (35.14)] $C_V(B) \neq 1 \neq C_V(D)$ и наше утверждение выполняется.

Пусть $F \cong {}^2G_2(q)$, где $q = 3^m > 3$ и $m \in \mathbb{N}$. Поскольку $2 \times L_2(q) < F$ (см. [10, Tabl. 8.4.3]), вершины 2 и 3 смежны в графе $\Gamma(F)$. Кроме того, силовские 2- и 3-подгруппы в F нециклические, поэтому вершина r смежна с вершинами 2 и 3 в графе $\Gamma(G)$. Таким образом, $\{2, 3, r\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$; противоречие.

Пусть $F \cong L_3^{\varepsilon}(q)$, где $q = p^m > 3$, p — простое число, $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in \{+, -\}$ и $(\varepsilon, q) \neq (+, 2)$. Ясно, что вершины 2 и r смежны в графе $\Gamma(G)$. Если силовская 3-подгруппа в F нециклическая и F содержит элемент порядка 6, то $\{2, 3, s\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$. Поэтому силовская 3-подгруппа в F циклическая или F не содержит элементов порядка 6.

Пусть силовская 3-подгруппа в F циклическая. Тогда ввиду [1, теорема 2; 9; 10, Tabl. 8.3, 8.5] группа F изоморфна $L_3(8)$, $L_3(17)$, $U_3(4)$ или $U_3(7)$.

Если F изоморфна $L_3(8)$ или $U_3(7)$, то силовская 7-подгруппа в F нециклическая и F содержит элемент порядка 14, поэтому $\{2, 7, r\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$; противоречие.

Если F изоморфна $U_3(4)$, то силовская 5-подгруппа в F нециклическая и F содержит элемент порядка 10, поэтому $\{2, 5, r\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$; противоречие.

Если F изоморфна $L_3(17)$, то силовская 17-подгруппа в F нециклическая и F содержит элемент порядка 34, поэтому $\{2, 17, r\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$; противоречие.

Таким образом, силовская 3-подгруппа в F нециклическая, и F не содержит элементов порядка 6. Поэтому ввиду [6; 14; 16] имеем $p = 2$. Если $\varepsilon = +$, то ввиду [1, теорема 2] имеем $F \cong L_3(4)$, что не противоречит утверждению леммы. Если $\varepsilon = -$, то ввиду [1, теорема 2] и [10, Tabl. 8.5] имеем $(q+1)_3 = 3$, $s := (q+1)/3$ — простое нечетное число и $\mathbb{Z}_{q+1} \times \mathbb{Z}_s < F$. Поэтому $\{3, r, s\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$; противоречие.

Если F изоморфна A_7, A_8, M_{11}, M_{22}, $U_4(2)$, $U_4(3)$, $U_5(2)$, $G_2(3)$ или ${}^2F_4(2)'$, то ввиду [9] группа F содержит элемент порядка 6 и силовская 3-подгруппа в F нециклическая, поэтому $\{2, 3, r\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$; противоречие.

Итак, F является $EPPO$-группой, и по п. (б) предложения 1 F изоморфна некоторой группе из утверждения (а) леммы. Предположим, что $F < \overline{G}$. Тогда по [9] либо $\overline{G} \cong M_{10}$, либо G имеет элемент x порядка $2p$, где $p \in \{3, 5\}$. В первом случае выполняется утверждение (а) леммы. Во втором случае либо $|x^2| \in \pi(F)$, либо $\overline{G} \cong \mathrm{Aut}(Sz(8))$ и $|x^2| = 3 \notin \pi(F)$. Если $|x^2| \in \pi(F)$, то в графе $\Gamma(G)$ должен быть треугольник $\{2, p, r\}$, что не так. Поэтому $\overline{G} \cong \mathrm{Aut}(Sz(8))$ и $|x^2| = 3 \notin \pi(F)$. Если $C_S(x) \neq 1$, то в графе $\Gamma(G)$ должен быть треугольник $\{2, 3, r\}$, что не так. Таким образом, $C_S(x) = 1$. Если $C = S$, то подгруппа Фробениуса вида $13 : 12$ из $\overline{G}$ действует точно на V и, следовательно, по предложению 2 имеем $C_S(x) \neq 1$; противоречие. Поэтому $F \leq \overline{C}$, так что выполняется утверждение (б) леммы. □

Лемма 2.3. *Пусть* $\pi(S) = \{p_1, p_2\}$, *граф* $\Gamma(S)$ *несвязен и* p_1 *не делит* $|\overline{G}|$. *Тогда* S — *группа Фробениуса и верно одно из следующих утверждений*:

(а) p_2 *не делит* $|\overline{G}|$ *и группа* $\overline{G}$ *изоморфна* $L_2(q)$ *при* $q \in \{5, 7, 8, 9, 17\}$, M_{10}, $L_3(4)$, $Sz(8)$ *или* $Sz(32)$;

(б) $p_2 = 3$ *и* $G/O_3(G) = (Z \times E) \rtimes \langle x \rangle$, *где* Z — *циклическая* p_1-*группа*, $E \cong Sz(8)$, $|x| = 3$, $E\langle x \rangle \cong \mathrm{Aut}(Sz(8))$ *и* $C_Z(x) = 1$;

(в) $p_2 = 2$ *и* $G/O_2(G) = (Z \times E)$, *где* Z — *циклическая* p_1-*группа, группа* E *изоморфна* $L_2(q)$ *для* $q \in \{4, 8\}$ *или* $Sz(q)$ *для* $q \in \{8, 32\}$ *и* $O_2(S)$ — *неединичная элементарная абелева* 2-*группа, которая как* $GF(q)E$-*модуль изоморфна прямой сумме естественных* $GF(q)E$-*модулей*;

(г) $p_2 = 2$ *и* $G/O_2(G) = (Z \times E) \leftthreetimes \langle x \rangle$, *где* Z — *циклическая* p_1-*группа,* $E \cong Sz(8)$, $|x| = 3$, $E\langle x \rangle \cong \mathrm{Aut}(Sz(8))$, $C_Z(x) = 1$ *и* $O_2(S)$ — *неединичная элементарная абелева* 2-*группа, которая как* $GF(q)E$-*модуль изоморфна прямой сумме естественных* $GF(q)E$-*модулей*;

(д) $p_2 = 2$, $S = Z^*(G)$ — *группа Фробениуса с абелевым ядром* $O_{p_1}(G)$ *и группа* $G/O_{p_1}(G)$ *изоморфна одной из групп* $2{\cdot}A_7$, $SL_2(27).3$, $SL_2(27){\cdot}6$, $SL_2(q)$ *или* $SL_2(q){\cdot}2$, *где либо* $q \in \{5, 7, 9, 17, 25, 49, 81\}$, *либо* $q = 3^m$, m *и* $(q-1)/2$ — *простые нечетные числа и* $|\pi((q+1)/4)| = 1$, *либо* q — *простое число,* $q \geq 11$ *и* $|\pi(q-1)| = |\pi(q+1)| = 2$;

(е) $p_2 = 2$, $G = O_{p_1}(G) \leftthreetimes H$, *где* $O_{p_1}(G)$ — *абелева группа,* $F^*(H) = Z \circ E$, Z — *циклическая* 2-*группа или (обобщенная) группа кватернионов,* $E \cong SL_2(5)$, $|Z \cap E| = 2$, $O_{p_1}(G)E$ —*группа Фробениуса,* $|H : F^*(H)| \leq 2$, *группа* $\overline{G}$ *изоморфна* A_5 *или* S_5 *и силовская* 2-*подгруппа в* G *содержит более одной инволюции при* $|H : F^*(H)| = 2$.

Доказательство. Пусть $P_i \in Syl_{p_i}(S)$ для $i \in \{1, 2\}$. Ввиду п. (а) предложения 1 S — группа Фробениуса или 2-фробениусова группа, поэтому $F(S) = O_{p_i}(G)$, $F_2(S)/F(S)$ и $S/F_2(S)$ — p_j-группа и p_i-группа соответственно, где $\{i, j\} = \{1, 2\}$.

Предположим, что $i = 2$. Тогда P_1 — циклическая группа. По п. (а) леммы 2.1 вершины p_1 и p смежны в графе $\Gamma(G)$ для всех $p \in \pi(F)$. Отсюда F является $EPPO$-группой.

Предположим, что S — 2-фробениусова группа. Тогда $S/F_2(S)$ — неединичная циклическая p_2-группа и, следовательно, по п. (а) леммы 2.1 вершины p_2 и p смежны в графе $\Gamma(G)$ для всех $p \in \pi(F) \setminus \{p_2\}$. Если $p_2 > 2$, то $\{2, p_1, p_2\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$; противоречие. Если $p_2 = 2$, то $\{2, p_1, p\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$ для $p \in \pi(F) \setminus \{2\}$; противоречие.

Таким образом, S — группа Фробениуса с ядром P_2 и дополнением P_1. Пусть $C = C_G(\Omega_1(Z(P_2)))$. Имеем $C_S(P_2) = P_2$. Предположим, что $C \not\leq S$. Тогда $F \leq \overline{C}$. Если $p_2 \in \pi(F)$, то граф $\Gamma(G)$ содержит треугольник $\{p_1, p_2, p\}$, где $p \in \pi(F) \setminus \{p_2\}$; противоречие. Поэтому $p_2 \notin \pi(F)$.

Пусть $p_2 \notin \pi(\overline{G})$. Тогда по теореме Шура — Цассенхауза $G = P_2 \leftthreetimes (P_1 \leftthreetimes H)$, где $H \cong \overline{G}$. По лемме 2.2, примененной к группам P_1H и P_2H, получаем, что либо выполняется утверждение (а) леммы, либо $\overline{G} \cong \mathrm{Aut}(Sz(8)$ и $C_{P_1}(x) = C_{P_2}(x) = 1$ для элемента x порядка 3 из G. Но во втором случае ввиду теоремы Томпсона (см. [17, 10.2.1]) группа S нильпотентна, что противоречит несвязности графа $\Gamma(S)$. Поэтому выполняется утверждение (а) леммы. Если $p_2 \in \pi(\overline{G})$, то по п. (б) леммы 2.2 выполняется утверждение (б) леммы.

Таким образом, можно считать, что $C = P_2$. Если $p_2 \notin \pi(F)$, то, рассуждая, как в предыдущем абзаце, получим, что выполняются утверждения (а) или (б) леммы. Предположим, что $p_2 \in \pi(F)$. Если $p_2 > 2$, то $\{2, p_1, p_2\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$; противоречие. Поэтому $p_2 = 2$. Пусть $\widetilde{G} = G/P_2$. Тогда по теореме Шура — Цассенхауза $\widetilde{G} = \widetilde{P_1} \leftthreetimes H$, причем $H \cong \overline{G}$ и $\widetilde{P_1}$ централизует подгруппу H', изоморфную F. Пусть E — полный прообраз в G последнего члена ряда коммутантов группы $\widetilde{G}$. Тогда $E \cong F$ и E является $EPPO$-группой. Ввиду предложения 4 и леммы 2.2 выполняются утверждения (в) или (г) леммы.

Пусть теперь $i = 1$. Тогда P_2 — циклическая группа или (обобщенная) группа кватернионов и, следовательно, по п. (а) леммы 2.1 вершины p_2 и t смежны в графе $\Gamma(G)$ для всех $t \in \pi(F) \setminus \{p_2\}$. Случай $p_2 \notin \pi(F)$ рассматривается, как выше. Поэтому считаем, что $p_2 \in \pi(F)$. Если $P_1 < C_G((Z(\Omega_1(P_1)))$, то $F \leq \overline{C_G(\Omega_1(Z(P_1)))}$ и, следовательно, $\{p_1, p_2, t\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$ для $t \in \pi(F) \setminus \{p_2\}$, что не так. Поэтому $C_G(Z(\Omega_1(P_1))) = P_1$.

Если вершины 2 и p_1 не смежны в графе $\Gamma(G)$, то по п. (б) леммы 2.1 выполняется утверждение (д) леммы.

Пусть теперь вершины 2 и p_1 смежны в графе $\Gamma(G)$. По теореме Шура — Цассенхауза $G = P_1 \leftthreetimes H$. Можно считать, что $P_2 = O_{p_2}(H)$. Обозначим через E последний член ряда коммутантов группы H.

Предположим, что $p_2 > 2$. Тогда вершины 2 и p_2 смежны, а вершины p_1 и p_2 не смежны в графе $\Gamma(G)$. Отсюда следует, что силовская p_2-подгруппа в G циклическая. Если $Z(E) = 1$, то $P_2K = P_2 \times E$ и, следовательно, силовская p_2-подгруппа в G нециклическая, что не так. Поэтому $Z(E) \neq 1$, откуда ввиду [1, теорема 2], [9], [10, Tabl. 8.3, 8.5] $Z(E)$ — нееднничная 3-группа и силовская 3-подгруппа в E нециклическая. Но тогда $p_2 = 3$ и силовская 3-подгруппа в G нециклическая; противоречие.

Таким образом, $p_2 = 2$ и E действует точно, $2'$-полурегулярно и сепарабельно на $\Omega_1(P_1)$, поэтому ввиду предложения 4 группа K изоморфна $SL_2(5)$. Поэтому $P_2E = P_2 \circ E = F^*(H)$ и $|P_2 \cap E| = 2$. Ясно, что $O_{p_1}(G)E$ — группа Фробениуса. Поскольку вершины 2 и p_1 смежны в графе $\Gamma(G)$, выполняется утверждение (е) леммы. $\square$

Лемма 2.4. *Пусть $\pi(S) = \{p_1, p_2\}$, граф $\Gamma(S)$ связен и p_1 не делит $p_2|\overline{G}|$. Тогда $p_2 = 2$ и группа $\overline{G}$ изоморфна $L_2(4)$, $L_2(8)$, $Sz(8)$, $\mathrm{Aut}(Sz(8))$ или $Sz(32)$.*

Доказательство. Пусть $P_i \in Syl_{p_i}(S)$ для $i \in \{1, 2\}$. Поскольку группа S разрешима, то $O^{p_1,p_2}(S) < O^{p_1}(S) < S$ или $O^{p_2,p_1}(S) < O^{p_2}(S) < S$. Рассматривая фактор-группу группы G по $O^{p_1,p_2}(S)$ или по $O^{p_2,p_1}(S)$ соответственно, можно считать, что $S = P_i \leftthreetimes P_j$, где $\{i, j\} = \{1, 2\}$. Рассматривая фактор-группу группы G по $\Phi(P_i)$, можно считать также, что P_i — элементарная абелева группа. Положим $\widetilde{G} = G/P_i$.

Предположим, что $p_2 > 2$. Тогда $S = O(G)$. Поскольку вершины p_1 и p_2 смежны и $\{2, p_1, p_2\}$ не является треугольником в графе $\Gamma(G)$, вершина 2 не смежна с p_1 или p_2. Но по п. (б) леммы 2.1 $O(G) < Z^*(G) = S$; противоречие. Таким образом, $p_2 = 2$.

Заметим, что силовские p-подгруппы группы $\overline{G}$ для $p \in \pi(\overline{G}) \setminus \{2\}$ циклические, так как в противном случае граф $\Gamma(G)$ содержит треугольник $\{2, p_1, p\}$.

Предположим, что $i = 2$ и $V = \Omega_1(Z(P_1))$. Тогда ввиду леммы 2.2 и предыдущего абзаца группа $\overline{G}$ изоморфна $L_2(q)$ для $q \in \{5, 7, 8, 17\}$, $Sz(8)$, $\mathrm{Aut}(Sz(8))$ или $Sz(32)$. По теореме Шура — Цассенхауза в группе G существует подгруппа H такая, что $G = P_1H$ и $P_1 \cap H = P_2$. Следовательно, группа $\widetilde{H} = H/P_2$, изоморфная $\overline{G}$, действует на $\widetilde{V} \cong \Omega_1(Z(\widetilde{P_1}))$ и на P_2.

Предположим, что группа $\widetilde{H}$ действует на $\widetilde{V}$ неточно. Тогда ее коммутант действует точно, $2'$-полурегулярно и несепарабельно на P_2. Поэтому H' является $EPPO$-группой, так что ввиду п. (в) предложения 1 и леммы 2.2 утверждение леммы выполняется.

Пусть теперь, что $\widetilde{H}$ действует на $\widetilde{V}$ точно. Тогда по лемме 2.2 группа $\widetilde{H}$ проста. Предположим, что $\overline{G} \cong L_2(q)$ для $q \in \{7, 17\}$. Возьмем в $\widetilde{H}$ элемент x порядка 3. Из таблицы комплексных характеров и таблицы 2-модулярных характеров Брауэра группы $\widetilde{H}$ (см. [8; 9]) видно, что $C_{\widetilde{V}}(x) \neq 1$ и $C_{P_2}(x) \neq 1$. Поэтому $\{2, 3, p_1\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$; противоречие. Таким образом, утверждение леммы выполняется.

Итак, можно считать, что $\underline{i = 1}$ и $P_1 = F(S)$. Тогда $C_S(P_1) = P_1$. Предположим, что $C_G(P_1) \not\leq S$. Поскольку $F \leq \overline{C_G(P_1)}$ и $[S, C_G(P_1)] \leq C_S(P_1) = P_1$, то граф $\Gamma(G)$ содержит треугольник $\{2, p_1, r\}$, где $r \in \pi(F) \setminus \{2\}$; противоречие. Поэтому $C_G(P_1) = P_1$.

По теореме Шура — Цассенхауза $G = P_1 \leftthreetimes H$, где $H/O_2(H) \cong \overline{G}$. Пусть $V = \Omega_1(Z(O_2(H)))$ и $C = C_H(V)$. Тогда либо $F \leq \overline{C}$, либо $C = O_2(H)$.

Предположим, что $F \leq \overline{C}$. Пусть E — последний член ряда коммутантов группы C. Тогда $E' = E$, $E/O_2(E) \cong F$ и E действует точно, $2'$-полурегулярно и сепарабельно на P_1. Ввиду предложения 4 группа E изоморфна $SL_2(5)$, $SL_2(2^m)$ или $Sz(2^m)$. Поскольку 2 и r смежны для всех $r \in \pi(F) \setminus \{2\}$, то $|\pi(F)|$ равно 3 при $K \cong SL_2(2^m)$ и 4 при $Sz(2^m)$. Поэтому ввиду [3; 4] группа E изоморфна $SL_2(5)$, $L_2(4)$, $L_2(8)$, $Sz(8)$ или $Sz(32)$, так что утверждение леммы выполняется.

Пусть $C = O_2(H)$. Тогда для любого элемента $x \in H$ нечетного простого порядка t имеем $V = [V, \langle x \rangle] \times C_V(x)$ и $[V, \langle x \rangle] \neq 1$. Поэтому $[V, \langle x \rangle]\langle x \rangle$ — группа Фробениуса и, следовательно, ввиду предложения 2 имеем $C_V(x) \neq 1$. Таким образом, вершина p_1 смежна с любой вершиной из $\pi(F)$ в графе $\Gamma(G)$. Отсюда следует, что H является $EPPO$-группой, так что ввиду п. (в) предложения 1 утверждение леммы выполняется. $\square$

Лемма 2.5. *Пусть $|\pi(S)| \geq 3$ и граф $\Gamma(S)$ несвязен. Тогда $\pi(S) = \{p_1, p_2, p_3\}$, где вершины p_1 и p_2 смежны, p_1 не делит $|\overline{G}|$, и верно одно из следующих утверждений*:

(а) *$p_2 > 2$, $p_3 = 2$, S — группа Фробениуса с абелевым ядром $O(G) = O_{p_1}(S) \times O_{p_2}(S)$ и дополнением порядка 2, и верно одно из следующих утверждений*:

(а1) p_2 не делит $|\overline{G}|$ и $G/O(G) \cong SL_2(5)$ или $SL_2(5){\cdot}2$;

(а2) p_2 делит $|\overline{G}|$, $p_2 > 3$ и $G/O(G) \cong SL_2(q)$ или $SL_2(q){\cdot}2$, где p_2 делит q, $q \in \{25, 49, p_2\}$ и $|\pi(p_2 - 1)| \leq 2 \geq |\pi(p_2 + 1)|$;

(а3) $p_2 = 3$, $G/O(G) \cong 2{\cdot}A_7$, $SL_2(q)$ или $SL_2(q){\cdot}2$, где либо $q \in \{9, 81\}$, либо $q = 3^m$, m и $(q-1)/2$ — простые нечетные числа и $|\pi((q+1)/4)| = 1$;

(а4) $p_2 = 3$, $G/O(G) \cong SL_2(r)$ или $SL_2(r){\cdot}2$, где r — простое число и либо $r \in \{5, 7, 17\}$, либо $r \geq 13$, $\pi(r-1) = \{2, 3\}$ и $|\pi(r+1)| = 2$;

(б) *$p_2 = 2$, p_3 не делит $|\overline{G}|$, S — группа Фробениуса или 2-фробениусова группа, $F(S) = O_{p_1}(S) \times O_2(S)$, $F_2(S)/F(S)$ и $S/F_2(S)$ — циклические p_3-группа и p_1-группа соответственно, группа $\overline{G}$ изоморфна $L_2(4)$, $L_2(8)$, $Sz(8)$ или $Sz(32)$, $G/F(S) \cong \overline{G} \times S/F(S)$ и $O_2(S)$ — неединичная элементарная абелева 2-группа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду [1, теорема 1] граф $\Gamma(S)$ имеет вид $\overset{p_1}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{p_2}{\circ} \quad \overset{p_3}{\circ}$ или $\overset{p_1}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{p_2}{\circ} \quad \overset{p_3}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{p_4}{\circ}$ и S — группа Фробениуса или 2-фробениусова группа. Ясно, что $|\pi(F(S))|$ и $|\pi(F_2(S)/F(S))|$ не превосходят 2. Предположим, что $|\pi(F_2(S)/F(S))| = 2$. Без ограничения общности можно считать, что $\pi(F_2(S)/F(S)) = \{p_1, p_2\}$. Тогда в S есть изолированная $\{p_1, p_2\}$-холлова подгруппа U такая, что $F(S)U$ есть группа Фробениуса, равная S или $F_2(S)$. В группе U есть элемент порядка p_1p_2, и силовские подгруппы в U, а значит, и в S, циклические или (обобщенные) кватернионные. Ввиду п. (а) леммы 2.1 $\{p_1, p_2, p\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$ для $p \in \pi(F) \setminus \{p_1, p_2\}$; противоречие. Поэтому $|\pi(F_2(S)/F(S))| = 1$. Аналогично рассуждая, получаем, что $|\pi(S/F_2(S))| \leq 1$. Ввиду предложения 2 $\pi(S) \cup \pi(S/F_2(S))$ — клика в графе $\Gamma(S)$, поэтому $|\pi(S)| = 3$ и, следовательно, $\pi((F(S)) \cup \pi(S/F_2(S)) = \{p_1, p_2\}$ и $\pi(F_2(S)/F(S)) = \{p_3\}$. Пусть $P_i \in Syl_{p_i}(S)$ для $i = 1, 2, 3$. Поскольку $F(S)P_3 = F_2(S)$ есть группа Фробениуса, подгруппа P_3 циклическая или (обобщенная) кватернионная. Ввиду п. (а) леммы 2.1 вершины p_3 и p смежны в графе $\Gamma(G)$ для всех $p \in \pi(F) \setminus \{p_3\}$.

Предположим, что произведение p_1p_2 нечетно. Если обе вершины p_1 и p_2 смежны с 2 в графе $\Gamma(G)$, то $\{p_1, p_2, 2\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$; противоречие. Поэтому можно считать, что вершина p_1 не смежна с 2 в графе $\Gamma(G)$. Ввиду п. (б) леммы 2.1 либо $G/O(G) \cong 2{\cdot}A_7$, либо цоколь группы $G/O(G)$ изоморфен $SL_2(q)$, где $q > 3$ нечетно и $|\pi(q-1)| \leq 2 \geq |\pi(q+1)|$. Отсюда следует, что $S = Z^*(G)$ есть группа Фробениуса с абелевым ядром $F(S) = O(G) = P_1 \times P_2$ и p_1 не делит $|\overline{G}|$.

Пусть $G/O(G) \cong 2{\cdot}A_7$. Если $p_2 \neq 3$, то, поскольку силовская 3-подгруппа в G нециклическая, $\{p_1, p_2, 3\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$; противоречие. Поэтому $p_2 = 3$ и выполняется утверждение (а3).

Пусть цоколь группы $G/O(G)$ изоморфен $SL_2(q)$, где $q > 3$ нечетно и $|\pi(q-1)| \leq 2 \geq |\pi(q+1)|$. Предположим, что $q > 5$. Таблица характеров группы $SL_2(q)$ (см. [12, теорема 38.1]) показывает, что некоторый элемент порядка 3 из G действует несвободно на P_1 а, если p_2 не делит $|F|$, то и на P_2. Поэтому p_2 делит $|F|$.

Предположим, что $p_2 \neq 3$. Тогда все элементы порядка 3 из G действуют свободно на P_2, так как в противном случае $\{p_1, p_2, 3\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$. Ввиду п. (б) леммы 2.1 либо $q \in \{7, 17, 25, 49\}$, либо $q \geq 11$ — простое число и $|\pi(q-1)| = |\pi(q+1)| = 2$. Если $q = 17$, то $p_2 = 17$ и, следовательно, выполняется утверждение (а2). Пусть $p_2 \neq 17$. Тогда существует $r \in \pi(q-1) \setminus \{2\}$. Поэтому группа G содержит подгруппу Фробениуса вида $q : r$ и, следовательно, ввиду предложения 2 вершины p_1 и r смежны в графе $\Gamma(G)$. Число p_2 делит qr, так как в противном случае ввиду предложения 2 $\{p_1, p_2, r\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$. Если $p_2 = r$, то 3 делит $q+1$ и ввиду [2, теорема 1] элементы порядка 3 из G действуют несвободно на P_2; противоречие. Поэтому p_2 делит q и выполняется утверждение (а2).

Пусть $p_2 = 3$. Если 3 делит q, то выполняется утверждение (а3).

Если $q \in \{5, 7, 17\}$, то выполняется утверждение (а4).

Пусть $q \geq 11$ — простое число и $|\pi(q-1)| = |\pi(q+1)| = 2$. Тогда существует $r \in \pi(q-1) \setminus \{2\}$. Группа G содержит подгруппу Фробениуса вида $q : r$ и, следовательно, ввиду предложения 2 вершины p_1 и r смежны в графе $\Gamma(G)$. Поэтому $r = 3$, так как в противном случае ввиду предложения 2 $\{p_1, p_2, r\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$. Таким образом, выполняется утверждение (а4).

Пусть произведение p_1p_2 четно. Тогда $p_3 > 2$ и можно считать, что $p_1 > 2$ и $p_2 = 2$. Вершины p_1 и p_3 не смежны в графе $\Gamma(G)$, так как в противном случае $\{p_1, p_3, 2\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$. Поэтому число p_1 не делит $|F|$.

Пусть S — 2-фробениусова группа. Тогда множество $\pi(S/F_2(S))$ равно $\{2\}$ или $\{p_1\}$. В первом случае $S/F_2(S)$ — неединичная циклическая 2-группа, поэтому ввиду п. (а) леммы 2.1 $\{2, p_3, p\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$ для $p \in \pi(F) \setminus \{2, p_3\}$, что невозможно. Таким образом, выполняется второй случай. Тогда $O_2(S) \neq 1$ и $S/F_2(S)$ — нетривиальная циклическая p_1-группа, так как группа $S/F_2(S)$ изоморфна дополнению группы Фробениуса $S/F(S)$. Ввиду п. (а) леммы 2.1 вершина p_1 смежна в графе $\Gamma(G)$ с любой вершиной из $\pi(F)$. Поэтому число p_3 не делит $|F|$. Кроме того, $p_3 > 3$, так как в противном случае группа $F_2(S)/F(S)$, будучи циклической 3-группой, не имеет нетривиальных автоморфизмов нечетного порядка. Поэтому ввиду п. (а) леммы 2.3 числа p_1 и p_3 не делят $|\overline{G}|$ и группа $\overline{G}$ изоморфна $L_2(q)$ для $q \in \{5, 7, 8, 9, 17\}$, M_{10}, $L_3(4)$, $Sz(8)$ или $Sz(32)$. Положим $\widetilde{G} = G/F(S)$. Тогда $\widetilde{G} \cong F \times S/F(S)$. Пусть L — полный прообраз в G компоненты группы $\widetilde{G}$. Тогда $L/O_{p_1}(S)$ является $EPPO$-группой, и поэтому ввиду п. (в) предложения 1 выполняется утверждение (б).

Пусть теперь S — группа Фробениуса. Тогда $\pi(F(S)) = \{2, p_1\}$ и $S/F(S)$ — (неединичная) циклическая p_3-группа. Применяя лемму 2.3 к группе $G/O_2(G)$, получим, что числа p_1 и p_3 не делят $|\overline{G}|$ и группа $\overline{G}$ изоморфна $L_2(q)$ для $q \in \{5, 7, 8, 9, 17\}$, M_{10}, $L_3(4)$, $Sz(8)$ или $Sz(32)$. Положим $\widetilde{G} = G/O_{p_1}(G)$. Тогда $\widetilde{G} \cong (S/F(S)) \rightthreetimes \overline{G}$. Пусть L — полный прообраз в G изоморфной F подгруппы из $\widetilde{G}$. Тогда L является $EPPO$-группой, и поэтому ввиду п. (в) предложения 1 выполняется утверждение (б). □

Лемма 2.6. *Пусть $\pi(S) \geq 3$ и граф $\Gamma(S)$ связен. Тогда $\pi(S) = \{p_1, p_2, p_3\}$, где вершины p_1 и p_3 не смежны, p_1 не делит $|F|$, и верно одно из следующих утверждений:*

(а) *p_1 не делит $|\overline{G}|$, $p_2 > 2$, $p_3 = 2$, силовская 2-подгруппа из G изоморфна (обобщенной) группе кватернионов, $S = Z^*(G)$, $F(O(S)/O_{p_2}(S))$ — абелева p_1-холлова подгруппа в $O(S)/O_{p_2}(S)$, инволюция из S инвертирует группу $F(O(S)/O_{p_2}(S))$ и централизует группу $O(S)/O_{p_1',p_1}(O(S))$ и верно одно из следующих утверждений:*

(а1) *$p_2 > 3$ и $G/O(G) \cong SL_2(5)$ или $SL_2(5){\cdot}2$;*

(а2) *$p_2 = 3$, $G/O(G) \cong 2{\cdot}A_7$, $SL_2(27){\cdot}2$, $SL_2(27){\cdot}6$, $SL_2(q)$ или $SL_2(q){\cdot}2$, где либо $q \in \{9, 81\}$, либо $q = 3^m$, m и $(q-1)/2$ — простые нечетные числа и $|\pi((q+1)/4)| = 1$;*

(а3) *$p_2 = 3$, $G/O(G) \cong SL_2(r)$ или $SL_2(r){\cdot}2$, где r — простое число и либо $r \in \{5, 7, 17\}$, либо $r \geq 13$, $\pi(r-1) = \{2, 3\}$ и $|\pi(r+1)| = 2$;*

(б) *$p_2 = 2$, силовская p_3-подгруппа из G циклическая, группа S является p_3'-замкнутой и верно одно из следующих утверждений:*

(б1) *p_1p_3 не делит $|\overline{G}|$ и группа $\overline{G}$ изоморфна $L_2(4)$, $L_2(8)$, $Sz(8)$ или $Sz(32)$;*

(б2) *$p_1 = 3$, p_3 не делит $|\overline{G}|$, $G/O_{p_3'}(S) = (Z \times E) \rightthreetimes \langle x \rangle$, где Z — циклическая p_3-группа, $E \cong Sz(8)$, $|x| = 3$, $E\langle x \rangle \cong \mathrm{Aut}(Sz(8))$, $C_Z(x) = 1$;*

(б3) *$p_3 = 3$, $G/O_{p_3'}(S) = (Z \times E)\langle x \rangle$, где $Z = \langle x^3 \rangle$ — нетривиальная циклическая 3-группа, $E \cong Sz(8)$, $E\langle x \rangle/Z \cong \mathrm{Aut}(Sz(8))$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду [1, теорема 1] граф $\Gamma(S)$ является 3-цепью, 4-цепью, 4-циклом или 5-циклом.

Предположим, что граф $\Gamma(S)$ является 4-циклом с множеством вершин $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$. Без ограничения общности можно считать, что $O_{p_1}(G) \neq 1$. Рассуждая, как в доказательстве леммы 2.5 из [1], получим, что силовские p_3- и p_4-подгруппы в S можно считать циклическими или (обобщенными) кватернионными. Поэтому ввиду п. (а) леммы 2.1 $\{p_3, p_4, p\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$ для $p \in \pi(F) \setminus \{p_3, p_4\}$, что невозможно.

Предположим, что граф $\Gamma(S)$ является 5-циклом с множеством вершин $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$. Можно считать, что $O_{p_1}(G) \neq 1$, а p_3 и p_4 — смежные вершины, которые не смежны с вершиной p_1. Пусть K — $\{p_3, p_4\}$-холлова подгруппа в S. Тогда $O_{p_1}(G)K$ — группа Фробениуса с ядром $O_{p_1}(G)$ и дополнением K и, следовательно, силовские p_3- и p_4-подгруппы в S циклические или (обобщенные) кватернионные. Как и в предыдущем абзаце, это приводит к противоречию.

Предположим, что граф $\Gamma(S)$ является 4-цепью вида $\overset{p_1}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{p_2}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{p_3}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{p_4}{\circ}$.

Пусть $\psi = \{p_1, p_4\}$. Предположим, что $O_\psi(G) \neq 1$. Тогда можно считать, что $O_{p_1}(G) \neq 1$. Это, как и в предыдущем абзаце, приводит к противоречию. Итак, $O_\psi(G) = 1$. Рассуждая как при доказательстве [21, предложение 3], получим, что силовские p_1- и p_4-подгруппы в S циклические или (обобщенные) кватернионные. Поэтому ввиду п. (а) леммы 2.1 вершина p_i смежна с каждой вершиной из $\pi(\overline{G}) \setminus \{p_i\}$ для $i = 1, 2$. Если p_1p_4 четно, то $\{p_1, p_4, p\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$ для $p \in \pi(F) \setminus \{p_1, p_4\}$, что невозможно. Поэтому p_1p_4 нечетно. Можно считать, что p_2 нечетно. Тогда вершины p_2 и 2 не смежны в графе $\Gamma(G)$ и, следовательно, p_3 нечетно. Поэтому $S = O(G)$. Но ввиду п. (б) леммы 2.1 имеем $O(G) < Z^*(G)$; противоречие.

Итак, граф $\Gamma(S)$ является 3-цепью вида $\overset{p_1}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{p_2}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{p_3}{\circ}$.

Можно считать, что $p_1 \neq 2$. Пусть $P_i \in Syl_{p_i}(S)$ для $i = 1, 2, 3$.

Предположим, что $p_2 \neq 2$. Пусть $T \in Syl_2(G)$. Можно считать, что P_1T и P_2T — холловы подгруппы в разрешимой группе ST. Поскольку p_1 и p_2 смежны в графе $\Gamma(S)$, то вершина 2 не смежна в графе $\Gamma(G)$ с p_i для некоторого $i \in \{1, 2\}$. По п. (б) леммы 2.1 подгруппа T изоморфна (обобщенной) группе кватернионов, P_i абелева, $O(G) = P_1P_2$, $|P_3| = 2$, $S = Z^*(G) = O(G)P_3$ и цоколь группы $G/O(G)$ изоморфен $2{\cdot}A_7$ или $SL_2(q)$, где либо $q \in \{5, 7, 9, 17, 25, 49, 81\}$, либо $q = 3^m$, m и $(q-1)/2$ — простые нечетные числа и $|\pi((q+1)/4)| = 1$, либо q — простое число, $q \geq 11$ и $|\pi(q-1)| = |\pi(q+1)| = 2$. Поскольку $C_{P_i}(P_3) = C_{P_1}(P_3) = 1$ и $C_{P_2}(P_3) \neq 1$, имеем $i = 1$. Пусть $C = C_G(P_3)$. Тогда $G = O(G)C$, откуда $O(C) = C_{O(G)}(P_3) = C_{P_2}(P_3) \neq 1$ и $C/O(C)P_3 \cong \overline{G}$. Очевидно, $O_{p_1'}(S) = O_{\{2,p_2\}}(S)$. Если 2 делит $|O_{\{2,p_2\}}(S)|$, то $G = O_{\{2,p_2\}}(S)C$ и, следовательно, C содержит некоторую силовскую p_1-подгруппу из G, что не так. Поэтому $O_{p_1'}(S) = O_{p_2}(S)$. Положим $\widetilde{G} = G/O_{p_1'}(S)$. Тогда ввиду [17, теорема 6.3.2] $F(\widetilde{G}) = \widetilde{P_1}$. Подгруппа $\widetilde{P_3}$ централизует подгруппу $\widetilde{P_2}$, так как в противном случае ввиду предложения 3 подгруппа $\widetilde{P_3}$ централизует неединичный элемент из $\widetilde{P_1}$, что не так. Если цоколь группы $G/O(G)$ изоморфен $SL_2(5)$, то выполняются утверждения (а1) или (а3). Поэтому можно предполагать, что это не так. Тогда из таблицы характеров группы $SL_2(q)$, нецикличности силовских 3-подгрупп в группах $2{\cdot}A_7$ и $SL_2(3^m)$ при $m > 1$) и [22, предложение 4.2] получаем, что элементы порядка 3 из C действуют несвободно на группах $\widetilde{P_1}$ и $O(C)$. Поэтому $p_2 = 3$ и, следовательно, ввиду леммы 2.1 выполняются утверждения (а2) или (а3).

Пусть теперь $p_2 = 2$. В S существует $\{p_1, p_3\}$-холлова подгруппа U. Можно считать, что $U = P_1P_3$. Поскольку граф $\Gamma(U)$ несвязен, ввиду п. (а) предложения 1 подгруппа U есть группа Фробениуса или 2-фробениусова группа. Поскольку $1 \neq O_{p_1}(\widetilde{S}) \leq F(\widetilde{U})$, ввиду [17, теорема 10.3.1] подгруппа P_3 циклическая, $F(U) \leq P_1$ и фактор-группа $P_1/F(U)$ циклическая. Ввиду п. (а) леммы 2.1 вершины p_3 и p смежны в графе $\Gamma(G)$ для всех $p \in \pi(F) \setminus \{p_3\}$. Поэтому p_1 не делит $|F|$. Заметим еще, что силовские p-подгруппы группы G циклические для каждого $p \in \pi(F) \cup \{p_3\}$, так как в противном случае $\{2, p_1, p\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$. Имеем $C_S(P_3) \leq O_{p_3', p_3}(S) = O_{p_3'}(S)P_3$ и $S = O_{p_3'}(S)N_S(P_3)$. Отсюда, поскольку $\mathrm{Aut}(P_3)$ — циклическая группа, $S/O_{p_3'}(S)P_3$ — циклическая $\{2, p_1\}$-группа. Если порядок последней группы четен, то по п. (а) леммы 2.1, примененному к группе $S/O_{p_3'}(S)P_3$, вершина 2 смежна с любой вершиной из $\pi(F) \setminus \{2\}$ и, следовательно, граф $\Gamma(G)$ содержит треугольник $\{2, p_3, p\}$ для $p \in \pi(F) \setminus \{2, p_3\}$; противоречие. Поэтому $O^{2'}(S) \leq O_{p_3'}(S)$ и $S = UO^{2'}(S)$. Имеем

$O^{2',2}(S) < O^{2'}(S)$. Пусть K — полный прообраз в $O^{2'}(S)$ подгруппы $\Phi(O^{2'}(S))/O^{2',2}(S))$. Положим $\widetilde{G} = G/KO_2(S)$. Тогда $O_2(\widetilde{G})$ — неединичная элементарная абелева 2-группа Пусть E — последний член ряда коммутантов группы $\widetilde{G}$. Тогда $[E, \widetilde{P_3}] \leq O_2(\widetilde{G})$. Кроме того, $O_2(\widetilde{G}) \leq E$, так как в противном случае граф $\Gamma(G)$ содержит треугольник $\{2, p_3, p\}$ для $p \in \pi(F) \setminus \{2, p_3\}$.

Предположим, что $S/O^{2'}(S)$ — непримарная группа. Тогда $S/O^{2'}(S)$ — $\{p_1, p_3\}$-группа с несвязным графом простых чисел. Применяя лемму 2.3 к группе $G/O_{p_3'}(S)$, получим, что либо $p_1 = 3$ и $\overline{G} \cong \mathrm{Aut}(Sz(8))$, либо p_1p_3 не делит $|\overline{G}|$ и группа $\overline{G}$ изоморфна $L_2(q)$ для $q \in \{5, 7, 8, 17\}$, $Sz(8)$ или $Sz(32)$. В первом случае p_3 не делит $|\overline{G}|$, иначе p_3 делит $|F|$ и, значит, силовские p_3-подгруппы группы G нециклические, так что выполняется утверждение (б2). Во втором случае группа E является $EPPO$-группой, так что ввиду п. (в) предложения 1 выполняется утверждение (б1).

Предположим теперь, что $S/O^{2'}(S)$ — примарная группа. Тогда $S = O^{2'}(S) \leftthreetimes P_3$. Если p_3 не делит $|\overline{G}|$, то, как и в предыдущем абзаце, показывается, что выполняются утверждения (б1) или (б2).

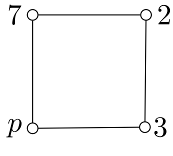
Пусть p_3 делит $|\overline{G}|$. Если p_3 не делит $|F|$, то ввиду лемм 2.4 и 2.5 выполняется утверждение (б3). Пусть p_3 делит $|F|$. Если $|P_3| > 3$ или $E/O_2(E)$ — простая группа, то силовские p_3-подгруппы группы G нециклические, что не так. Поэтому $|P_3| = 3$ и $E/O_2(E)$ — квазипростая группа с центром порядка 3. Но ввиду [1, теорема 2; 9; 10, Tabl. 8.3, 8.5] силовские 3-подгруппы группы $E/O_2(E)$ нециклические; противоречие. $\square$

Теорема теперь следует из лемм 2.2–2.6. $\square$

З а м е ч а н и е. Можно доказать, что все случаи из заключений лемм 2.2–2.6 реализуются.

3. Пример конечной разрешимой группы фиттинговой длины 5, граф простых чисел которой является 4-циклом

Вычисления в компьютерной системе GAP (см. [15]) показывают, что существует единственная (с точностью до изоморфизма) группа G_1, которая является нерасщепляемым расширением группы порядка 3 посредством группы $2{\cdot}S_4^-$. Группа G_1 может быть построена как группа подстановок степени 34. Тогда $Z(G_1) = \langle z \rangle$, где z — единственная инволюция в G_1, и $O_3(G_1) = \langle x \rangle \cong \mathbb{Z}_3$. Возьмем элемент y порядка 4 из $O_2(G_1) \cong Q_8$. Пусть $G_2 = \mathbb{Z}_7 \wr G_1$ — регулярное сплетение группы порядка 7 с группой G_1. Тогда $G_2 = V \leftthreetimes G_1$, где V — база этого сплетения, изоморфная элементарной абелевой 7-группе порядка 7^{144}. Положим $G_3 = C_V(z)$ и $G_4 = G_3 \leftthreetimes G_1$. В группе G_3 рассмотрим нормальную в G_4 подгруппу $G_5 = [G_3, O_3(G_1)$. Положим $G_6 = G_5 \leftthreetimes G_1$. Поскольку $|C_V(z)| = |V|/2$, $|C_V(x)| = |V|/3$ и $|C_V(y)| = |V|/4$, имеем $G_5 \neq 1$ и $C_{G_5}(x)) = 1$. Возьмем теперь произвольное простое число p, большее 7, и рассмотрим регулярное сплетение $G_7 = \mathbb{Z}_p \wr G_6$. Пусть E — база этого сплетения. В группе E рассмотрим нормальную в G_7 подгруппу $G_8 = [E, \langle z \rangle]$. Положим $G = G_8 \leftthreetimes G_6$. Из построения видно, что $l_F(G) = 5$ и граф $\Gamma(G)$ есть 4-цикл



.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алексеева О.А., Кондратьев А.С.** Конечные группы, графы простых чисел которых не содержат треугольников. I // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 3. С. 3–12.
2. **Кондратьев А.С., Осиновская А.А., Супруненко И.Д.** О поведении элементов простого порядка из цикла Зингера в представлениях специальной линейной группы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 179–186.

3. **Кондратьев А.С., Храмцов И.В.** О конечных трипримарных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 150–158.
4. **Кондратьев А.С., Храмцов И.В.** О конечных четырепримарных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 142–159.
5. **Мазуров В.Д.** Характеризации конечных групп множествами порядков их элементов // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 1. С. 37–53.
6. **Подуфалов Н.Д.** Конечные простые группы без элементов порядка 6 // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, № 2. С. 200–203.
7. **Aschbacher M.** Finite group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986. 274 p.
8. An atlas of Brauer characters / C. Jansen [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1995. 327 p.
9. Atlas of finite groups / J. H. Conway [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
10. **Bray J.N., Holt D.F., Roney-Dougal C.M.** The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Cambridge University Press, 2013. 438 p. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; vol. 407).
11. **Brandl R.** Finite groups all of whose elements are of prime power order // Boll. Un. Mat. Ital. A (5). 1981. Vol. 18, no. 3. P. 491–493.
12. **Dornhoff L.** Group representation theory. Part A. N. Y.: Dekker, 1971. 254 p.
13. **Fleischmann P., Lempken W., Tiep P.H.** Finite p'-semiregular groups // J. Algebra. 1997. Vol. 188, no. 2. P. 547–579.
14. **Fletcher L.R., Stellmacher B., Stewart W.B.** Endl1iche Gruppen, die kein Element der Ordnung 6 enthalten // Quart. J. Math. Oxford. Ser. (2). 1977. Vol. 28, no. 110. P. 143–154.
15. GAP — Groups, Algorithms, and Programming. Ver. 4.4.12: [e-resource]. 2008. URL: http://www.gap-system.org .
16. **Gordon L.M.** Finite simple groups with no elements of order six // Bull. Austral. Math. Soc. 1977. Vol. 17, no. 2. P. 235–246.
17. **Gorenstein D.** Finite groups. N. Y.: Harper and Row, 1968. 528 p.
18. **Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups. Number 3. Part I. Providence: Amer. Math. Soc., 1998. 420 p. (Math. Surveys Monogr; vol. 40, no. 3).
19. **Higman G.** Finite groups in which every element has prime power order // J. London Math. Soc. (2). 1957. Vol. 32. P. 335–342.
20. **Higman G.** Odd characterizations of finite simple groups: lecture notes. Michigan: University Michigan, 1968. 77 p.
21. **Lucido M.C.** Groups in which the prime graph is a tree // Boll. Unione Mat. Ital. (8). 2002. Vol. 5-B, no. 1. P. 131–148.
22. **Stewart W.B.** Groups having strongly self-centralizing 3-centralizers // Proc. London Math. Soc. 1973. Vol. 426, no. 4. P. 653–680.
23. **Suzuki M.** On a class of doubly transitive groups // Ann. Math. 1962. Vol. 75, no. 1. P. 105–145.

Алексеева Оксана Алексеевна
канд. физ.-мат. наук
зам. зав. кафедрой
Московский университет им. С. Ю. Витте
e-mail: Palazzoksana@gmail.com

Поступила 15.09.15

Кондратьев Анатолий Семенович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
профессор
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: A.S.Kondratiev@imm.uran.ru