ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 1 2016

УДК 519.624.8

О МЕТОДЕ ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С ТРЕЩИНОЙ

Э. М. Вихтенко, Р. В. Намм

Рассматривается двойственный метод решения модельной задачи с трещиной, основанный на модифицированном функционале Лагранжа. Сходимость метода исследуется в предположении H^1-регулярности решения исходной задачи. Доказывается соотношение двойственности для исходной и двойственной задач.

Ключевые слова: задача с трещиной, метод двойственности, модифицированный функционал Лагранжа, функционал чувствительности.

E. M. Vikhtenko, R. V. Namm. On the dual method for a model problem with a crack.

The dual method based on a modified Lagrangian functional is applied to a model problem with a crack. The convergence of the method is investigated under the assumption that the solution of the primal problem is H^1-regular. The duality relation is established for the primal and dual problems.

Keywords: model problem with a crack, dual method, modified Lagrangian functional, sensitivity functional.

Классические постановки задачи упругости с трещиной внутри области предполагают, как правило, что напряжение на берегах трещины равно нулю [1]. Но равенство нулю напряжения на берегах трещины не исключает возможности проникновения берегов трещины друг в друга, что является неестественным с точки зрения механики процесса. В последнее время в работах по теории трещин рассматриваются модели с нелинейными краевыми условиями на берегах трещины [2]. Указанные краевые условия записываются в виде неравенств и обеспечивают взаимное непроникновение берегов трещины. С точки зрения механики такие модели более предпочтительны в сравнении с их классическими аналогами. Эти модели допускают вариационную постановку в виде минимизации квадратичного функционала на замкнутом выпуклом подмножестве исходного гильбертова пространства.

Для анализа проблем механики сплошной среды большую популярность получили вариационные постановки исследуемых задач [3; 4]. В последнее время особенно актуальной становится разработка специальных методов для численного исследования вариационных неравенств. В указанных выше работах, а также в [5; 6] отражен опыт численного решения нелинейных вариационных задач механики, в том числе задач с трещинами.

В предлагаемой работе для решения модельной задачи с трещиной с условиями непроникновения берегов трещины друг в друга исследуется схема двойственности, построенная на основе модифицированного функционала Лагранжа. Теория модифицированных функций Лагранжа для конечномерных задач выпуклой оптимизации рассматривалась рядом авторов (см., например, [7; 8]). В работах [9; 10] эти исследования были распространены на бесконечномерные вариационные неравенства механики сплошной среды. В этих исследованиях, как правило, предполагалась достаточная регулярность решения исходной задачи, которая обеспечивает существование решения двойственной задачи. Однако для задачи теории упругости с трещиной регулярность решения в окрестности краев трещины может быть сколь угодно плохой и двойственная задача может быть неразрешимой. Несмотря на указанную проблему, удается построить и обосновать схему двойственности для решения поставленной задачи, а также доказать соотношение (равенство) двойственности для исходной и двойственной задач.

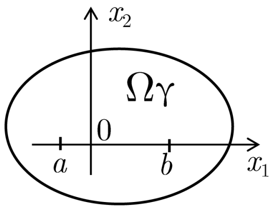
1. Постановка модельной задачи

Рассмотрим вариационную задачу для области с трещиной, соответствующую скалярному уравнению Пуассона в области с разрезом, на берегах которого заданы нелинейные краевые условия типа неравенств. Эта задача содержит основные особенности задачи о равновесии упругого тела с трещиной при краевых условиях, описывающих непроникание берегов.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с липшицевой границей Γ [11, с. 10] и $\gamma \subset \Omega$ — разрез (трещина) внутри Ω. Ниже считаем, что

$$\gamma = \{(x_1, x_2) \in \Omega \colon a < x_1 < b,\ x_2 = 0\},$$

предполагая, что концевые точки $(a, 0)$ и $(b, 0)$ — вершины трещины — не выходят на внешнюю границу Γ. Обозначим $\Omega_\gamma = \Omega \backslash \bar{\gamma}$, $\bar{\gamma} = \{(x_1, x_2) \in \Omega \colon a \le x_1 \le b,\ x_2 = 0\}$. Выберем вектор единичной нормали n на γ. В этом случае можем говорить о положительном (верхнем) и отрицательном (нижнем) берегах трещины γ (см. рисунок).



Область с прямолинейным разрезом.

Введем множество допустимых перемещений

$$\mathrm{K} = \{v \in H^1(\Omega_\gamma) \colon [v] \ge 0 \text{ на } \gamma;\ v = 0 \text{ на } \Gamma\},$$

где $[v] = v^+ - v^-$ — скачок функции v на γ (v^+ — значение функции v на верхнем берегу трещины, v^- — значение функции v на нижнем берегу, знаки $\pm$ соответствуют положительному и отрицательному направлениям вектора нормали n к разрезу γ). Значения функции v на трещине γ понимаются в смысле значений следов функции v на γ (см., например, [2, с. 12]), $v^\pm \in H^{1/2}(\gamma)$. Норма в пространстве $H^{1/2}(\gamma)$ определяется как

$$\|v\|^2_{H^{1/2}(\gamma)} = \|v\|^2_{L_2(\gamma)} + \int\limits_\gamma \int\limits_\gamma \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^2} dx\, dy.$$

Через $H^1(\Omega_\gamma)$ обозначено пространство Соболева $W_2^1(\Omega_\gamma)$, т. е. множество функций v, суммируемых с квадратом по Лебегу на Ω_γ и имеющих обобщенные производные первого порядка, также суммируемые с квадратом по Лебегу на Ω_γ, $L_2(\gamma)$ — множество функций, суммируемых с квадратом по Лебегу на γ.

В дальнейшем нам понадобится пространство $H_{00}^{1/2}(\gamma)$ [2, с. 53; 12, с. 84]:

$$H_{00}^{1/2}(\gamma) = \left\{ v \in H^{1/2}(\gamma) \colon \frac{v}{\sqrt{\rho}} \in L_2(\gamma) \right\}$$

с нормой

$$\|v\|^2_{H_{00}^{1/2}(\gamma)} = \|v\|^2_{H^{1/2}(\gamma)} + \left\| \frac{v}{\sqrt{\rho}} \right\|^2_{L_2(\gamma)},$$

где $\rho(x) = dist(x, \partial\gamma)$.

Рассмотрим задачу минимизации

$$\left\{ \begin{array}{l} J(v) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int\limits_{\Omega_\gamma} |\nabla v|^2 \, d\Omega - \int\limits_{\Omega_\gamma} f\, v \, d\Omega - \min, \\ v \in \mathrm{K}. \end{array} \right. \tag{1.1}$$

Здесь $f \in L_2(\Omega_\gamma)$ — заданная функция, где $L_2(\Omega_\gamma)$ — пространство функций, суммируемых с квадратом по Лебегу на Ω_γ.

Задача (1.1) имеет единственное решение u, которое является также единственным решением вариационного неравенства

$$u \in \mathrm{K}, \quad \int\limits_{\Omega_\gamma} \nabla u \cdot \nabla(v-u)\, d\Omega \geq \int\limits_{\Omega_\gamma} f\,(v-u)\, d\Omega \quad \forall v \in \mathrm{K}.$$

Можно показать, что функция u является решением (в обобщенном смысле) следующей краевой задачи [2, с. 46]:

$$-\Delta u = f \ \text{ в } \ \Omega_\gamma,$$

$$u = 0 \ \text{ на } \ \Gamma,$$

$$[u] \geq 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \leq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}[u] = 0 \ \text{ на } \ \gamma.$$

При выбранной конфигурации границы γ производная по нормали $\partial u/\partial n$ совпадает с производной $\partial u/\partial x_2$.

В [2] рассмотрены вопросы регулярности решения задачи (1.1), исследовано поведение решения и его производных в окрестностях вершин трещины.

2. Двойственный метод для решения модельной задачи

Для произвольного $m \in L_2(\gamma)$ построим множество

$$K_m = \{v \in H^1(\Omega_\gamma),\ v = 0 \text{ на } \Gamma, -[v] \leq m \text{ п.в. на } \ \gamma\}.$$

Нетрудно показать, что K_m — выпуклое замкнутое по норме $H^1(\Omega_\gamma)$ множество.

На пространстве $L_2(\gamma)$ определим функционал чувствительности

$$\chi(m) = \begin{cases} \inf\limits_{v \in K_m} J(v), & \text{если } K_m \neq \varnothing, \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Отметим, что задача $\inf\limits_{v \in K_m} J(v)$ при условии $K_m \neq \varnothing$ разрешима в силу коэрцитивности функционала $J(v)$ на $H^1(\Omega_\gamma)$. Легко видеть, что если функция m ограничена снизу, то множество K_m не является пустым. Но если функция $m \in L_2(\gamma) \backslash H^{1/2}(\gamma)$ и не ограничена снизу на γ, то множество K_m может быть пустым [2; 13].

Функционал $\chi(m)$ является собственным выпуклым функционалом на $L_2(\gamma)$, но его эффективная область $dom\chi = \{m \in L_2(\gamma)\colon \chi(m) < +\infty\}$ не совпадает с $L_2(\gamma)$. Заметим, что $dom\chi$ является выпуклым, но не замкнутым множеством в $L_2(\gamma)$, причем в нашем случае $\overline{dom\chi} = L_2(\gamma)$.

На пространстве $H^1(\Omega_\gamma) \times L_2(\gamma) \times L_2(\gamma)$ определим функционал

$$\mathcal{K}(v,l,m) = \begin{cases} J(v) + \dfrac{1}{2r} \displaystyle\int\limits_\gamma \Big((l+rm)^2 - l^2 \Big)\, d\Gamma, & \text{если } -[v] \leq m \text{ п.в. на } \gamma, \\ +\infty \ \text{— в противном случае} \end{cases}$$

и модифицированный функционал Лагранжа $M(v,l)$ на пространстве $H^1(\Omega_\gamma) \times L_2(\gamma)$:

$$M(v,l) = \inf_{m \in L_2(\gamma)} \mathcal{K}(v,l,m) = J(v) + \frac{1}{2r} \int\limits_\gamma \Big(\big((l - r[v])^+\big)^2 - l^2 \Big)\, d\Gamma,$$

где $r>0$ — const, $(l-r[v])^+=\max\{l-r[v],0\}$.

Введем модифицированный двойственный функционал

$$\underline{\mathrm{M}}(l)=\inf_{v\in H^1(\Omega_\gamma)} M(v,l)=\inf_{v\in H^1(\Omega_\gamma)}\Big\{J(v)+\frac{1}{2r}\int\limits_\gamma\Big(\big((l-r[v])^+\big)^2-l^2\Big)\,d\Gamma\Big\}.$$

Так как $\inf\limits_{v\in H^1(\Omega_\gamma)}\inf\limits_{m\in L_2(\gamma)}\mathcal{K}(v,l,m)=\inf\limits_{m\in L_2(\gamma)}\inf\limits_{v\in H^1(\Omega_\gamma)}\mathcal{K}(v,l,m)$, то для $\underline{\mathrm{M}}(l)$ имеет место и другое представление [14; 16]:

$$\underline{\mathrm{M}}(l)=\inf_{m\in L_2(\gamma)}\Big\{\chi(m)+\int\limits_\gamma l\,m\,d\Gamma+\frac{r}{2}\int\limits_\gamma m^2\,d\Gamma\Big\}.$$

Легко видеть, что для любых $l\in L_2(\gamma)$ справедлива оценка

$$\underline{\mathrm{M}}(l)\le\chi(0)=\inf_{v\in\mathrm{K}}J(v). \tag{2.1}$$

Для двойственного функционала $\underline{\mathrm{M}}(l)$ рассмотрим двойственную задачу

$$\begin{cases}\underline{\mathrm{M}}(l)-\sup,\\ l\in L_2(\gamma).\end{cases} \tag{2.2}$$

В работах [14–16] модифицированные функционалы Лагранжа и связанные с ними методы двойственности исследовались в предположении разрешимости задачи (2.2). Отметим, что разрешимость двойственной задачи имеет место в случае, если решение исходной задачи принадлежит пространству $H^2(\Omega_\gamma)$. Однако для задачи (1.1) с внутренней трещиной предположение о большей регулярности решения, чем $u\in H^1(\Omega_\gamma)$, является неестественным. Ниже исследуется двойственный метод решения задачи (1.1), в котором разрешимость задачи (2.2) заранее не предполагается.

Исследуем функционал чувствительности $\chi(m)$ и связанный с ним двойственный функционал $\underline{\mathrm{M}}(l)$.

Лемма 1. *Пусть $\bar m\in L_2(\gamma)$ не принадлежит $dom\chi$. Тогда для любой последовательности $\{m_i\}\subset dom\chi$ такой, что $\lim\limits_{i\to\infty}\|m_i-\bar m\|_{L_2(\gamma)}=0$, справедливо предельное равенство $\lim\limits_{i\to\infty}\chi(m_i)=+\infty$.*

Доказательство. Для функции $\bar m\notin dom\chi$ рассмотрим произвольную последовательность $\{m_i\}\subset dom\chi$ такую, что $\lim\limits_{i\to\infty}\|m_i-\bar m\|_{L_2(\gamma)}=0$. Так как $K_{m_i}\ne\varnothing$ и функционал $J(v)$ коэрцитивен на $H^1(\Omega_\gamma)$, то существует единственный элемент $v_i=\arg\min\limits_{v\in K_{m_i}}J(v)$ (i=1,2,…) [4; 17]. Покажем, что $\lim\limits_{i\to\infty}\|v_i\|_{H^1(\Omega_\gamma)}=+\infty$. Допустим противное, т. е. пусть у последовательности $\{v_i\}$ существует ограниченная подпоследовательность $\{v_{i^j}\}$, $\|v_{i^j}\|_{H^1(\Omega_\gamma)}\le C$ для всех i^j, где $C>0$ — const. Из теоремы о следах функций вытекает, что $\|[v_{i^j}]\|_{H^{1/2}_{00}(\gamma)}\le C_1$, где $C_1>0$ — const [2, с. 12]. Тогда $\{[v_{i^j}]\}$ является компактной последовательностью в $L_2(\gamma)$. Пусть $t\in H^{1/2}_{00}(\gamma)$ есть слабая предельная точка этой последовательности. Без ограничения общности рассуждений можно считать, что t есть слабый предел $\{[v_{i^j}]\}$. Тогда $\{[v_{i^j}]\}$ сходится к t по норме в $L_2(\gamma)$. Так как $-[v_{i^j}]\le m_i$, то $-t\le\bar m$ на γ. Тем самым, $K_{\bar m}\ne\varnothing$ или $\bar m\in dom\chi$. Полученное противоречие показывает, что $\lim\limits_{i\to\infty}\|v_i\|_{H^1(\Omega_\gamma)}=+\infty$. Так как функционал $J(v)$ коэрцитивен, то $\lim\limits_{i\to\infty}\chi(m_i)=\lim\limits_{i\to\infty}J(v_i)=+\infty$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $\bar m\in L_2(\gamma)$ принадлежит $dom\chi$. Тогда для любой последовательности $\{m_i\}\subset dom\chi$, сходящейся к $\bar m$ в $L_2(\gamma)$, справедливо неравенство $\varliminf\limits_{i\to\infty}\chi(m_i)\ge\chi(\bar m)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть теперь $\{m_i\} \in dom\chi$ и $\lim\limits_{i\to\infty} \|m_i - \bar{m}\|_{L_2(\gamma)} = 0$. Из последовательности $\{m_i\}$ выделим подпоследовательность $\{m_{i^k}\}$, для которой

$$\lim_{k\to\infty} \chi(m_{i^k}) = \varliminf_{i\to\infty} \chi(m_i).$$

Рассмотрим подпоследовательность $\{v_{i^k}\}$, где $v_{i^k} = \arg \min\limits_{v\in K_{m_{i^k}}} J(v)$. Последовательность $\{v_{i^k}\}$ является ограниченной последовательностью в $H^1(\Omega_\gamma)$ (иначе $\lim\limits_{k\to\infty} \chi(m_{i^k}) = +\infty$ и требуемое неравенство доказано). Из теоремы о следах функций следует, что последовательность $\{[v_{i^k}]\}$ ограничена в $H^{1/2}_{00}(\gamma)$. Поэтому $\{[v_{i^k}]\}$ слабо компактна в $H^{1/2}_{00}(\gamma)$. Пусть $t \in H^{1/2}_{00}(\gamma)$ есть слабая предельная точка этой последовательности. Без ограничения общности рассуждений можно считать, что $\{[v_{i^k}]\}$ является слабо сходящейся последовательностью, т. е. t есть слабый предел $\{[v_{i^k}]\}$ в $H^{1/2}_{00}(\gamma)$.

Так как пространство $H^{1/2}_{00}(\gamma)$ компактно вкладывается в $L_2(\gamma)$, а $L_2(\gamma)$ вкладывается в $H^{-1/2}_{00}(\gamma)$, то $\{[v_{i^k}]\}$ сходится к t по норме в $L_2(\gamma)$. Здесь $H^{-1/2}_{00}(\gamma)$ — пространство, сопряженное к $H^{1/2}_{00}(\gamma)$. Из сходимостей $m_{i^k} \to \bar{m}$ в $L_2(\gamma)$, $[v_{i^k}] \to t$ в $L_2(\gamma)$ и условия $-[v_{i^k}] \le m_{i^k}$ получаем $-t \le \bar{m}$.

Обозначим $\tilde{t} = \arg\min_{[v]=t \text{ на } \gamma} J(v)$. Имеем

$$J(v_{i^k}) - J(\tilde{t})$$

$$= \int\limits_{\Omega_\gamma} \nabla\tilde{t}\cdot\nabla(v_{i^k}-\tilde{t})\, d\Omega - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(v_{i^k}-\tilde{t})\, d\Omega + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\gamma} |\nabla(v_{i^k}-\tilde{t})|^2\, d\Omega = \langle\mu, [v_{i^k}-\tilde{t}]\rangle + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\gamma} |\nabla(v_{i^k}-\tilde{t})|^2\, d\Omega,$$

где

$$\langle\mu, [v]\rangle = \int\limits_{\Omega_\gamma} \nabla\tilde{t}\cdot\nabla v\, d\Omega - \int\limits_{\Omega_\gamma} f\, v\, d\Omega$$

и при этом $\mu \in H^{-1/2}_{00}(\gamma)$ [2; 13].

Так как $\{[v_{i^k}]\}$ слабо сходится к t в $H^{1/2}_{00}(\gamma)$, то в силу единственности слабого предела имеем

$$\lim_{k\to\infty} \langle\mu, [v_{i^k} - \tilde{t}\,]\rangle = 0.$$

Поэтому справедлива оценка

$$\lim_{k\to\infty} \chi(m_{i^k}) = \lim_{k\to\infty} J(v_{i^k}) \ge J(\tilde{t}) \ge \chi(\bar{m})$$

и, следовательно,

$$\varliminf_{i\to\infty} \chi(m_i) \ge \chi(\bar{m}).$$

Лемма доказана.

Из лемм 1 и 2 следует, что функционал $\chi(m)$ является полунепрерывным снизу на $L_2(\gamma)$ функционалом. Легко показать, что $\chi(m)$ выпуклый. Отсюда вытекает слабая полунепрерывность снизу функционала чувствительности на $L_2(\gamma)$.

Для произвольного фиксированного $l \in L_2(\gamma)$ рассмотрим функционал

$$F_l(m) = \chi(m) + \int\limits_{\gamma} l\, m\, d\Gamma + \frac{r}{2}\int\limits_{\gamma} m^2\, d\Gamma, \quad r > 0 \ \text{— const.}$$

Из лемм 1 и 2 вытекает, что $F_l(m)$ — слабо полунепрерывный снизу функционал на $L_2(\gamma)$.

Так как $\chi(m)$ полунепрерывен снизу в $L_2(\gamma)$, то его надграфик $epi\chi$ есть выпуклое замкнутое множество в $L_2(\gamma) \times R$, $R = (-\infty, +\infty)$. По теореме отделимости Мазура [18, с. 164] существуют такие $\alpha \in L_2(\gamma)$ и $\beta \in R$, что $\chi(m)+\int\limits_\gamma \alpha\, m\, d\Gamma+\beta \geq 0\ \ \forall m \in dom\chi$. Следовательно, для функционала $F_l(m)$ справедлива оценка

$$F_l(m) \geq -\int\limits_\gamma \alpha\, m\, d\Gamma + \int\limits_\gamma l\, m\, d\Gamma + \frac{r}{2}\int\limits_\gamma m^2\, d\Gamma - \beta \quad \forall\, m \in L_2(\gamma).$$

Поэтому $F_l(m) \to +\infty$ при $\|m\|_{L_2(\gamma)} \to \infty$, т. е. $F_l(m)$ коэрцитивен в $L_2(\gamma)$.

Из слабой полунепрерывности снизу и коэрцитивности $F_l(m)$ следует существование для любого $l \in L_2(\gamma)$ элемента $m(l) \in L_2(\gamma)$ такого, что $m(l) = \arg\min\limits_{m\in L_2(\gamma)} F_l(m)$. Из сильной выпуклости $F_l(m)$ на $dom\chi$ [11, с. 20] вытекает, что для любого $l \in L_2(\gamma)$ элемент $m(l)$ единственный.

Сформулируем для двойственного функционала $\underline{\mathrm{M}}(l)$ несколько утверждений, доказательства которых повторяют доказательства теорем 2–4 в [16].

Утверждение 1. *Двойственный функционал $\underline{\mathrm{M}}(l)$ непрерывен в $L_2(\gamma)$.*

Утверждение 2. *Двойственный функционал $\underline{\mathrm{M}}(l)$ дифференцируем по Гато в $L_2(\gamma)$, и его производная $\nabla\underline{\mathrm{M}}(l)$ удовлетворят условию Липшица с постоянной $1/r$, т. е. выполняется*

$$\|\nabla\underline{\mathrm{M}}(l') - \nabla\underline{\mathrm{M}}(l'')\|_{L_2(\gamma)} \leq \frac{1}{r}\|l' - l''\|_{L_2(\gamma)} \quad \forall\, l', l'' \in L_2(\gamma).$$

В [16] показывается, что $\nabla\underline{\mathrm{M}}(l) = m(l) = \max\{-[u], -l/r\}\ \forall l \in L_2(\gamma)$.

Для решения двойственной задачи (2.2) рассмотрим градиентный метод [19]

$$l^{k+1} = l^k + \Theta_k m(l^k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.3}$$

с любым начальным значением $l^0 \in L_2(\gamma)$, $\Theta_k \in [\beta, 2r-\beta]$, $\beta \in (0, r]$.

Теорема 1. *Для последовательности $\{l^k\}$, построенной по методу (2.3), имеет место предельное равенство $\lim\limits_{k\to\infty} \|m(l^k)\|_{L_2(\gamma)} = 0$.*

Градиентный метод (2.3) порождает следующий алгоритм метода Удзавы решения задачи (1.1):

1) На начальном шаге $k = 0$ задается произвольная функция $l^0 \in L_2(\gamma)$.

2) Для $k = 0, 1, 2, \ldots$ последовательно вычисляются

$$(i) \quad u^{k+1} = \arg\min_{v\in H^1(\Omega_\gamma)} \left\{J(v) + \frac{1}{2r}\int\limits_\gamma ((l^k - r[v])^+)^2 - (l^k)^2)\, d\Gamma\right\}; \tag{2.4}$$

$$(ii) \quad l^{k+1} = l^k + \Theta_k \max\left\{-[u^{k+1}], -\frac{l^k}{r}\right\}, \quad \Theta_k \in [\beta, 2r-\beta], \quad \beta \in (0, r]. \tag{2.5}$$

Теорема 2. *Имеет место равенство двойственности*

$$\sup_{l\in L_2(\gamma)} \underline{\mathrm{M}}(l) = \inf_{v\in \mathrm{K}} J(v).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из неравенства (2.1) вытекает, что

$$\underline{\mathrm{M}}(l^k) \leq \chi(0) = \inf_{v\in \mathrm{K}} J(v), \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Так как $\chi(m)$ является полунепрерывным снизу функционалом на $L_2(\gamma)$, то из теоремы 1 следует, что $\varliminf\limits_{k\to\infty} \chi(m(l^k)) \geq \chi(0)$. Неравенство (2.1) переписывается следующим образом:

$$\chi(m(l^k)) + \int\limits_\gamma l^k\, m(l^k)\, d\Gamma + \frac{r}{2}\int\limits_\gamma m^2(l^k)\, d\Gamma \leq \chi(0), \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Отсюда получаем

$$\int\limits_\gamma l^k\, m(l^k)\, d\Gamma \leq \chi(0) - \chi(m(l^k)) - \frac{r}{2}\int\limits_\gamma m^2(l^k)\, d\Gamma, \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Поэтому справедлива оценка $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \int_\gamma l^k\, m(l^k)\, d\Gamma \leq 0$. Покажем, что $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \int_\gamma l^k\, m(l^k)\, d\Gamma = 0$. Допустим противное, т. е. $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \int_\gamma l^k\, m(l^k)\, d\Gamma = \delta < 0$. Тогда можно подобрать такое δ_1, $\delta < \delta_1 < 0$, и такой номер N, что $\int_\gamma l^k\, m(l^k)\, d\Gamma < \delta_1$ $\forall k > N$. Имеем

$$\|l^{k+1}\|^2_{L_2(\gamma)} = \|l^k + \Theta_k\, m(l^k)\|^2_{L_2(\gamma)} = \|l^k\|^2_{L_2(\gamma)} + 2\Theta_k \int\limits_\gamma l^k\, m(l^k)\, d\Gamma + \Theta_k^2 \|m(l^k)\|^2_{L_2(\gamma)}$$

$$\leq \|l^k\|^2_{L_2(\gamma)} + 2\Theta_k \delta_1 + \Theta_k^2 \|m(l^k)\|^2_{L_2(\gamma)}.$$

Так как по теореме 1 $\lim\limits_{k\to\infty} \|m(l^k)\|^2_{L_2(\gamma)} = 0$, то для достаточно больших номеров k справедлива оценка $\|l^{k+1}\|^2_{L_2(\gamma)} \leq \|l^k\|^2_{L_2(\gamma)}$. Тогда $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \int_\gamma l^k\, m(l^k)\, d\Gamma = \lim\limits_{k\to\infty} \int_\gamma l^k\, m(l^k)\, d\Gamma = 0$. Это противоречит предположению, т. е. $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \int_\gamma l^k\, m(l^k)\, d\Gamma = 0$.

Выделим из последовательности $\{l^k\}$ подпоследовательность $\{l^{k_j}\}$ такую, что

$$\varlimsup_{k\to\infty} \int\limits_\gamma l^k\, m(l^k)\, d\Gamma = \lim_{j\to\infty} \int\limits_\gamma l^{k_j}\, m(l^{k_j})\, d\Gamma.$$

Так как последовательность $\{\underline{\mathrm{M}}(l^{k_j})\}$ является монотонно возрастающей [16; 19] и ограниченной снизу величиной $\chi(0)$, то

$$\chi(0) \geq \lim_{k\to\infty} \left(\chi(m(l^k)) + \int\limits_\gamma l^k\, m(l^k)\, d\Gamma + \frac{r}{2}\int\limits_\gamma m^2(l^k)\, d\Gamma \right)$$

$$= \lim_{j\to\infty} \left(\chi(m(l^{k_j})) + \int\limits_\gamma l^{k_j}\, m(l^{k_j})\, d\Gamma + \frac{r}{2}\int\limits_\gamma m^2(l^{k_j})\, d\Gamma \right) = \lim_{j\to\infty} \chi(m(l^{k_j})) \geq \chi(0) = \inf_{v\in \mathrm{K}} J(v).$$

Таким образом, для метода (2.4), (2.5) установлена сходимость в смысле предельного равенства

$$\lim_{k\to\infty} \underline{\mathrm{M}}(l^k) = J(u) = \inf_{v\in \mathrm{K}} J(v).$$

Отсюда следует соотношение двойственности для исходной и двойственной задачи $\sup\limits_{l\in L_2(\gamma)} \underline{\mathrm{M}}(l) = \inf\limits_{v\in \mathrm{K}} J(v)$. Теорема доказана.

Отметим, что при условии разрешимости двойственной задачи (2.2) можно доказать, что последовательность $\{l^k\}$ ограничена в $L_2(\gamma)$ [14; 16]. Вместе с теоремой 1 это означает, что справедливо равенство $\lim\limits_{k\to\infty} \int_\gamma l^k\, m(l^k)\, d\Gamma = 0$. Отсюда сразу вытекает сходимость метода (2.4), (2.5) по функционалу задачи (1.1), т. е. $\lim\limits_{k\to\infty} \chi(m(l^k)) = \lim\limits_{k\to\infty} J(u^{k+1}) = J(u)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Морозов Н.Ф.** Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 255 с.
2. **Хлуднев А.М.** Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010. 252 с.
3. **Кравчук А.С.** Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. М.: МГАПИ, 1997. 333 с.
4. Решение вариационных неравенств в механике / И. Главачек, Я. Гаслингер, И. Нечас, Я. Ловишек. М.: Мир, 1986. 270 с.
5. **Wang G., Wang L.** Numerical modeling of a dual variational inequality of unilateral contact problems using the mixed finite element method // Int. J. Numer. Anal. Model. 2009. Vol. 6, no. 1. P. 161–176.
6. **Matei A.** An existence result for a mixed variational problem arising from Contact Mechanics // Nonlinear Anal. Real World Appl. 2014. No. 20. P. 74–81.
7. **Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В.** Модифицированные функции Лагранжа. Теория и методы оптимизации. М.: Наука, 1989. 400 с.
8. **Бертсекас Д.** Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. М.: Радио и связь, 1987. 399 с.
9. **Ву Г., Намм Р.В., Сачков С.А.** Итерационный метод поиска седловой точки для полукоэрцитивной задачи Синьорини, основанный на модифицированном функционале Лагранжа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2006. Т. 46, № 1. С. 26–36.
10. **Вихтенко Э.М., Намм Р.В.** Схема двойственности для решения полукоэрцитивной задачи Синьорини с трением // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. Т. 47, № 12. С. 2023–2036.
11. **Михлин С.Г.** Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977. 432 с.
12. **Kikuchi N., Oden J.T.** Contact problems in elasticity: A study of variational inequalities and finite element method. Philadelphia, 1988. 509 p. (SIAM Stud. Appl. Math., 8.)
13. **Mclean W.** Strongly elliptic systems and boundary integral equations. Cambridge: University Press, 2000. 372 p.
14. **Вихтенко Э.М., Максимова Н.Н., Намм Р.В.** Функционалы чувствительности в вариационных неравенствах механики и их приложение к схемам двойственности // Сиб. журн. вычисл. математики. 2014. Т. 17, № 1. С. 43–52.
15. **Вихтенко Э.М., Ву Г., Намм Р.В.** Функционалы чувствительности в контактных задачах теории упругости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2014. Т. 54, № 7. С. 1218–1228.
16. **Вихтенко Э.М., Ву Г., Намм Р.В.** Методы решения полукоэрцитивных вариационных неравенств механики на основе модифицированных функционалов Лагранжа // Дальневосточ. мат. журн. 2014. Т. 14. № 1. С. 6–17.
17. **Экланд И., Темам Р.** Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М. : Мир, 1979. 399 с.
18. **Куфнер А., Фучик С.** Нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1988. 304 с.
19. **Поляк Б.Т.** Введение в оптимизацию. М. : Наука, 1980. 384 с.

Вихтенко Эллина Михайловна
канд. физ.-мат. наук, доцент
доцент
Тихоокеанский государственный университет
e-mail: vikht.el@gmail.com

Поступила 30.04.2015

Намм Роберт Викторович
д-р физ.-мат. наук, профессор
главный науч. сотрудник
Вычислительный центр ДВО РАН
e-mail: rnamm@yandex.ru