ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 1 2016

УДК 517.9

КОМПАКТИФИКАТОРЫ В КОНСТРУКЦИЯХ РАСШИРЕНИЙ ЗАДАЧ О ДОСТИЖИМОСТИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА[1]

А. Г. Ченцов

Рассматривается задача о достижимости в топологическом пространстве при ограничениях асимптотического характера. Исследуются свойства весьма общей процедуры, определяющей расширение исходной задачи. Указано, в частности, правило преобразования произвольной схемы расширения (компактификатора) в аналогичную схему со свойством гомеоморфности непрерывного продолжения исходного целевого оператора задачи о достижимости. Показано, как данное правило может быть применено в случае, когда расширение реализуется в пространстве ультрафильтров широко понимаемого измеримого пространства. Данный вариант конкретизируется затем для случая целевого оператора, определенного на невырожденном отрезке вещественной прямой.

Ключевые слова: множество притяжения, топологическое пространство, ультрафильтр, фактор-пространство.

A. G. Chentsov. Compactifiers in extension constructions for reachability problems with constraints of asymptotic nature.

A reachability problem with constraints of asymptotic nature is considered in a topological space. The properties of a rather general procedure that defines an extension of the problem are studied. In particular, we specify a rule that transforms an arbitrary extension scheme (a compactifier) to a similar scheme with the property that the continuous extension of the objective operator of the reachability problem is homeomorphic. We show how to use this rule in the case when the extension is realized in the ultrafilter space of a broadly understood measurable space. This version is then made more specific for the case of an objective operator defined on a nondegenerate interval of the real line.

Keywords: attraction set, topological space, ultrafilter, factor space.

1. Введение

В статье используются следующие сокращения: БФ — база фильтра, ИП — измеримое пространство, МП — множество притяжения, ОАХ — ограничения асимптотического характера, ОД — область достижимости, ОЭ — обобщенный элемент, п/м — подмножество, ТП — топологическое пространство, у/ф — ультрафильтр, ЭП — элемент притяжения.

Статья посвящена изучению общих вопросов, связанных с реализуемостью желаемых состояний “в пределе” в смысле значений заданного целевого оператора задачи. Потребность в упомянутой предельной реализации может быть обусловлена интересами соблюдения ограничений. Последние могут иметь асимптотический характер и относиться, строго говоря, не к выбору отдельно взятого решения (управления), а к выбору некоторой зависимости со значениями в пространстве решений (например, могут налагаться условия на последовательность обычных решений). Целевой оператор реализует на ее основе соответствующую зависимость в пространстве состояний, а потому при должном топологическом оснащении можно говорить о реализации обобщенных (вообще говоря) пределов в упомянутом пространстве. Совокупность упомянутых обобщенных пределов можно рассматривать как МП в задаче о достижимости (с ОАХ). В частности, такая интерпретация уместна в теории управления, где важную роль играет понятие ОД в заданный момент времени. Однако задача о построении ОД не обладает,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 16-01-00505, 16-01-00649).

вообще говоря, устойчивостью при ослаблении стандартных ограничений (краевые и промежуточные условия, фазовые ограничения). Представляя последовательное ослабление данных ограничений в виде схемы с ОАХ, мы естественным образом приходим к МП, "заменяющему" ОД (имеются постановки, в которых ОАХ и, как следствие, МП возникают изначально), что представляет не только теоретический, но и определенный практический интерес при решении соответствующей задачи управления. Подобно тому, как в задачах оптимизации для реализации оптимума в условиях исчезающе малого ослабления ограничений применяются ОЭ (обобщенные управления в [1, гл. III, IV; 2]), в задачах о достижимости также полезны процедуры естественного расширения в подходящем классе ОЭ. Посредством упомянутых процедур можно (проще в логическом отношении) определять нужные варианты МП. Этот подход составляет содержание настоящей статьи: в интересах построения МП конструируются расширения, связываемые с погружением обычных решений в пространство ОЭ.

В топологическом отношении речь идет об использовании компактификаций, а потому применяемую для построения МП конструкцию именуем далее компактификатором. В статье изучаются общие вопросы, связанные с построением и преобразованием компактификаторов, а также дается некоторая детализация для случая, когда используются у/ф широко понимаемых ИП. В заключительной части рассматривается одна конкретная схема построения МП для одномерного варианта задачи о достижимости с ОАХ.

Отметим, что конструкции с элементами расширений широко использовались в работах Н. Н. Красовского и А. И. Субботина, а также в работах их учеников. Оригинальный подход, предложенный Н. Н. Красовским и связанный с применением аппарата обобщенных функций (см. [3]), послужил основой многих исследований в области импульсного управления. Управления-меры использовались при построении вспомогательных программных конструкций для решения дифференциальных игр (см. [4]). Фундаментальное понятие стабильности множеств, сыгравшее важную роль в установлении основополагающей теоремы об альтернативе Н. Н. Красовского и А. И. Субботина (см. [4; 5]), включает использование обобщенных реакций на обычные управления одного из игроков. В этой связи отметим глубокий результат А. В. Кряжимского [6], связанный с распространением альтернативы Н. Н. Красовского, А. И. Субботина на случай управляемой системы, не удовлетворяющей условию Липшица по фазовой переменной. В данной конструкции А. В. Кряжимского применение ОЭ (управлений-мер) также оказалось существенным.

2. Обозначения и определения общего характера

Используем стандартную теоретико-множественную символику (кванторы, связки и т.п.); через $\varnothing$ обозначаем пустое множество, $\triangleq$ — равенство по определению. Символ def заменяет фразу "по определению", а $\exists!$ заменяет фразу "существует и единственно". Принимаем аксиому выбора. Называем *семейством* множество, все элементы которого сами являются множествами.

Для произвольного объекта x через $\{x\}$ обозначаем синглетон, содержащий x. Если X — множество, то через $\mathcal{P}(X)$ и $\mathcal{P}'(X)$ обозначаем соответственно семейства всех и всех непустых п/м множества X. Полагаем, что $\mathrm{Fin}(X)$ есть def семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(X)$, т. е. семейство всех непустых конечных п/м множества X (в качестве X может, конечно, использоваться то или иное семейство). С произвольным непустым семейством $\mathfrak{X}$ связываем семейство

$$\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathfrak{X}) \triangleq \Big\{ \bigcap_{X\in\mathcal{K}} X : \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{X})\Big\} \tag{2.1}$$

всех конечных пересечений множеств из $\mathfrak{X}$; $\mathfrak{X} \subset \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathfrak{X})$. Если $\mathbb{M}$ — множество и $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(\mathbb{M})\big)$, то

$$\mathbf{C}_{\mathbb{M}}[\mathcal{M}] \triangleq \{\mathbb{M} \setminus M : M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(\mathbb{M})\big) \tag{2.2}$$

есть семейство п/м $\mathbb{M}$, двойственное по отношению к $\mathcal{M}$. Обозначение (2.2) будет использоваться обычно в случае, когда $\mathcal{M}$ — топология $\mathbb{M}$. Если A и B — множества, то B^A есть def множество всех отображений из A в B. При $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$ в виде $f^1(C) \overset{\triangle}{=} \{f(x)\colon x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ имеем образ множества C при действии f ($f^1(C) \neq \varnothing$ при $C \neq \varnothing$). Наконец, для произвольных непустых множеств A и B, функции $f \in B^A$ и семейства $\mathcal{A} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(A)\big)$ определяем

$$f^1[\mathcal{A}] \overset{\triangle}{=} \{f^1(A)\colon A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(B)\big). \tag{2.3}$$

Интерпретируем (2.3) как образ семейства $\mathcal{A}$.

Специальные семейства. Фиксируем до конца настоящего раздела непустое множество I. Среди семейств из $\mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(I)\big)$ выделяем π-системы [7, с. 14] с "нулем" и "единицей", получая в виде

$$\pi[I] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{I} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(I)\big) \mid (\varnothing \in \mathcal{I})\,\&\,(I \in \mathcal{I})\,\&\,(A \cap B \in \mathcal{I} \ \ \forall A \in \mathcal{I} \ \ \forall B \in \mathcal{I})\}$$

семейство всех таких π-систем. Частными случаями упомянутых π-систем являются алгебры п/м I и топологии на I :

$$(\mathrm{alg})[I] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{A} \in \pi[I] \mid I \setminus A \in \mathcal{A} \ \ \forall A \in \mathcal{A}\}, \quad (\mathrm{top})[I] \overset{\triangle}{=} \Big\{\tau \in \pi[I] \,\Big|\, \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau \ \ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\Big\}.$$

Если $\mathcal{I} \in \pi[I]$, то пару $(I, \mathcal{I})$ называем ИП, используя, конечно, расширительное толкование. Пусть

$$\tilde{\pi}^o[I] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{I} \in \pi[I] \mid \forall L \in \mathcal{I} \ \ \forall x \in I \setminus L \ \ \exists \Lambda \in \mathcal{I}\colon (x \in \Lambda)\,\&\,(\Lambda \cap L = \varnothing)\}.$$

Заметим, что $(\mathrm{alg})[I] \subset \tilde{\pi}^o[I]$. Введем, наконец, π-системы с синглетонами, полагая

$$\pi'_o[I] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{I} \in \pi[I] \mid \{x\} \in \mathcal{I} \ \ \forall x \in \mathcal{I}\}. \tag{2.4}$$

Понятно, что $\pi'_o[I] \subset \tilde{\pi}^o[I]$, при этом, конечно, $\mathcal{P}(I) \in \pi'_o[I]$.

Ультрафильтры π-систем (определения и основные свойства). В пределах настоящего пункта фиксируем π-систему $\mathcal{J} \in \pi[I]$, получая в виде $(I, \mathcal{J})$ ИП в расширительном толковании. В виде

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{J}) \overset{\triangle}{=} \big\{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{J} \setminus \{\varnothing\}) \mid (A \cap B \in \mathcal{F} \ \forall A \in \mathcal{F} \ \forall B \in \mathcal{F})\&(\forall F \in \mathcal{F} \ \forall J \in \mathcal{J} \ (F \subset J) \Rightarrow (J \in \mathcal{F}))\big\}$$

имеем непустое (так как $\{I\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{J})$) множество фильтров ИП $(I, \mathcal{J})$. При этом, конечно,

$$\big((I, \mathcal{J}) - \mathrm{ult}\big)[x] \overset{\triangle}{=} \{J \in \mathcal{J} \mid x \in J\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{J}) \quad \forall x \in I$$

(введены тривиальные фильтры ИП $(I, \mathcal{J})$). Наконец, в виде

$$\begin{aligned}\mathbb{F}^*_o(\mathcal{J}) &\overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{J}) \mid \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{J}) \ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Rightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\} \\ &= \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{J}) \mid \forall J \in \mathcal{J} \ \ (J \cap U \neq \varnothing \ \ \forall U \in \mathcal{U}) \Rightarrow (J \in \mathcal{U})\} \in \mathcal{P}'\big(\mathbb{F}^*(\mathcal{J})\big)\end{aligned} \tag{2.5}$$

имеем (непустое) множество у/ф ИП $(I, \mathcal{J})$. Среди этих у/ф выделяем свободные:

$$\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{f}}(\mathcal{J}) \overset{\triangle}{=} \Big\{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_o(\mathcal{J}) \,\Big|\, \bigcap_{L \in \mathcal{U}} L = \varnothing\Big\} = \mathbb{F}^*_o(\mathcal{J}) \setminus \mathbb{F}^*_{o,\mathbf{t}}(\mathcal{J}),$$

где $\mathbb{F}^*_{o,\mathbf{t}}(\mathcal{J}) \overset{\triangle}{=} \big\{\big((I, \mathcal{J}) - \mathrm{ult}\big)[x]\colon x \in I\big\} \in \mathcal{P}'\big(\mathbb{F}^*(\mathcal{J})\big)$. При этом

$$(\mathcal{J} \in \tilde{\pi}^o[I]) \Longleftrightarrow \big(((I, \mathcal{J}) - \mathrm{ult})[x] \in \mathbb{F}^*_o(\mathcal{J}) \ \ \forall x \in I\big). \tag{2.6}$$

Элементы топологии, 1. В пределах настоящего пункта фиксируем $\tau \in (\mathrm{top})[I]$ (тогда, в частности, $\tau \in \pi[I]$). Если $x \in I$, то $N_\tau^o(x) \triangleq \{G \in \tau \mid x \in G\} \in \mathbb{F}^*(\tau)$. При этом $\mathrm{cl}(A, \tau) \triangleq \{x \in I \mid A \cap G \neq \varnothing \ \forall G \in N_\tau^o(x)\} \in \mathbf{C}_I[\tau] \ \forall A \in \mathcal{P}(E)$ (введено замыкание п/м I в ТП (I, τ)). Напомним, что $\mathbf{C}_I[\tau]$ — семейство всех замкнутых в ТП (I, τ) п/м I.

Ультрафильтры π-систем (естественная топология). Рассмотрим естественное топологическое оснащение множества (2.5). Для этого отметим сначала, что (при $\mathcal{J} \in \pi[I]$)

$$\Phi_{\mathcal{J}}(L) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{J}) \mid L \in \mathcal{U}\} = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{J}) \mid L \cap U \neq \varnothing \ \forall U \in \mathcal{U}\} \quad \forall L \in \mathcal{J}. \tag{2.7}$$

Тогда семейство $(\mathbb{UF})[I; \mathcal{J}] \triangleq \{\Phi_{\mathcal{J}}(J) \colon J \in \mathcal{J}\}$ есть база топологии

$$\mathbf{T}_{\mathcal{J}}^*[I] \triangleq \{G \in \mathcal{P}\big(\mathbb{F}_o^*(\mathcal{J})\big) \mid \forall \mathcal{U} \in G \ \exists U \in \mathcal{U} \colon \Phi_{\mathcal{J}}(U) \subset G\} \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_o^*(\mathcal{J})], \tag{2.8}$$

превращающей $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{J})$ в хаусдорфово ТП

$$\big(\mathbb{F}_o^*(\mathcal{J}), \mathbf{T}_{\mathcal{J}}^*[I]\big). \tag{2.9}$$

При этом $\Phi_{\mathcal{J}}(J) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{J})}\big[\mathbf{T}_{\mathcal{J}}^*[I]\big]$ при $J \in \mathcal{J}$ (доказательство извлекается из (2.7)), а потому все множества из $(\mathbb{UF})[I; \mathcal{J}]$ открыто-замкнуты; в итоге ТП (2.9) нульмерно (см.[8, 6.2]).

З а м е ч а н и е 2.1. Если $\mathcal{J} \in (\mathrm{alg})[I]$, то (2.9) — компакт (компактное хаусдорфово ТП), а, точнее, пространство Стоуна, для которого $(\mathbb{UF})[I; \mathcal{J}] = \mathbf{T}_{\mathcal{J}}^*[I] \cap \mathbf{C}_{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{J})}\big[\mathbf{T}_{\mathcal{J}}^*[I]\big]$.

В свою очередь,

$$\mathbb{F}_o^*(\mathcal{J} \mid \mathfrak{I}) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{J}) \mid \mathfrak{I} \subset \mathcal{U}\} = \bigcap_{L \in \mathfrak{I}} \Phi_{\mathcal{J}}(L) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{J})}\big[\mathbf{T}_{\mathcal{J}}^*[I]\big] \quad \forall \mathfrak{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{J}). \tag{2.10}$$

Мы дополним (2.7), (2.10) аналогами, касающимися использования п/м I, уже не обязательно содержащихся в $\mathcal{J}$. Итак, с учетом (2.7) и (2.8) имеем, что

$$\mathbf{F}_o^*[\mathcal{J} \mid A] \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{J}) \mid A \cap U \neq \varnothing \ \forall U \in \mathcal{U}\} \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{J})}\big[\mathbf{T}_{\mathcal{J}}^*[I]\big] \quad \forall A \in \mathcal{P}(I) \tag{2.11}$$

(ясно, что $\mathbf{F}_o^*[\mathcal{J} \mid J] = \Phi_{\mathcal{J}}(J)$ при $J \in \mathcal{J}$). Как следствие получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_o^*(\mathcal{J} \mid \mathfrak{I}) \triangleq \bigcap_{A \in \mathfrak{I}} \mathbf{F}_o^*[\mathcal{J} \mid A] &= \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{J}) \mid A \cap U \neq \varnothing \ \forall A \in \mathfrak{I} \ \forall U \in \mathcal{U}\} \\ &\in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{J})}\big[\mathbf{T}_{\mathcal{J}}^*[I]\big] \quad \forall \mathfrak{I} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(I)\big) \end{aligned} \tag{2.12}$$

(при $\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{J})$ имеем $\mathbf{F}_o^*(\mathcal{J} \mid \mathcal{I}) = \mathbb{F}_o^*(\mathcal{J} \mid \mathcal{I})$ (см. (2.7), (2.10), (2.12))).

Свойства плотности. Полагаем в пределах настоящего пункта, что $\mathcal{J} \in \tilde{\pi}^o[I]$, получая в виде $(I, \mathcal{J})$ отделимое ИП [9, с. 40]. Тогда согласно (2.6) имеем отображение

$$((I, \mathcal{J}) - \mathrm{ult})[\cdot] \triangleq \big(((I, \mathcal{J}) - \mathrm{ult})[x]\big)_{x \in I} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{J})^I, \tag{2.13}$$

реализующее погружение I в ТП (2.9). Мы можем теперь рассматривать образы п/м I при действии оператора (2.13), получая п/м $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{J})$. Точнее, при $S \in \mathcal{P}(I)$ в соответствии с определением разд. 2 $((I, \mathcal{J}) - \mathrm{ult})[\cdot]^1(S) = \{((I, \mathcal{J}) - \mathrm{ult})[s] \colon s \in S\}$. При этом (см. [10, предложение 1])

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_o^*[\mathcal{J} \mid A] &= \mathrm{cl}\big(((I, \mathcal{J}) - \mathrm{ult})[\cdot]^1(A), \mathbf{T}_{\mathcal{J}}^*[I]\big) \\ &= \mathrm{cl}\big(\{((I, \mathcal{J}) - \mathrm{ult})[x] \colon x \in A\}, \mathbf{T}_{\mathcal{J}}^*[I]\big) \quad \forall A \in \mathcal{P}(I). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Как следствие получаем (см. (2.14)), в частности, что

$$\Phi_{\mathcal{J}}(L) = \mathrm{cl}\big(((I, \mathcal{J}) - \mathrm{ult})[\cdot]^1(L), \mathbf{T}_{\mathcal{J}}^*[I]\big) \quad \forall L \in \mathcal{J}. \tag{2.15}$$

В свою очередь, из (2.15) имеем (см. [10, (3.6)]) цепочку равенств

$$\mathbb{F}_o^*(\mathcal{J}) = \Phi_{\mathcal{J}}(I) = \mathrm{cl}\big(\mathbb{F}_{o,\mathbf{t}}^*(\mathcal{J}), \mathbf{T}_{\mathcal{J}}^*[I]\big). \tag{2.16}$$

Грубо говоря, (2.16) означает, что само множество I всюду плотно в ТП (2.9).

Ультрафильтры семейства всех п/м *I*. В настоящем пункте рассматриваем случай $\mathcal{J} = \mathcal{P}(I)$, полагая в этой связи $\mathfrak{F}[I] \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{F}^*\big(\mathcal{P}(I)\big)$, $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{F}_o^*\big(\mathcal{P}(I)\big)$ и

$$(I - \mathrm{ult})[x] \stackrel{\triangle}{=} \big((I, \mathcal{P}(I)) - \mathrm{ult}\big)[x] \quad \forall x \in I$$

(разумеется, $(I - \mathrm{ult})[x] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I]$ при $x \in I$). Тогда $\Phi_o(L|\,I) \stackrel{\triangle}{=} \Phi_{\mathcal{P}(I)}(L) = \{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \mid L \in \mathcal{U}\}$ $\forall L \in \mathcal{P}(I)$. Получаем, что

$$\tau_o^*[I] \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{T}_{\mathcal{P}(I)}^*[I] = \{G \in \mathcal{P}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I]) \mid \forall \mathcal{U} \in G \ \exists U \in \mathcal{U}\colon \Phi_o(U|\,I) \subset G\} \in (\mathrm{top})[I].$$

Данная топология превращает $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I]$ в экстремально несвязный [8, с. 540] компакт. Пусть

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^o[I|\,\mathfrak{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \mid \mathfrak{I} \subset \mathcal{U}\} = \bigcap_{J \in \mathfrak{I}} \Phi_o(J|\,I) \quad \forall \mathfrak{I} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(I)\big). \tag{2.17}$$

В (2.17) введены множества “стоун-чеховских” у/ф, содержащих всякий раз семейство, используемое в качестве ОАХ.

Базы фильтров. Через $\beta[I]$ и $\beta_o[I]$ обозначаем соответственно множества всех семейств $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(I)\big)$ и $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}'(I)\big)$, для каждого из которых $\forall B_1 \in \mathcal{B}$ $\forall B_2 \in \mathcal{B}$ $\exists B_3 \in \mathcal{B}\colon B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Элементы $\beta[I]$ — направленные семейства п/м I, а элементы $\beta_o[I]$ — суть БФ I; $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \subset \mathfrak{F}[I] \subset \beta_o[I] \subset \beta[I]$. Легко видеть, что (см. (2.1)) $\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathfrak{I}) \in \beta[I]$ $\forall \mathfrak{I} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(I)\big)$. Кроме того, $(I - \mathbf{fi})[\mathcal{B}] \stackrel{\triangle}{=} \{J \in \mathcal{P}(I) \mid \exists B \in \mathcal{B}\colon B \subset J\} \in \mathfrak{F}[I]$ $\forall \mathcal{B} \in \beta_o[I]$.

Элементы топологии, 2. В данном пункте фиксируем топологию $\tau \in (\mathrm{top})[I]$, получая ТП (I, τ). Поскольку $\mathbb{F}^*(\tau) \subset \beta_o[I]$, то при $x \in I$ определен фильтр $N_\tau(x) \stackrel{\triangle}{=} (I - \mathbf{fi})[N_\tau^o(x)] \in \mathfrak{F}[I]$ всех окрестностей [11, гл. I] точки x. Если $H \in \mathcal{P}(I)$, то $\mathrm{cl}(H, \tau) = \{x \in I \mid S \cap H \neq \varnothing \ \forall S \in N_\tau(x)\}$, а $(\tau - \mathrm{Int})[H] \stackrel{\triangle}{=} \{x \in I \mid H \in N_\tau(x)\}$ и $(\tau - \mathrm{Fr})[H] \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{cl}(H, \tau) \setminus (\tau - \mathrm{Int})[H]$ определяют внутренность и границу H соответственно. При этом $(\tau - \mathrm{dens})[I] = \{H \in \mathcal{P}(I) \mid I = \mathrm{cl}(H, \tau)\}$ есть семейство всех п/м I, всюду плотных в (I, τ). Наконец, в виде $(\tau - \mathrm{isol})[I] \stackrel{\triangle}{=} \big\{x \in I \mid \{x\} \in \tau\big\}$ имеем множество всех точек I, изолированных в смысле ТП (I, τ). Если $\mathcal{B} \in \beta_o[I]$ и $x \in I$, то [11, гл. I]

$$(\mathcal{B} \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} x) \stackrel{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \big(N_\tau(x) \subset (I - \mathbf{fi})[\mathcal{B}]\big).$$

В виде $(\mathrm{can} - \mathrm{clos})[\tau] \stackrel{\triangle}{=} \{F \in \mathcal{P}(I) \mid F = \mathrm{cl}((\tau - \mathrm{Int})[F], \tau)\} = \{\mathrm{cl}(G, \tau)\colon G \in \tau\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{C}_I[\tau])$ имеем семейство всех канонически замкнутых в (I, τ) п/м I.

Отметим известное свойство: если $J \in \mathcal{P}'(I)$, то $\tau|_J \stackrel{\triangle}{=} \{J \cap G\colon G \in \tau\} \in (\mathrm{top})[J]$ и в виде $(J, \tau|_J)$ имеем подпространство ТП(I, τ).

Элементы топологии, 3. Фиксируем в данном пункте непустые множества X и Y, а также топологии $\tau_1 \in (\mathrm{top})[X]$ и $\tau_2 \in (\mathrm{top})[Y]$. Тогда $C(X, \tau_1, Y, \tau_2) \stackrel{\triangle}{=} \{g \in Y^X \mid g^{-1}(G) \in \tau_1$ $\forall G \in \tau_2\} \in \mathcal{P}'(Y^X)$ есть множество всех отображений из Y^X, непрерывных в смысле ТП (X, τ_1) и (Y, τ_2). Если $g \in C(X, \tau_1, Y, \tau_2)$, а множество $K \in \mathcal{P}(X)$ компактно [8, 3.1] в (X, τ_1), то множество $g^1(K)$ компактно в (Y, τ_2).

3. Множества притяжения

Всюду в дальнейшем фиксируем непустое множество E, играющее роль пространства обычных решений (управлений). В настоящем разделе фиксируем ТП (Y,τ) (итак, $\tau\in(\mathrm{top})[Y]$), $Y\neq\varnothing$, и отображение $\mathbf{n}\in Y^E$, играющее роль целевого. Тогда $\mathbf{n}^1[\mathcal{B}]\in\beta_o[Y]$ $\forall\mathcal{B}\in\beta_o[X]$. С учетом этого полагаем, что

$$(\mathbf{as})[E;Y;\tau;\mathbf{n};\mathfrak{C}]\overset{\triangle}{=}\{y\in Y\mid\exists\mathcal{U}\in\mathfrak{F}^o_{\mathbf{u}}[E|\,\mathfrak{C}]\colon\mathbf{n}^1[\mathcal{U}]\overset{\tau}{\Longrightarrow}y\}\quad\forall\mathfrak{C}\in\mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big).\tag{3.1}$$

Множества типа (3.1) именуем далее МП. Эквивалентные представления МП см. в [12, § 3]. Сейчас отметим только, что

$$(\mathbf{as})[E;Y;\tau;\mathbf{n};\mathcal{B}]=\bigcap_{B\in\mathcal{B}}\mathrm{cl}\big(\mathbf{n}^1(B),\tau\big)\quad\forall\mathcal{B}\in\beta[E].\tag{3.2}$$

С использованием (2.1) и (3.2) получаем, конечно, что

$$\begin{aligned}&(\mathbf{as})[E;Y;\tau;\mathbf{n};\mathfrak{C}]=(\mathbf{as})[E;Y;\tau;\mathbf{n};\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathfrak{C})]\\&=\bigcap_{\Sigma\in\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathfrak{C})}\mathrm{cl}\big(\mathbf{n}^1(\Sigma),\tau\big)\in\mathbf{C}_Y[\tau]\quad\forall\mathfrak{C}\in\mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big).\end{aligned}\tag{3.3}$$

Заметим, что для представления МП (3.1)–(3.3) могут использоваться [12] направленности и сходимость по Мору — Смиту. Условия, достаточные для секвенциальной реализации МП, см., например, в [9]. Если $\Xi\in\mathcal{P}(E)$, то $\{\Xi\}\in\beta[E]$ и согласно (3.2) $(\mathbf{as})[E;Y;\tau;\mathbf{n};\{\Xi\}]=\mathrm{cl}\big(\mathbf{n}^1(\Xi),\tau\big)$, что соответствует стандартной реализации (достижимость при стандартных ограничениях). Если $\mathfrak{C}\in\mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$, то в терминах множества

$$\mathrm{cl}\Big(\mathbf{n}^1\big(\bigcap_{\Sigma\in\mathfrak{C}}\Sigma\big),\tau\Big)=\mathrm{cl}\Big(\mathbf{n}^1\big(\bigcap_{\Sigma\in\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathfrak{C})}\Sigma\big),\tau\Big)\in\mathcal{P}\big((\mathbf{as})[E;Y;\tau;\mathbf{n};\mathfrak{C}]\big)$$

определяем нарост МП, отвечающий ОАХ, связанным с $\mathfrak{C}$:

$$(\mathrm{rem})[E;Y;\tau;\mathbf{n};\mathfrak{C}]\overset{\triangle}{=}(\mathbf{as})[E;Y;\tau;\mathbf{n};\mathfrak{C}]\setminus\mathrm{cl}\Big(\mathbf{n}^1\big(\bigcap_{\Sigma\in\mathfrak{C}}\Sigma\big),\tau\Big).\tag{3.4}$$

Множество (3.4) локально замкнуто [8, 2.7] в (Y,τ), поскольку оно является разностью двух замкнутых множеств (см. (3.3)).

4. Компактификаторы и преобразования множеств притяжения

Всюду в дальнейшем фиксируем (наряду с множеством E, $E\neq\varnothing$) ТП $(\mathbf{H},\tilde\tau)$, $\mathbf{H}\neq\varnothing$, и отображение $\mathbf{r}\in\mathbf{H}^E$. Мы рассматриваем точки $(\mathbf{H},\tilde\tau)$ как состояния, в реализации которых на значениях $\mathbf{r}$ заинтересован исследователь; само отображение $\mathbf{r}$ именуем при этом целевым (имея в виду определения предыдущего раздела, можно полагать, что $(\mathbf{H},\tilde\tau)$ играет роль (Y,τ), а $\mathbf{r}$ — роль оператора $\mathbf{n}$). Если при этом $(\mathbf{K},\tilde t)$, $\mathbf{K}\neq\varnothing$, есть ТП, $m\in\mathbf{K}^E$, $g\in C(\mathbf{K},\tilde t,\mathbf{H},\tilde\tau)$ и $\mathbf{r}=g\circ m$ ($\circ$ — символ композиции отображений), то [13, предложение 3.3.1]

$$g^1\big((\mathbf{as})[E;\mathbf{K};\tilde t;m;\mathfrak{C}]\big)\subset(\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tilde\tau;\mathbf{r};\mathfrak{C}]\quad\forall\mathfrak{C}\in\mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big).\tag{4.1}$$

В (4.1) $(\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tilde\tau;\mathbf{r};\mathfrak{C}]$ есть основное, а $(\mathbf{as})[E;\mathbf{K};\tilde t;m;\mathfrak{C}]$ — вспомогательное МП.

Всюду в дальнейшем полагаем, что $(\mathbf{H},\tilde\tau)$ — хаусдорфово ТП. Набор $(\mathbf{K},\tilde t,m,g)$, для которого $(\mathbf{K},\tilde t)$ — компактное [8, с. 196] ТП, $\mathbf{K}\neq\varnothing$, $m\in\mathbf{K}^E$, $g\in C(\mathbf{K},\tilde t,\mathbf{H},\tilde\tau)$ и $\mathbf{r}=g\circ m$, называем *компактификатором*. Если $(\mathbf{K},\tilde t,m,g)$ — компактификатор и $\Sigma\in\mathcal{P}(E)$, то, как легко видеть,

$$\mathrm{cl}\big(\mathbf{r}^1(\Sigma),\tilde\tau\big)=g^1\big(\mathrm{cl}(m^1(\Sigma),\tilde t)\big).\tag{4.2}$$

Из (4.2) следует, в частности, что при всяком выборе компактификатора $(\mathbf{K}, \tilde{t}, m, g)$

$$\mathrm{cl}\big(\mathbf{r}^1(E), \tilde{\tau}\big) = g^1\big(\mathrm{cl}\big(m^1(E), \tilde{t}\big)\big). \tag{4.3}$$

Отметим, что для всяких компактификатора $(\mathbf{K}, \tilde{t}, m, g)$ и семейства $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathcal{E}] = g^1\big((\mathbf{as})[E; \mathbf{K}; \tilde{t}; m; \mathcal{E}]\big) \tag{4.4}$$

(в связи с (4.4) см., в частности, [9; 12]). Компактификатор $(\mathbf{K}, \tilde{t}, m, g)$ называем *плотным*, если $\mathrm{cl}\big(m^1(E), \tilde{t}\big) = \mathbf{K}$. В этом случае (см. (4.3))

$$g^1(\mathbf{K}) = \mathrm{cl}\big(\mathbf{r}^1(E), \tilde{\tau}\big) \tag{4.5}$$

(итак, если $(\mathbf{K}, \tilde{t}, m, g)$ — плотный компактификатор, то справедливо равенство (4.5)).

Предложение 4.1. *Если $(\mathbf{K}, \tilde{t}, m, g)$ — компактификатор, то набор*

$$\big(\mathrm{cl}\big(m^1(E), \tilde{t}\big), \tilde{t}|_{\mathrm{cl}(m^1(E), \tilde{t})}, m, \tilde{g}\big),$$

где $\tilde{g} \in \mathbf{H}^{\mathrm{cl}(m^1(E), \tilde{t})}$ определяется правилом $\tilde{g} \stackrel{\triangle}{=} \big(g(x)\big)_{x \in \mathrm{cl}(m^1(E), \tilde{t})}$, является плотным компактификатором.

Доказательство. Пусть $(\mathbf{K}, \tilde{t}, m, g)$ — произвольный компактификатор, $P \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{cl}\big(m^1(E), \tilde{t}\big)$ и $\theta \stackrel{\triangle}{=} \tilde{t}|_P$. Тогда $m \in P^E$, (P, θ) — подпространство $(\mathbf{K}, \tilde{t})$. При этом P замкнуто в $(\mathbf{K}, \tilde{t})$ и, стало быть, компактно в данном ТП. В итоге (P, θ) — компактное ТП, $P \neq \varnothing$, так как $m^1(E) \neq \varnothing$. Далее $\tilde{g} \in \mathbf{H}^P$ и при $G \in \tilde{\tau}$

$$\tilde{g}^{-1}(G) = \{y \in P \mid \tilde{g}(y) \in G\} = \{y \in P \mid g(y) \in G\} = g^{-1}(G) \cap P \in \theta.$$

Имеем $\tilde{g} \in C(P, \theta, \mathbf{H}, \tilde{\tau})$. Наконец, $(\tilde{g} \circ m)(x) = \tilde{g}\big(m(x)\big) = g\big(m(x)\big) = (g \circ m)(x) = \mathbf{r}(x)$ при $x \in E$. Итак, $\mathbf{r} = \tilde{g} \circ m$. Следовательно, $(P, \theta, m, \tilde{g})$ — компактификатор, для которого $\mathrm{cl}\big(m^1(E), \theta\big) = \mathrm{cl}\big(m^1(E), \tilde{t}\big) \cap P = P \cap P = P$.

Предложение доказано.

Итак, всякий компактификатор может быть несложным преобразованием превращен в плотный, а тогда справедливо свойство, подобное (4.5).

Отметим, что (см. (3.3)) $(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathfrak{C}] \subset \mathrm{cl}\big(\mathbf{r}^1(E), \tilde{\tau}\big)$ $\forall \mathfrak{C} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$. С учетом этого без потери общности будем полагать до конца настоящего раздела выполненным равенство

$$\mathbf{H} = \mathrm{cl}\big(\mathbf{r}^1(E), \tilde{\tau}\big). \tag{4.6}$$

Тогда для всякого компактификатора $(\mathbf{K}, \tilde{t}, m, g)$ имеем (см. (4.3), (4.6)), что $g^1(\mathbf{K}) = \mathbf{H}$. Действительно, из (4.3) и (4.6) следует в рассматриваемом случае, что $\mathbf{H} = \mathrm{cl}\big(\mathbf{r}^1(E), \tilde{\tau}\big) \subset g^1(\mathbf{K}) \subset \mathbf{H}$, т. е. $g^1(\mathbf{K}) = \mathbf{H}$. Отметим очевидное

Предложение 4.2. *Если $(\mathbf{K}, \tilde{t}, m, g)$ — компактификатор, для которого g — инъективное отображение, то g является гомеоморфизмом $(\mathbf{K}, \tilde{t})$ на $(\mathbf{H}, \tilde{\tau})$.*

Доказательство. Пусть $(\mathbf{K}, \tilde{t}, m, g)$ есть компактификатор с инъективным отображением g. Тогда (см. (4.6)) g есть непрерывная биекция компактного ТП $(\mathbf{K}, \tilde{t})$ на хаусдорфово ТП $(\mathbf{H}, \tilde{\tau})$. Поэтому [8, 3.1.13] g является гомеоморфизмом.

Предложение доказано.

Условимся о соглашении: компактификатор $(\mathbf{K}, \tilde{t}, m, g)$, для которого отображение g инъективно, называем *инъективным*. Покажем, что каждый компактификатор может быть преобразован в инъективный. Если при этом исходный компактификатор является плотным, то и преобразованный будет таким же. Упомянутое преобразование связываем с естественной факторизацией.

Итак, пусть $(\mathbb{K}, \hat{t}, \mu, \nu)$ есть произвольный компактификатор. Стало быть, $(\mathbb{K}, \hat{t}\,)$, $\mathbb{K} \neq \varnothing$, есть компактное ТП, $\mu \in \mathbb{K}^E$, $\nu \in C(\mathbb{K}, \hat{t}, \mathbf{H}, \tilde{\tau})$ и при этом $\mathbf{r} = \nu \circ \mu$. Напомним, что $\nu^1(\mathbb{K}) = \mathbf{H}$, т. е. ν — сюръекция $\mathbb{K}$ на $\mathbf{H}$. Введем в рассмотрение $\mathcal{D} \overset{\triangle}{=} \big\{\nu^{-1}(\{h\})\colon h \in \mathbf{H}\big\} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}'(\mathbb{K})\big)$. Легко видеть, что семейство $\mathcal{D}$ — разбиение $\mathbb{K}$. В частности, $\forall D_1 \in \mathcal{D}\ \forall D_2 \in \mathcal{D}$

$$(D_1 \cap D_2 = \varnothing) \vee (D_1 = D_2).$$

Естественное и связанное с $\mathcal{D}$ отношение эквивалентности $\equiv$ на $\mathbb{K}$ определяем условием: $\forall y_1 \in \mathbb{K}$, $\forall y_2 \in \mathbb{K}$

$$(y_1 \equiv y_2) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \big(\nu(y_1) = \nu(y_2)\big).$$

Тогда $\mathcal{D}$ соответствует фактор-пространству $\mathbb{K}/_{\equiv}$; при этом классы эквивалентности — элементы $\mathbb{K}/_{\equiv}$ — имеют следующий вид:

$$[y]_\nu \overset{\triangle}{=} \{\tilde{y} \in \mathbb{K} \mid y \equiv \tilde{y}\} = \nu^{-1}(\{\nu(y)\}) \in \mathcal{P}'(\mathbb{K}) \quad \forall y \in \mathbb{K}. \tag{4.7}$$

Соответственно этому представлению имеем равенство $\mathcal{D} = \big\{\nu^{-1}\big(\{\nu(y)\}\big)\colon y \in \mathbb{K}\big\}$. Отметим, что (см. (4.7)) $\forall D \in \mathcal{D}\ \exists!\, h \in \mathbf{H}\colon \nu(y) = h\ \ \forall y \in D$. С учетом этого полагаем, что $\sigma \in \mathbf{H}^{\mathcal{D}}$ есть def такое отображение, что $\sigma(D) = \nu(y)\ \ \forall D \in \mathcal{D}\ \ \forall y \in D$. Разумеется, σ — биекция $\mathcal{D}$ на $\mathbf{H}$ (учитываем свойство сюръективности ν).

Отметим, что $\mathbf{p} \overset{\triangle}{=} ([y]_\nu)_{y \in \mathbb{K}} \in \mathcal{D}^{\mathbb{K}}$ — сюръекция (каноническая проекция $\mathbb{K}$ на фактор-пространство), для которой $\mathbf{p}(\tilde{y}) = \nu^{-1}\big(\{\nu(\tilde{y})\}\big)$ при $\tilde{y} \in \mathbb{K}$. В виде $\nu = \sigma \circ \mathbf{p}$ имеем (легко проверяемое) каноническое разложение ν. Следуя [8, 2.4], оснащаем $\mathcal{D}$ фактор-топологией

$$\mathcal{T} \overset{\triangle}{=} \{\mathbb{G} \in \mathcal{P}(\mathcal{D}) \mid \mathbf{p}^{-1}(\mathbb{G}) \in \hat{t}\,\} \in (\text{top})[\mathcal{D}], \tag{4.8}$$

для которой имеет место свойство непрерывности $\mathbf{p}$, т. е. $\mathbf{p} \in C(\mathbb{K}, \hat{t}, \mathcal{D}, \mathcal{T})$, а тогда $(\mathcal{D}, \mathcal{T})$ — компактное ТП (см. [8, 3.1.10]). С другой стороны, из непрерывности (и канонического разложения) ν вытекает [8, 2.4.2], что $\sigma \in C(\mathcal{D}, \mathcal{T}, \mathbf{H}, \tilde{\tau})$.

Заметим, что $\mathbf{p} \circ \mu \in \mathcal{D}^E$ и $\sigma \circ (\mathbf{p} \circ \mu) = \sigma \circ \mathbf{p} \circ \mu = (\sigma \circ \mathbf{p}) \circ \mu = \nu \circ \mu = \mathbf{r}$. Тем самым завершена проверка следующего свойства: $(\mathcal{D}, \mathcal{T}, \mathbf{p} \circ \mu, \sigma)$ есть инъективный компактификатор.

Пусть теперь $(\mathbb{K}, \hat{t}, \mu, \nu)$ — плотный компактификатор. Тогда $\text{cl}\big(\mu^1(E), \hat{t}\,\big) = \mathbb{K}$. Учтем тот факт, что отображение $\mathbf{p}$ непрерывно. Тогда [8, 1.4.1]

$$\mathbf{p}^1(\mathbb{K}) = \mathbf{p}^1\big(\text{cl}\big(\mu^1(E), \hat{t}\,\big)\big) \subset \text{cl}\big(\mathbf{p}^1\big(\mu^1(E)\big), \mathcal{T}\big) = \text{cl}\big((\mathbf{p} \circ \mu)^1(E), \mathcal{T}\big). \tag{4.9}$$

В силу сюръективности $\mathbf{p}$ имеем из (4.9) вложение

$$\mathcal{D} \subset \text{cl}\big((\mathbf{p} \circ \mu)^1(E), \mathcal{T}\big) \tag{4.10}$$

(учитываем, что $\mathcal{D} = \mathbf{p}^1(\mathbb{K})$). Однако $(\mathbf{p} \circ \mu)^1(E) = \mathbf{p}^1\big(\mu^1(E)\big) \subset \mathbf{p}^1(\mathbb{K}) = \mathcal{D}$, а тогда (см. (4.8))

$$\text{cl}\big((\mathbf{p} \circ \mu)^1(E), \mathcal{T}\big) \subset \mathcal{D}.$$

В итоге (см. (4.10)) $\mathcal{D} = \text{cl}\big((\mathbf{p} \circ \mu)^1(E), \mathcal{T}\big)$ и, стало быть, $(\mathcal{D}, \mathcal{T}, \mathbf{p} \circ \mu, \sigma)$ — плотный компактификатор. Следовательно,

$$\big(\text{cl}\big(\mu^1(E), \hat{t}\,\big) = \mathbb{K}\big) \Longrightarrow \big(\text{cl}\big((\mathbf{p} \circ \mu)^1(E), \mathcal{T}\big) = \mathcal{D}\big).$$

Итак (см. предложение 4.1), располагая произвольным компактификатором, мы всегда можем построить инъективный плотный компактификатор.

Возвращаясь к $(\mathbb{K}, \hat{t}, \mu, \nu)$, отметим, что ТП $(\mathcal{D}, \mathcal{T})$ является компактом. Достаточно показать для этого, что $(\mathcal{D}, \mathcal{T})$ — хаусдорфово ТП, что на самом деле следует из предложения 4.2. Но все же поясним соответствующую конструкцию, фиксируя $D_1 \in \mathcal{D}$ и $D_2 \in \mathcal{D} \setminus \{D_1\}$. Тогда в силу биективности σ как отображения $\mathcal{D}$ на $\mathbf{H}$ имеем, что $\sigma(D_1) \neq \sigma(D_2)$, а потому в силу отделимости $(\mathbf{H}, \tilde{\tau})$ для некоторых $G_1 \in N^{o}_{\tilde{\tau}}\big(\sigma(D_1)\big)$ и $G_2 \in N^{o}_{\tilde{\tau}}\big(\sigma(D_2)\big)$ имеем свойство $G_1 \cap G_2 = \varnothing$. При этом по непрерывности σ имеем

$$\big(\sigma^{-1}(G_1) \in N^{o}_{\mathcal{T}}(D_1)\big) \,\&\, \big(\sigma^{-1}(G_2) \in N^{o}_{\mathcal{T}}(D_2)\big),$$

причем $\sigma^{-1}(G_1) \cap \sigma^{-1}(G_2) = \sigma^{-1}(G_1 \cap G_2) = \sigma^{-1}(\varnothing) = \varnothing$. Коль скоро выбор D_1 и D_2 был произвольным, отделимость ТП $(\mathcal{D}, \mathcal{T})$ установлена. Вообще для всякого инъективного компактификатора $(\mathbf{K}, \tilde{t}, m, g)$ в виде $(\mathbf{K}, \tilde{t})$ имеем компакт (см. предложение 4.2).

Всюду в дальнейшем фиксируем семейство $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$, определяющее ОАХ. Отметим два простых свойства, связанных с предложением 4.2. Итак, пусть (при условии (4.6)) $(\mathfrak{K}, \vartheta, p, q)$ — инъективный компактификатор (свойство плотности выполненным не предполагается). Тогда в рассматриваемом случае

$$(\mathrm{rem})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathcal{E}] = q^1\big((\mathrm{rem})[E; \mathfrak{K}; \vartheta; p; \mathcal{E}]\big) \tag{4.11}$$

(для произвольного компактификатора $(\mathbf{K}, \tilde{t}, m, g)$ равенство, подобное (4.11), может отсутствовать, однако всегда

$$(\mathrm{rem})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathcal{E}] \subset g^1\big((\mathrm{rem})[E; \mathbf{K}; \tilde{t}; m; \mathcal{E}]\big);$$

следовательно, при $(\mathrm{rem})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathcal{E}] \neq \varnothing$ непременно $(\mathrm{rem})[E; \mathbf{K}; \tilde{t}; m; \mathcal{E}] \neq \varnothing$). Кроме того,

$$q^1\big((\vartheta - \mathrm{Int})\big[(\mathbf{as})[E; \mathfrak{K}; \vartheta; p; \mathcal{E}]\big]\big) = (\tilde{\tau} - \mathrm{Int})\big[(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathcal{E}]\big]. \tag{4.12}$$

Свойства (4.11), (4.12) связаны с гомеоморфностью q (см. предложение 4.2). Ограничимся обсуждением (4.12). Поскольку q — биекция $\mathfrak{K}$ на $\mathbf{H}$, то

$$\big(q^1\big(q^{-1}(H)\big) = H \;\; \forall H \in \mathcal{P}(\mathbf{H})\big) \,\&\, \big(q^{-1}\big(q^1(K)\big) = K \;\; \forall K \in \mathcal{P}(\mathfrak{K})\big). \tag{4.13}$$

При этом $\mathbf{r} = q \circ p$ и справедливо (см. (4.4)) равенство

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathcal{E}] = q^1\big((\mathbf{as})[E; \mathfrak{K}; \vartheta; p; \mathcal{E}]\big). \tag{4.14}$$

Поскольку, в частности, q — открытое отображение, то $q^1\big((\vartheta - \mathrm{Int})\big[(\mathbf{as})[E; \mathfrak{K}; \vartheta; p; \mathcal{E}]\big]\big) \in \tilde{\tau}$ и $q^1\big((\vartheta - \mathrm{Int})\big[(\mathbf{as})[E; \mathfrak{K}; \vartheta; p; \mathcal{E}]\big]\big) \subset (\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathcal{E}]$ в силу (4.14). В итоге

$$q^1\big((\vartheta - \mathrm{Int})\big[(\mathbf{as})[E; \mathfrak{K}; \vartheta; p; \mathcal{E}]\big]\big) \subset (\tilde{\tau} - \mathrm{Int})\big[(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathcal{E}]\big]. \tag{4.15}$$

С другой стороны, имеем в силу непрерывности q, что $q^{-1}\big((\tilde{\tau} - \mathrm{Int})\big[(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathcal{E}]\big]\big) \in \vartheta$. Причем, как легко видеть, с учетом (4.13)

$$q^{-1}\big((\tilde{\tau} - \mathrm{Int})\big[(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathcal{E}]\big]\big) \subset q^{-1}\big((\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathcal{E}]\big)$$
$$= q^{-1}\big(q^1\big((\mathbf{as})[E; \mathfrak{K}; \vartheta; p; \mathcal{E}]\big)\big) = (\mathbf{as})[E; \mathfrak{K}; \vartheta; p; \mathcal{E}],$$

откуда по определению внутренности получаем, что $q^{-1}\big((\tilde{\tau} - \mathrm{Int})\big[(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathcal{E}]\big]\big) \subset (\vartheta - \mathrm{Int})\big[(\mathbf{as})[E; \mathfrak{K}; \vartheta; p; \mathcal{E}]\big]$ и, как следствие (см. (4.13)),

$$(\tilde{\tau} - \mathrm{Int})\big[(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathcal{E}]\big] \subset q^1\big((\vartheta - \mathrm{Int})\big[(\mathbf{as})[E; \mathfrak{K}; \vartheta; p; \mathcal{E}]\big]\big). \tag{4.16}$$

Из (4.15) и (4.16) получаем (4.12).

Предложение 4.3. *Если* $(\mathbf{K}, \tilde{t}, m, q)$ — *компактификатор, то* $\tilde{\tau} = \{G \in \mathcal{P}(\mathbf{H}) \mid q^{-1}(G) \in \tilde{t}\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что q — сюръекция $\mathbf{K}$ на $\mathbf{H}$. При этом $(\mathbf{K}, \tilde{t})$ — компактное, а $(\mathbf{H}, \tilde{\tau})$ — хаусдорфово ТП. Тогда в силу непрерывности q имеем также, что q — замкнутое отображение $(\mathbf{K}, \tilde{t})$ на $(\mathbf{H}, \tilde{\tau})$, а потому согласно [14, гл. 3, теорема 8] справедливо требуемое равенство, означающее, что $\tilde{\tau}$ есть фактор-топология $\mathbf{H}$.

Предложение доказано.

В связи с понятием фактор-топологии отметим исследования П. С. Александрова [15, с. 116]. Заметим ряд совсем простых свойств:

(1) Если (X, τ_1), $X \neq \varnothing$, и (Y, τ_2), $Y \neq \varnothing$, — два ТП, а f — непрерывная и замкнутая [8, 1.4] сюръекция X на Y, то $f^1\big[\mathbf{C}_X[\tau_1]\big] = \mathbf{C}_Y[\tau_2]$.

(2) Если (X, τ_1) и (Y, τ_2) соответствуют (1), а f — непрерывная и открытая [8, 1.4] сюръекция X на Y, то $f^1[\tau_1] = \tau_2$.

Предложение 4.4. *Если* $(\mathbf{K}, \tilde{t}, m, g)$ *— компактификатор, то* $g^1\big[\mathbf{C}_{\mathbf{K}}[\tilde{t}]\big] = \mathbf{C}_{\mathbf{H}}[\tilde{\tau}]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о легко следует из свойства (1).

Для каждого ТП $(X, \mathbf{t})$ через $(\mathbf{t} - \mathrm{comp})[X]$ обозначаем семейство всех п/м X, компактных в смысле $(X, \mathbf{t})$. Весьма очевидно

Следствие 4.1. *Если* $(\mathbf{K}, \tilde{t}, m, g)$ *— компактификатор, то*

$$g^1[(\tilde{t} - \mathrm{comp})[\mathbf{K}]] = (\tilde{\tau} - \mathrm{comp})[\mathbf{H}].$$

Два последних положения дополним простым следствием известного положения [15, с. 346]: пусть $(\mathbf{K}, \tilde{t}, m, g)$ — компактификатор, у которого g есть неприводимое [8, с. 211] отображение $\mathbf{K}$ на $\mathbf{H}$, т. е. g — сюръекция $\mathbf{K}$ на $\mathbf{H}$ и $g^1(F) \neq \mathbf{H}$ $\forall F \in \mathbf{C}_{\mathbf{K}}[\tilde{t}] \setminus \{\mathbf{K}\}$. Тогда $g^1[(\mathrm{can} - \mathrm{clos})[\tilde{t}]] = (\mathrm{can} - \mathrm{clos})[\tilde{\tau}]$ и, более того, отображение $F \longmapsto g^1(F)\colon (\mathrm{can} - \mathrm{clos})[\tilde{t}] \longrightarrow (\mathrm{can} - \mathrm{clos})[\tilde{\tau}]$ является биекцией $(\mathrm{can} - \mathrm{clos})[\tilde{t}]$ на $(\mathrm{can} - \mathrm{clos})[\tilde{\tau}]$.

5. Ультрафильтры как обобщенные элементы в задачах о достижимости

В настоящем разделе приводятся основные сведения, касающиеся построения и использования МП в пространстве у/ф широко понимаемых ИП. В этой связи отметим сначала некоторые общие положения, связанные с (2.14)–(2.16), фиксируя (в настоящем разделе) отделимую π-систему $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^o[E]$. Тогда (2.13) определяет правило погружения E в нульмерное хаусдорфово ТП (2.9), где следует только полагать $I = E$ и $\mathcal{J} = \mathcal{L}$. При этом

$$\begin{aligned}(\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; \big((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]; \mathcal{E}] &= \bigcap_{\Sigma \in \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})} \mathbf{F}_o^*[\mathcal{L} | \, \Sigma] = \mathbf{F}_o^*\big(\mathcal{L} | \, \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})\big) \\ &= \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}) \mid \Sigma \cap U \neq \varnothing \ \forall \Sigma \in \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E}) \ \forall U \in \mathcal{U}\} \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})}\big[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\big] \end{aligned} \tag{5.1}$$

определяет множество $\mathcal{E}$-допустимых у/ф ИП $(E, \mathcal{L})$. Отметим очевидное следствие: если $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}$, то $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, определено (см. (2.10)) множество $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L} | \, \mathcal{E})$ и при этом

$$(\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; \big((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]; \mathcal{E}] = \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L} | \, \mathcal{E}). \tag{5.2}$$

Итак, в виде (5.1), (5.2) имеем варианты МП в ТП типа (2.9). В свете общих построений разд. 4 данные МП имеют смысл вспомогательных. Возвращаясь к проблеме достижимости в $(\mathbf{H}, \tilde{\tau})$, введем (см. [9]) при $\widetilde{\mathcal{L}} \in \pi[E]$

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_{\lim}[E; \widetilde{\mathcal{L}}; \mathbf{H}; \tilde{\tau}] &\stackrel{\triangle}{=} \{f \in \mathbf{H}^E \mid \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\widetilde{\mathcal{L}}) \ \exists \, h \in \mathbf{H}\colon f^1[\mathcal{U}] \stackrel{\tilde{\tau}}{\Longrightarrow} h\} \\ &= \{f \in \mathbf{H}^E \mid \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\widetilde{\mathcal{L}}) \ \exists! \, h \in \mathbf{H}\colon f^1[\mathcal{U}] \stackrel{\tilde{\tau}}{\Longrightarrow} h\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{H}^E)\end{aligned} \tag{5.3}$$

(учитываем, что $\mathbb{F}_o^*(\widetilde{\mathcal{L}}) \subset \beta_o[E]$). С учетом (5.3) получаем, что при $\widetilde{\mathcal{L}} \in \pi[E]$ и $f \in \mathbb{F}_{\lim}[E;\widetilde{\mathcal{L}};\mathbf{H};\tilde{\tau}]$ определено отображение

$$\varphi_{\lim}[f|\,\widetilde{\mathcal{L}}]\colon \mathbf{F}_o^*(\widetilde{\mathcal{L}}) \longrightarrow \mathbf{H} \tag{5.4}$$

по следующему правилу: если $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\widetilde{\mathcal{L}})$, то

$$f^1[\mathcal{U}] \overset{\tilde{\tau}}{\Longrightarrow} \varphi_{\lim}[f|\,\widetilde{\mathcal{L}}](\mathcal{U}). \tag{5.5}$$

Важно, что уже в столь общем случае при $\mathcal{E} \subset \widetilde{\mathcal{L}}$ определяемое посредством (2.10) множество $\mathbb{F}_o^*(\widetilde{\mathcal{L}}|\,\mathcal{E})$ реализует свойство

$$\varphi_{\lim}[f|\,\widetilde{\mathcal{L}}]^1\big(\mathbb{F}_o^*(\widetilde{\mathcal{L}}|\,\mathcal{E})\big) \subset (\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tau;f;\mathcal{E}] \tag{5.6}$$

(конструкция на основе (5.4), (5.5) позволяет (см. (5.6)) оценивать основное МП снизу). Разумеется, мы можем использовать (5.4)–(5.6) при $\widetilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}$. Полагаем в дальнейшем, что

$$\mathbf{r} \in \mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};\mathbf{H};\tilde{\tau}] \tag{5.7}$$

(в [9; 16] указаны конкретные классы отображений, для которых (5.7) выполнено). Условимся также о соглашении $\varphi \overset{\triangle}{=} \varphi_{\lim}[\mathbf{r}|\,\mathcal{L}]$, получая отображение $\varphi\colon \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}) \to \mathbf{H}$ со свойством

$$\mathbf{r}^1[\mathcal{U}] \overset{\tilde{\tau}}{\Longrightarrow} \varphi(\mathcal{U}) \quad \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}). \tag{5.8}$$

Из (5.6) извлекается при $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}$ соответствующий вариант оценки снизу для основного МП. В случае $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$ следует использовать положения [10, § 5] (см. также (5.1)). Ниже рассматривается этот общий случай.

В настоящем исследовании ограничимся обсуждением той естественной ситуации, когда основное МП можно представить в виде непрерывного образа вспомогательного. В этой связи полагаем далее, что ТП $(\mathbf{H},\tilde{\tau})$ регулярно [8, 1.5], т. е. $(\mathbf{H},\tilde{\tau})$ является T_1-пространством, в котором замкнутые окрестности каждой точки образуют локальную базу (в терминологии [14, гл. 4] $(\mathbf{H},\tilde{\tau})$ является T_3-пространством). Тогда

$$\varphi \in C\big(\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}),\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E],\mathbf{H},\tilde{\tau}\big). \tag{5.9}$$

Кроме того, полагаем в дальнейшем, что

$$\big(\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}),\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\big) \tag{5.10}$$

есть компактное ТП (это всегда так в случае, когда $\mathcal{L}$ — полуалгебра п/м E; в частности, данное условие выполнено при $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$, что соответствует ситуации, когда (5.10) — пространство Стоуна). Разумеется, в рассматриваемом случае ТП (5.10) — непустой нульмерный компакт. С учетом (5.9) и того очевидного свойства, что $\mathbf{r} = \varphi \circ \big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]$, получаем важное положение: набор $\big(\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}),\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E],\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot],\varphi\big)$ является (см. (2.16)) плотным компактификатором. Поэтому (см. (5.1))

$$\begin{aligned}(\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tilde{\tau};\mathbf{r};\mathcal{E}] &= \varphi^1\big((\mathbf{as})\big[E;\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L});\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E];\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot];\mathcal{E}\big]\big)\\ &= \varphi^1\Big(\bigcap_{\Sigma \in \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})} \mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\,\Sigma]\Big) = \varphi^1\big(\mathbf{F}_o^*(\mathcal{L}|\,\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E}))\big).\end{aligned} \tag{5.11}$$

Тогда имеем (см. разд. 4) следующее оценочное свойство:

$$(\mathrm{rem})[E;\mathbf{H};\tilde{\tau};\mathbf{r};\mathcal{E}] \subset \varphi^1\big((\mathrm{rem})\big[E;\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L});\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E];\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot];\mathcal{E}\big]\big), \tag{5.12}$$

при этом согласно (3.4) и (5.1) справедливо равенство

$$\begin{aligned}&(\mathrm{rem})\big[E;\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L});\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E];\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot];\mathcal{E}\big]\\ &= \mathbf{F}_o^*\big(\mathcal{L}|\,\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})\big)\setminus \mathrm{cl}\big(\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(E_o),\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\big) = \mathbf{F}_o^*\big(\mathcal{L}|\,\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})\big)\setminus \mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\,E_o],\end{aligned} \tag{5.13}$$

где (здесь и ниже)

$$E_o \triangleq \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma. \tag{5.14}$$

В связи с (5.13) и (5.14) напомним, что согласно (2.14) множество

$$\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\, E_o] = \mathrm{cl}\Big(\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(E_o), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\Big) = \mathrm{cl}\Big(\big\{\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[x] \colon x \in E_o\big\}, \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\Big)$$

характеризует точные решения при погружении в компакт (5.10). Заметим, что, как легко видеть, согласно (2.11), (2.12), (2.4) $\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\, E_o] \subset \mathbf{F}_o^*(\mathcal{L}|\, \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E}))$, причем в силу (5.12), (5.13) истинна импликация

$$\big((\mathrm{rem})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathcal{E}] \neq \varnothing\big) \Longrightarrow \Big(\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L}|\, E_o] \neq \mathbf{F}_o^*\big(\mathcal{L}|\, \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})\big)\Big).$$

Отметим, что, вообще говоря, возможен случай, когда $E_o = \varnothing$ и вместе с тем $\mathbb{F}_{o,\mathbf{t}}^*(\mathcal{L}) \cap \mathbf{F}_o^*\big(\mathcal{L}|\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})\big) \neq \varnothing$ (т. е. и при отсутствии точных решений вспомогательное МП (в пространстве у/ф) может содержать тривиальные у/ф).

П р и м е р. Пусть $E = [0,1[$, $\mathcal{L}$ есть семейство всех множеств $[a,b[$, $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$. Иными словами, $(E,\mathcal{L})$ — пространство-стрелка. Пусть, кроме того, $\mathcal{E}$ — семейство всех множеств $]0,\varepsilon]$, $\varepsilon \in]0,1/2]$. Тогда $\mathcal{E} = \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})$ и пересечение всех множеств из $\mathcal{E}$ пусто. Поэтому (см. (5.14)) $E_o = \varnothing$. Напомним, что в нашем случае

$$\mathbf{F}_o^*\big(\mathcal{L}|\, \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})\big) = \mathbf{F}_o^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}) = \big\{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}) \mid]0,\varepsilon] \cap U \neq \varnothing \;\; \forall \varepsilon \in]0,1/2] \;\; \forall U \in \mathcal{U}\big\}.$$

Семейство $\mathcal{L}$ является полуалгеброй п/м E; в частности, $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^o[E]$. Рассмотрим тривиальный у/ф $\mathfrak{U} \triangleq \big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[0]$, $\mathfrak{U} = \{L \in \mathcal{L} \mid 0 \in L\}$. Легко видеть, что $\mathfrak{U} = \{[0,\varepsilon[\colon \varepsilon \in]0,1]\}$. Как следствие, $]0,\varepsilon] \cap U \neq \varnothing \;\; \forall \varepsilon \in]0,1/2] \;\; \forall U \in \mathfrak{U}$. Получили включение $\mathfrak{U} \in \mathbf{F}_o^*\big(\mathcal{L}|\, \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})\big)$. Иными словами, в настоящем примере при $E_o = \varnothing$ имеем свойство

$$\mathbb{F}_{o,\mathbf{t}}^*(\mathcal{L}) \cap (\mathrm{as})[E; \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; \big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]; \mathcal{E}] \neq \varnothing.$$

Подчеркнем, что в данном примере все множества семейства $\mathcal{E}$ неизмеримы в смысле $(E,\mathcal{L})$, т. е. $\Sigma \notin \mathcal{L} \;\; \forall \Sigma \in \mathcal{E}$.

Отметим, однако, что, как показано в [17], в случаях, когда

$$(\mathcal{E} \subset \mathcal{L}) \vee (\mathcal{L} \in \pi_o'[E]), \tag{5.15}$$

истинна следующая импликация:

$$(E_o = \varnothing) \Longrightarrow \Big((\mathrm{as})[E; \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; \big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]; \mathcal{E}] \subset \mathbb{F}_{o,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L})\Big). \tag{5.16}$$

Вышеупомянутый пример показывает, что условия (5.15) существенны для истинности импликации (5.16).

Обсудим теперь конкретизацию процедуры факторизации разд. 4.

Напомним, что предполагается выполненным (4.6), а тогда $\varphi^1\big(\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})\big) = \mathbf{H}$. Итак, φ есть сюръекция $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})$ на $\mathbf{H}$ со свойством непрерывности (см. (5.9)). В виде

$$\mathfrak{D}[\mathcal{L}] \triangleq \big\{\varphi^{-1}(\{h\}) \colon h \in \mathbf{H}\big\} = \big\{\varphi^{-1}\big(\{\varphi(\mathcal{U})\}\big) \colon \mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})\big\} \tag{5.17}$$

имеем разбиение $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})$, все ячейки которого — непустые множества. Отношение эквивалентности, соответствующее (5.17), имеет следующий вид (сохраняем обозначение разд. 4): $\forall \mathcal{U}_1 \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}) \;\; \forall \mathcal{U}_2 \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}) \;\; (\mathcal{U}_1 \equiv \mathcal{U}_2) \Longleftrightarrow \big(\varphi(\mathcal{U}_1) = \varphi(\mathcal{U}_2)\big)$.

З а м е ч а н и е 5.1. Легко видеть, что при $\mathcal{U}_1 \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})$ и $\mathcal{U}_2 \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})$

$$(\mathcal{U}_1 \equiv \mathcal{U}_2) \Longleftrightarrow \big(\exists\, h \in \mathbf{H} \colon (\mathbf{r}^1[\mathcal{U}_1] \overset{\tilde{\tau}}{\Rightarrow} h) \,\&\, (\mathbf{r}^1[\mathcal{U}_2] \overset{\tilde{\tau}}{\Rightarrow} h)\big).$$

В самом деле, если $\mathcal{U}_1 \equiv \mathcal{U}_2$, то (см. разд. 4) $\mathbf{h} \stackrel{\triangle}{=} \varphi(\mathcal{U}_1) = \varphi(\mathcal{U}_2) \in \mathbf{H}$ обладает согласно (5.8) тем свойством, что $(\mathbf{r}^1[\mathcal{U}_1] \stackrel{\tilde{\tau}}{\Rightarrow} \mathbf{h})\,\&\,(\mathbf{r}^1[\mathcal{U}_2] \stackrel{\tilde{\tau}}{\Rightarrow} \mathbf{h})$. Итак, имеем импликацию

$$(\mathcal{U}_1 \equiv \mathcal{U}_2) \Longrightarrow \big(\exists\, h \in \mathbf{H}\colon (\mathbf{r}^1[\mathcal{U}_1] \stackrel{\tilde{\tau}}{\Rightarrow} h)\,\&\,(\mathbf{r}^1[\mathcal{U}_2] \stackrel{\tilde{\tau}}{\Rightarrow} h)\big). \tag{5.18}$$

Пусть, напротив, $\mathbf{r}^1[\mathcal{U}_1] \stackrel{\tilde{\tau}}{\Rightarrow} h_*$ и $\mathbf{r}^1[\mathcal{U}_2] \stackrel{\tilde{\tau}}{\Rightarrow} h_*$, где $h_* \in \mathbf{H}$. При этом согласно (5.3), (5.7) и (5.8) $h_* = \varphi(\mathcal{U}_1) = \varphi(\mathcal{U}_2)$, а потому $\mathcal{U}_1 \equiv \mathcal{U}_2$. Итак, импликация, противоположная (5.18), установлена.

Отметим, что при $\mathcal{L} \in \pi_0'[E]$ имеет место равенство $(\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] - \mathrm{isol})[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})] = \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{t}}(\mathcal{L})$. В более общем случае $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ имеем (см. [18, §6]), что при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ и $E_0 \in \mathcal{L}$ справедливо равенство $\Phi_{\mathcal{L}}(E_0) = (\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] - \mathrm{Int})[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}|\mathcal{E})]$ и, кроме того, $(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}|\mathcal{E}) = \Phi_{\mathcal{L}}(E_0)) \Longleftrightarrow ((\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] - \mathrm{Fr})[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}|\mathcal{E})] = \varnothing)$.

6. Один пример построения множества притяжения

В настоящем разделе дано одно естественное обобщение построений [19, предложение 2]. В этой связи совсем кратко напомним нужные конструкции [20], полагая в дальнейшем, что $E \stackrel{\triangle}{=} [a,b]$, где $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ и при этом $a < b$ (здесь $\mathbb{R}$ — вещественная прямая). Пусть $\mathcal{I} \stackrel{\triangle}{=} \{\Lambda \in \mathcal{P}(E) \mid \exists c \in E\ \exists d \in E\colon (]c,d[\subset \Lambda)\,\&\,(\Lambda \subset [c,d])\}$ (полуалгебра промежутков $\mathbb{R}$, содержащихся в E). Всюду в дальнейшем $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$ есть def алгебра п/м E, порожденная полуалгеброй $\mathcal{I}$. Структура $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$ в этом случае известна [20]: определяем (свободные) у/ф

$$\mathcal{U}^{(-)}_t \stackrel{\triangle}{=} \{L \in \mathcal{L} \mid \exists c \in [a,t[\colon [c,t[\subset L\} \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L}) \quad \forall t \in]a,b], \tag{6.1}$$

$$\mathcal{U}^{(+)}_t \stackrel{\triangle}{=} \{L \in \mathcal{L} \mid \exists c \in]t,b]\colon]t,c] \subset L\} \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L}) \quad \forall t \in [a,b[. \tag{6.2}$$

Тогда $\mathbb{J}_- \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U}^{(-)}_t\colon t \in]a,b]\}$ и $\mathbb{J}_+ \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U}^{(+)}_t\colon t \in [a,b[\}$ реализуют равенство $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) = \mathbb{J}_- \cup \mathbb{J}_+ \cup \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{t}}(\mathcal{L})$. При этом, конечно, $\mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L}) = \mathbb{J}_- \cup \mathbb{J}_+$.

Фиксируем произвольное семейство $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ (напомним, что в [19] предполагалось, что $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}$) и введем множества

$$\begin{gathered}(T_-[\mathcal{E}] \stackrel{\triangle}{=} \{\ t \in]a,b] \mid [c,t[\ \cap \Sigma \neq \varnothing\ \ \forall \Sigma \in \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})\ \ \forall c \in [a,t[\}) \\ \&\,(T_+[\mathcal{E}] \stackrel{\triangle}{=} \{\ t \in [a,b[\mid]t,c]\ \cap \Sigma \neq \varnothing\ \ \forall \Sigma \in \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})\ \ \forall c \in]t,b]\}).\end{gathered} \tag{6.3}$$

В терминах (6.3) определяем следующие два множества:

$$(\mathfrak{U}_-[\mathcal{L}|\mathcal{E}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U}^{(-)}_t\colon t \in T_-[\mathcal{E}]\} \in \mathcal{P}(\mathbb{J}_-))\,\&\,(\mathfrak{U}_+[\mathcal{L}|\mathcal{E}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U}^{(+)}_t\colon t \in T_+[\mathcal{E}]\} \in \mathcal{P}(\mathbb{J}_+)). \tag{6.4}$$

Предложение 6.1. *Справедливо равенство*

$$\mathbf{F}^*_0(\mathcal{L}|\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})) = \mathfrak{U}_-[\mathcal{L}|\mathcal{E}] \cup \mathfrak{U}_+[\mathcal{L}|\mathcal{E}] \cup \{((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult})[x]\colon x \in E_0\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (2.12) и (5.14) следует, что

$$\begin{gathered}\mathbf{F}^*_0(\mathcal{L}|\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})) = \mathbf{F}^*_0(\mathcal{L}|\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})) \cap \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \\ = (\mathbf{F}^*_0(\mathcal{L}|\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})) \cap \mathbb{J}_-) \cup (\mathbf{F}^*_0(\mathcal{L}|\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})) \cap \mathbb{J}_+) \cup (\mathbf{F}^*_0(\mathcal{L}|\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})) \cap \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{t}}(\mathcal{L})).\end{gathered} \tag{6.5}$$

При этом $\mathbf{F}^*_0(\mathcal{L}|\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})) \cap \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{t}}(\mathcal{L}) = \{((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult})[x]\colon x \in E_0\}$ (учитываем очевидное свойство $\mathcal{L} \in \pi_0'(\mathcal{L})$).

Пусть $\mathcal{V} \in \mathbf{F}^*_0(\mathcal{L}|\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})) \cap \mathbb{J}_-$. Тогда для некоторого $t_* \in]a,b]$ имеем $\mathcal{V} = \mathcal{U}^{(-)}_{t_*}$ и при этом $U \cap \Sigma \neq \varnothing\ \ \forall \Sigma \in \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})\ \ \forall U \in \mathcal{V}$. Тогда, в частности, имеем из (6.1), что $[c,t_*[\cap \Sigma \neq \varnothing\ \ \forall \Sigma \in$

$\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})$ $\forall c \in [a, t_*[$ (действительно, $[\tilde{c}, t_*[\in \mathcal{V}$ при $\tilde{c} \in [a, t_*[$). В силу (6.3) $t_* \in T_-[\mathcal{E}]$, а потому (см. (6.4)) $\mathcal{V} = \mathcal{U}_{t_*}^{(-)} \in \mathfrak{U}_-[\mathcal{L}|\mathcal{E}]$, чем и завершается проверка вложения

$$\mathbf{F}_0^*(\mathcal{L}|\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})) \cap \mathbb{J}_- \subset \mathfrak{U}_-[\mathcal{L}|\mathcal{E}]. \tag{6.6}$$

Пусть, напротив, $\mathcal{W} \in \mathfrak{U}_-[\mathcal{L}|\mathcal{E}]$. Тогда для некоторого $t^* \in T_-[\mathcal{E}]$ имеем равенство $\mathcal{W} = \mathcal{U}_{t^*}^{(-)}$, а, стало быть,

$$\mathcal{W} = \{L \in \mathcal{L} \mid \exists c \in [a, t^*[\colon [c, t^*[\subset L\}. \tag{6.7}$$

Заметим, что $\mathcal{W} \in \mathbb{J}_-$. Пусть $W \in \mathcal{W}$. Тогда $W \in \mathcal{L}$ и согласно (6.7) для некоторого $c^* \in [a, t^*[$ имеем вложение $[c^*, t^*[\subset W$, где согласно (6.3) $[c^*, t^*[\cap \Sigma \neq \varnothing$ $\forall \Sigma \in \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})$. В итоге $\Sigma \cap W \neq \varnothing$ $\forall \Sigma \in \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})$. Поскольку выбор W был произвольным, установлено (см. (2.12)), что $\mathcal{W} \in \mathbf{F}_0^*(\mathcal{L}|\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})) \cap \mathbb{J}_-$. Итак, вложение, противоположное (6.6), а стало быть, и равенство

$$\mathbf{F}_0^*(\mathcal{L}|\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})) \cap \mathbb{J}_- = \mathfrak{U}_-[\mathcal{L}|\mathcal{E}] \tag{6.8}$$

установлены. Аналогичным образом проверяется равенство

$$\mathbf{F}_0^*(\mathcal{L}|\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})) \cap \mathbb{J}_+ = \mathfrak{U}_+[\mathcal{L}|\mathcal{E}]. \tag{6.9}$$

С учетом (6.5), (6.8) и (6.9) получаем требуемое равенство $\mathbf{F}_0^*(\mathcal{L}|\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})) = \mathfrak{U}_-[\mathcal{L}|\mathcal{E}] \cup \mathfrak{U}_+[\mathcal{L}|\mathcal{E}] \cup \{((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult})[x] \colon x \in E_0\}$.

Предложение доказано.

Как и прежде, рассмотрим ТП $(\mathbf{H}, \tilde{\tau})$, $\mathbf{H} \neq \varnothing$, в качестве пространства результатов или оценок. Сначала предположим только, как и в разд. 4, что ТП $(\mathbf{H}, \tilde{\tau})$ хаусдорфово (T_2-пространство). Следуя построениям разд. 5, зафиксируем отображение $\mathbf{r}$ (5.7). Итак, $\mathbf{r}$ есть отображение невырожденного отрезка вещественной прямой в хаусдорфово ТП. Тогда определено отображение φ разд. 5, действующее из $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ в $\mathbf{H}$ по правилу (5.8). Следовательно, значения $\varphi(\mathcal{U})$ отображения φ определены при $\mathcal{U} \in \mathbb{J}_-$, $\mathcal{U} \in \mathbb{J}_+$ и $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{t}}^*(\mathcal{L})$. Более того, этими тремя вариантами исчерпывается описание φ. Напомним соответствующие конкретизации $\varphi(\mathcal{U})$, следуя [19, замечание 2].

Если $t \in]a, b]$, то $\varphi(\mathcal{U}_t^{(-)}) \in \mathbf{H}$ есть предел значений $\mathbf{r}$ слева в точке t, а, точнее,

$$\begin{gathered}(\forall S \in N_{\tilde{\tau}}(\varphi(\mathcal{U}_t^{(-)}))\ \exists \delta \in]0, \infty[\colon \mathbf{r}(\xi) \in S\ \forall \xi \in]t - \delta, t[\cap E) \\ \&\, (\forall \mathbf{h} \in \mathbf{H}\ (\forall S \in N_{\tilde{\tau}}(\mathbf{h})\ \exists \delta \in]0, \infty[\colon \mathbf{r}(\xi) \in S\ \forall \xi \in]t - \delta, t[\cap E) \Longrightarrow (\mathbf{h} = \varphi(\mathcal{U}_t^{(-)}))).\end{gathered} \tag{6.10}$$

Аналогичным образом при $t \in [a, b[$ имеем, что $\varphi(\mathcal{U}_t^{(+)}) \in \mathbf{H}$ есть предел значений $\mathbf{r}$ справа в точке t, т. е.

$$\begin{gathered}(\forall S \in N_{\tilde{\tau}}(\varphi(\mathcal{U}_t^{(+)}))\ \exists \delta \in]0, \infty[\colon \mathbf{r}(\xi) \in S\ \forall \xi \in]t, t + \delta[\cap E) \\ \&\, (\forall \mathbf{h} \in \mathbf{H}\ (\forall S \in N_{\tilde{\tau}}(\mathbf{h})\ \exists \delta \in]0, \infty[\colon \mathbf{r}(\xi) \in S\ \forall \xi \in]t, t + \delta[\cap E) \Longrightarrow (\mathbf{h} = \varphi(\mathcal{U}_t^{(+)}))).\end{gathered} \tag{6.11}$$

Итак, $\mathbf{r}$ обладает односторонними пределами в точках из $]a, b[$, пределом справа в точке a и пределом слева в точке b. Эти пределы как раз и указаны в (6.10), (6.11).

Потребуем теперь от $(\mathbf{H}, \tilde{\tau})$ несколько большего: пусть до конца раздела $(\mathbf{H}, \tilde{\tau})$ есть регулярное ТП, т. е. T_1- и T_3-пространство одновременно. Тогда имеем (5.9) и, как следствие, (5.11). Последнее означает (см. предложение 6.1), что справедлива следующая теорема.

Теорема 6.1. *Если $(\mathbf{H}, \tilde{\tau})$ — регулярное ТП, то основное МП имеет вид*

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathcal{E}] = \{\varphi(\mathcal{U}_t^{(-)}) \colon t \in T_-[\mathcal{E}]\} \cup \{\varphi(\mathcal{U}_t^{(+)}) \colon t \in T_+[\mathcal{E}]\} \cup \mathbf{r}^1(E_0). \tag{6.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о получается комбинацией (6.4) и предложения 6.1 с учетом (5.1), (5.11) и простейших свойств операции взятия образа (образ объединения множеств равен объединению образов).

Смысл (6.12) состоит в указании конкретного способа построения основного МП из односторонних $\tilde{\tau}$-пределов значений $\mathbf{r}$ и самих значений $\mathbf{r}$: требуется построить множество Φ_- всех пределов слева отображения $\mathbf{r}$ в точках из $T_-[\mathcal{E}]$, множество Φ_+ всех пределов справа того же отображения $\mathbf{r}$ в точках из $T_+[\mathcal{E}]$ и образ множества E_0 при действии $\mathbf{r}$. Тогда $\Phi_- \cup \Phi_+ \cup \mathbf{r}^1(E_0)$ и будет искомым МП (6.12). Таким образом, теорема 6.1 доставляет упомянутое МП в терминах исходных данных, а именно в терминах отображения $\mathbf{r}$ и семейства $\mathcal{E}$.

З а м е ч а н и е 6.1. Если семейство $\mathcal{E}$ направлено, т. е. $\forall \Sigma_1 \in \mathcal{E}\ \forall \Sigma_2 \in \mathcal{E}\ \exists \Sigma_3 \in \mathcal{E} : \Sigma_3 \subset \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, то $T_-[\mathcal{E}] = \{t \in]a,b] \mid [c,t[\cap \Sigma \neq \varnothing\ \forall \Sigma \in \mathcal{E}\ \forall c \in [a,t[\}$ и $T_+[\mathcal{E}] = \{t \in [a,b[|]t,c] \cap \Sigma \neq \varnothing\ \forall \Sigma \in \mathcal{E}\ \forall c \in]t,b]\}$. Это свойство вытекает из [21, (3.3.16)]. Построение множеств $T_-[\mathcal{E}]$ и $T_+[\mathcal{E}]$ упрощается, что приводит к более простому представлению основного МП в (6.12).

З а м е ч а н и е 6.2. С учетом положений [19, с. 150] заметим, что условие (5.7) охватывает (см. [9; 16]) обширный класс отображений. В частности, в качестве $\mathbf{r}$ может использоваться ярусное покомпонентно отображение из E в тихоновскую степень ТП, метризуемого полной метрикой. Так, например, в качестве $(\mathbf{H}, \tilde{\tau})$ можно рассматривать тихоновскую степень вещественной прямой $\mathbb{R}$ в обычной $|\cdot|$-топологии и использовать в качестве $\mathbf{r}$ отображение, имеющее своими компонентами функции из $B(E, \mathcal{L})$ (см. [13; 16]), где $B(E, \mathcal{L})$ есть вариант пространства $B(S, \Sigma)$ в [22, гл. IV].

З а м е ч а н и е 6.3. Представления, подобные (6.10) и (6.11), использовались в [23; 24] в сочетании с процедурами, связанными с применением конечно-аддитивных мер при построении расширений [13; 21] задач управления линейными системами с разрывностью в коэффициентах при управляющих воздействиях. Исследовался режим “узких” импульсов, при котором требуется израсходовать запас топлива за промежуток времени, имеющий исчезающе малую длительность. Допускались также ограничения моментного характера (имеются в виду естественные аналогии с [24], где рассматриваемая задача имела вероятностную интерпретацию), соблюдаемые приближенно. В основе построений [23; 24] находятся конструкции в духе (6.1) и (6.2), восходящие к [20]. Подчеркнем тот факт, что в [23; 24] получены весьма конкретные представления МП. Следовательно (см. также теорему 6.1 и замечание 6.1), наряду с абстрактными представлениями, расширения в классе у/ф или с применением у/ф могут в ряде случаев приводить и к достаточно обозримым результатам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
2. **Гамкрелидзе Р. В.** Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1977. 254 с.
3. **Красовский Н. Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
4. **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
5. **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Альтернатива для игровой задачи сближения // Прикл. математика и механика. 1970. Т. 34, № 6. С. 1005–1022.
6. **Кряжимский А. В.** К теории позиционных дифференциальных игр сближения-уклонения // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239, № 4. С. 779–782.
7. **Булинский А. В., Ширяев А. Н.** Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 402 с.
8. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
9. **Ченцов А. Г.** Множества притяжения в абстрактных задачах о достижимости: эквивалентные представления и основные свойства // Изв. вузов. Математика. 2013. № 11. С. 33–50.
10. **Ченцов А. Г.** Некоторые свойства ультрафильтров, связанные с конструкциями расширений // Вестн. Удмурт. ун-та. 2014. Вып. 1. С. 87–101. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
11. **Бурбаки Н.** Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968. 272 с.

12. **Ченцов А. Г.** Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения // Вестн. Удмурт. ун-та. 2011. Вып. 1. С. 113–142. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
13. **Chentsov A. G., Morina S.I.** Extensions and relaxations. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 2002. 408 p.
14. **Келли Дж. Л.** Общая топология. М.: Наука, 1968. 384 с.
15. **Александров П. С.** Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Едиториал УРСС, 2004. 368 с.
16. **Ченцов А. Г.** Ярусные отображения и преобразования на основе ультрафильтров // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 298–314.
17. **Ченцов А.Г.** Абстрактная задача о достижимости: "чисто асимптотическая" версия // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 2. С. 289–305.
18. **Ченцов А. Г.** К вопросу о соблюдении ограничений в классе обобщенных элементов // Вестн. Удмурт. ун-та. 2014. Вып. 3. С. 90–109. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
19. **Ченцов А. Г.** К вопросу о структуре множеств притяжения в топологическом пространстве // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. ун-та. 2012. Вып. 1(39). С. 147–150.
20. **Ченцов А. Г.** Об одном примере представления пространства ультрафильтров алгебры множеств // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 293–311.
21. **Chentsov A. G.** Asymptotic attainability. Dordrecht;Boston;London: Kluwer Acad. Publ., 1997. 322 p.
22. **Данфорд Н., Шварц Дж. Т.** Линейные операторы. Общая теория. Изд-во иностр. лит., 1962. 895 с.
23. **Ченцов А. Г., Бакланов А. П.** К вопросу о построении множества достижимости при ограничениях асимптотического характера // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 309–323.
24. **Ченцов А. Г., Бакланов А. П.** Об одной задаче, связанной с асимптотической достижимостью в среднем // Докл. РАН. 2014. Т. 459, № 6. С. 672–676.

Поступила 12.10.15
Исправленный вариант 12.01.16

Ченцов Александр Георгиевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
чл.-корр. РАН
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: chentsov@imm.uran.ru