

УДК 517.977

**ПОСТРОЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ КРИВЫХ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТИПА ЭЙКОНАЛА В УСЛОВИЯХ РАЗРЫВА КРИВИЗНЫ ГРАНИЦЫ КРАЕВОГО МНОЖЕСТВА<sup>1</sup>****А. А. Успенский, П. Д. Лебедев**

Исследуется проблема возникновения сингулярностей у обобщенных решений краевой задачи Дирихле для уравнений в частных производных первого порядка типа эйконала. Предметом изучения являются псевдовершины краевого множества. Отыскание псевдовершин является элементом процедуры построения ветвей сингулярного множества. Получены необходимые условия существования псевдовершин при ослабленных предположениях на гладкость границы невыпуклого краевого множества. Изучена ситуация, когда граница имеет гладкость первого порядка, при этом производные второго порядка координатных функций терпят разрывы. Необходимые условия выписаны в терминах стационарности координатных функций, а также с помощью односторонних кривизн.

Ключевые слова: уравнение в частных производных первого порядка, минимаксное решение, волновой фронт, диффеоморфизм, эйконал, кривизна, функция оптимального результата, сингулярное множество, симметрия.

A. A. Uspenskii, P. D. Lebedev. The construction of singular curves for generalized solutions of eikonal-type equations with a curvature break in the boundary of the boundary set.

The problem of singularities appearing in generalized solutions of the boundary value Dirichlet problem for eikonal-type first-order partial differential equations is considered. The object of study is the pseudovertices of the boundary set. Finding the pseudovertices is an element of the procedure for constructing branches of the singular set. Necessary conditions of pseudovertex existence are obtained under weakened assumptions on the smoothness of the boundary of a nonconvex boundary set. The situation of the first-order smoothness of the boundary and breaks of the second-order derivatives is studied. The necessary conditions are written in terms of the stationarity of coordinate functions and with the use of one-sided curvatures.

Keywords: first-order PDE, minimax solution, wavefront, diffeomorphism, eikonal, curvature, optimal result function, singular set, symmetry.

**Введение**

Краевые задачи для уравнений в частных производных первого порядка встречаются в различных отраслях знания, в частности в механике, геометрической оптике, акустике, сейсмологии, теории оптимального управления, дифференциальных играх, экономике. Гладкость краевых условий в задаче Коши или в задаче Дирихле в общем случае не влечет гладкость решения уравнения такого типа на всей области рассмотрения в пространстве переменных. Возникает необходимость и потребность в построении нелокальной теории обобщенных решений уравнений в частных производных первого порядка. Известны различные подходы к определению обобщенных решений уравнений. Среди них выделим концепцию С. Н. Кружкова [1], базирующийся на конструкциях теории позиционных дифференциальных игр [2] минимаксный подход А. И. Субботина [3], концепцию вязкостного решения П. Лионса [4], а также подход к определению решения на основе конструкций идемпотентного анализа [5].

В настоящей работе изучается проблема возникновения негладкости у функции оптимального результата в плоской задаче о быстродействии для случая круговой индикатрисы. Особенности геометрии вектограммы скоростей предоставляют возможность для углубленного анализа свойств решения задачи даже при условии невыпуклости целевого множества, имеющего при этом низкий порядок гладкости границы. В рассматриваемом случае граница цели

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 15-11-10018).

дифференцируема. При этом предполагается наличие граничных точек, в которых координатные функции терпят разрыв по производной второго порядка, т. е. изучается случай, когда классическая кривизна кривой, ограничивающей краевое множество, вообще говоря, не существует. У решения задачи возникают сингулярные множества, на которых функция, будучи непрерывной, тем не менее терпит разрыв градиента. При формировании решения требуется выявлять и строить такие множества.

Основной результат исследования состоит в получении необходимых условий для псевдовершин целевого множества в случае ослабленных с точки зрения гладкости условий, налагаемых на его границу. Псевдовершины являются особыми точками границы краевого множества и необходимы при конструировании ветвей сингулярного множества функции оптимального результата. Результаты исследования иллюстрируются на примере.

### 1. Объект исследования

Рассматривается краевая задача Дирихле

$$\min_{\nu: \|\nu\| \leq 1} \left( \nu_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \nu_2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 1 = 0, \tag{1.1}$$

$$u|_{\Gamma} = 0. \tag{1.2}$$

Здесь  $\|\nu\| = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$  — норма вектора  $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ . Краевое условие (1.2) определено на границе  $\Gamma = \partial M$  замкнутого множества  $M \subset \mathbb{R}^2$ . Предполагается, что  $\Gamma$  не имеет точек самопересечения. Свойства границы  $\Gamma$  будут оговорены ниже при обосновании утверждений.

Минимаксное решение задачи (1.1), (1.2) есть функция  $u(x, y) = \rho((x, y), M)$  (см. [6]), где  $\rho(\mathbf{x}, M) = \min_{\mathbf{m} \in M} \|\mathbf{m} - \mathbf{x}\|$  — евклидово расстояние от точки  $\mathbf{x}$  до множества  $M$ . Оно является функцией оптимального результата в соответствующей задаче о быстродействии с динамикой

$$\begin{cases} \dot{x} = \nu_1, \\ \dot{y} = \nu_2, \end{cases}$$

где управление  $\nu = (\nu_1, \nu_2)$  стеснено ограничением  $\|\nu\| \leq 1$ .

В работе [1] введено главное (фундаментальное) решение  $u_k = u_k(x, y)$  краевой задачи Дирихле для уравнения в частных производных первого порядка типа эйконала. В частном случае для изотропной среды фундаментальное решение краевой задачи

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = 1, \tag{1.3}$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \tag{1.4}$$

имеет вид  $u_k(x, y) = -\rho((x, y), M)$ . Здесь краевое условие то же, что и в задаче (1.1), (1.2). Карта линий уровня фундаментального решения задачи (1.3), (1.4), т. е. совокупность волновых фронтов, и карта линий уровня минимаксного решения задачи (1.1), (1.2) совпадают. С этой точки зрения нахождение решения задачи (1.1), (1.2) равносильно построению решения задачи (1.3), (1.4). Характер эволюции волновых фронтов определяется геометрией краевого множества и дифференциальными свойствами его границы. Невыпуклость краевого множества влечет наличие у решения задачи сингулярности, которая в данном случае относится к множествам симметрии [7]. В достаточно общем случае сингулярное множество является объединением нуль- и одномерных многообразий. Построение сингулярного множества в аналитическом виде или же формирование его аппроксимации с помощью числительных алгоритмов облегчает построение решения краевой задачи в целом. При этом одна из ключевых ролей отводится псевдовершинам — точкам на границе краевого множества, которые определяют

одномерные сингулярные ветви [8] множества симметрии. Существует аналитическая взаимосвязь между псевдовершинами краевого множества и крайними точками сингулярных кривых [9; 10]. Ниже обоснуем необходимые условия существования псевдовершин для случая гладкой параметризованной границы краевого множества в условиях, допускающих невыпуклость множества и разрыв кривизны. Полученный результат следует рассматривать как усиление и обобщение результата [11].

## 2. Определения, основные понятия

Пусть  $\gamma: T \rightarrow \mathbb{R}^2$  — отображение числового интервала  $T = (\hat{t}, \check{t})$  на плоскость. Вектор-функция  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  является гладкой в том смысле, что ее производные  $\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t))$  существуют и непрерывны. Образ  $\Gamma = \gamma(t)$  этого отображения представляет собою плоскую кривую. Полагаем, что  $\Gamma$  является регулярной, т. е. вектор скорости  $\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t))$  не обращается в нуль-вектор. Будем считать, что кривая  $\Gamma$  не имеет точек самопересечения, т. е. не существует двух моментов  $t_*, t_{**}, t_* \neq t_{**}$ , что  $\gamma(t_*) = \gamma(t_{**})$ . Включим также в рассмотрение кривые, заданные на конечных интервалах  $T = (\hat{t}, \check{t})$ ,  $-\infty < \hat{t} < \check{t} < +\infty$ , допускающие доопределение в конечных точках  $t = \hat{t}$  и  $t = \check{t}$ . Кривые вида  $\Gamma = \gamma(t)$ , когда  $T = [\hat{t}, \check{t}]$ ,  $\gamma(\hat{t}) = \gamma(\check{t})$ , будем называть контурами.

Напомним необходимые для изложения результатов определения (подробно см. [11]).

Рассмотрим уравнение вида  $G(t_1, t_2) = 0$ ,  $G(t_1, t_2)$  — функция двух переменных  $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ . Решения этого уравнения будем искать на прямоугольных открытых областях  $\Pi_-(t_0) = \{(t_1, t_2): t_1 \in (t_0 - \delta_1, t_0), t_2 \in (t_0, t_0 + \delta_2)\}$ . Здесь фиксированы точка  $t_0$ , параметры малости  $\delta_1 > 0$ ,  $\delta_2 > 0$ . Под решениями уравнения понимаются локальные диффеоморфизмы [7]. Диффеоморфизм — скалярная непрерывно дифференцируемая строго монотонная без нулей производной функция. Локальный диффеоморфизм определен в малом — в окрестности или же в полукрестности точки рассмотрения.

**О п р е д е л е н и е 1.** Будем говорить, что локальный диффеоморфизм  $t_2 = t_2(t_1)$ , определенный уравнением  $G(t_1, t_2) = 0$ , непрерывен слева в точке  $t_1 = t_0$  и отображает левую полукрестность точки  $t_1 = t_0$  в ее правую полукрестность, если выполняются условия

$$(A1) \quad t_2((t_0 - \delta_1, t_0)) = (t_0, t_0 + \delta_2), \quad \delta_1 > 0, \quad \delta_2 > 0,$$

$$(A2) \quad \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} t_2(t_1) = t_0.$$

Выберем произвольно и зафиксируем два момента:  $t_1 \in T$  и  $t_2 \in T$ ,  $t_1 < t_2$ . Проведем через точки  $\gamma(t_1)$  и  $\gamma(t_2)$  касательные прямые.

**О п р е д е л е н и е 2.** Псевдовершиной кривой  $\Gamma$  будем называть точку

$$(x_0, y_0) \triangleq \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} (\bar{x}_*, \bar{y}_*),$$

где  $(\bar{x}_*, \bar{y}_*) = (\bar{x}_*(t_1), \bar{y}_*(t_1)) = (x_*(t_1, t_2(t_1)), y_*(t_1, t_2(t_1)))$  — однопараметрическое подмножество решений  $(x_*, y_*) = (x_*(t_1, t_2), y_*(t_1, t_2))$  системы уравнений

$$\begin{cases} (x - \gamma_1(t_1))\gamma'_2(t_1) = (y - \gamma_2(t_1))\gamma'_1(t_1), \\ (x - \gamma_1(t_2))\gamma'_2(t_2) = (y - \gamma_2(t_2))\gamma'_1(t_2), \end{cases} \quad (2.1)$$

определяемое непрерывным слева в точке  $t_1 = t_0$  локальным диффеоморфизмом  $t_2 = t_2(t_1)$  левой полукрестности точки  $t_1 = t_0$  на ее правую полукрестность, который задается уравнением

$$G(t_1, t_2) = 0. \quad (2.2)$$

Здесь

- 1)  $(x_*, y_*)$  — точка пересечения касательных к кривой  $\Gamma$  в точках  $\gamma(t_1)$  и  $\gamma(t_2)$ ,

2)  $G(t_1, t_2) = \rho^2(\gamma(t_1), (x_*, y_*)) - \rho^2(\gamma(t_2), (x_*, y_*))$  — разность квадратов расстояний между указанными точками  $\gamma(t_1)$  и  $\gamma(t_2)$  кривой  $\Gamma$  и точкой  $(x_*, y_*)$  пересечения касательных, проведенных через  $\gamma(t_1)$  и  $\gamma(t_2)$ .

Корректность введенного определения псевдовершины показана в [6; 8].

Ветвь  $L(x_0, y_0)$  сингулярного множества  $L$  строится с помощью сопряженной к (2.1) системы уравнений [11].

### 3. Лемма о предельных значениях производной локального диффеоморфизма

Обоснуем вспомогательное утверждение, которое будем использовать при доказательстве основного результата исследования. Пусть  $a(t) = (a_1(t), a_2(t))$ ,  $b(t) = (b_1(t), b_2(t))$  — дифференцируемые вектор-функции скалярного аргумента  $t \in T = (\hat{t}, \hat{t})$ . Обозначим  $\det(a(t_1), b(t_2))$  — определитель матрицы  $\begin{pmatrix} a_1(t_1) & a_2(t_1) \\ b_1(t_2) & b_2(t_2) \end{pmatrix}$ , построенный на векторах  $a(t_1)$  и  $b(t_2)$ ,  $t_1 \in T$ ,  $t_2 \in T$ . Если  $a(t) = (a_1(t), a_2(t))$  вектор-функция скалярного аргумента, то

$$a'_{i,-} = \lim_{t \rightarrow t_0-0} \frac{a_i(t) - a_i(t_0)}{t - t_0}, \quad a'_{i,+} = \lim_{t \rightarrow t_0+0} \frac{a_i(t) - a_i(t_0)}{t - t_0},$$

— односторонние производные в точке  $t = t_0$  слева и справа соответственно ее координатных функций,  $i = 1, 2$ , а  $a'_-(t_0) = (a'_{1,-}(t_0), a'_{2,-}(t_0))$  и  $a'_+(t_0) = (a'_{1,+}(t_0), a'_{2,+}(t_0))$  — соответствующие односторонние касательные векторы. Аналогичные символы будем использовать для обозначения односторонних производных второго порядка.

Далее уточним дифференциальные свойства регулярной кривой  $\Gamma$ , ограничивающей краевое множество. Будем полагать, что производная второго порядка  $\gamma''(t) = (\gamma''_1(t), \gamma''_2(t))$  существует при всех значениях аргумента  $t \in T$ , кроме конечного числа точек. А именно имеется конечная совокупность  $T = \{t_*\}$ , состоящая из точек  $t_*$ , в которых существуют конечные односторонние производные второго порядка  $\gamma''_-(t_*)$  и  $\gamma''_+(t_*)$ , при этом  $\gamma''_-(t_*) \neq \gamma''_+(t_*)$ . Будем также полагать, что выполняется следующее условие.

**Условие А.** Определители  $\det(\gamma'(t), \gamma''_-(t))$  и  $\det(\gamma'(t), \gamma''_+(t))$  имеют один и тот же знак (в нестрогом смысле) для всех  $t_* \in T$ .

Напомним, что кривизна кривой  $\Gamma$  в точке  $\gamma(t)$  определяется формулой  $\kappa(\gamma(t)) = \det(\gamma'(t), \gamma''(t)) / \|\gamma'(t)\|^3$  [12]. Условие А означает, что односторонние кривизны  $\kappa_-(\gamma(t)) = \det(\gamma'(t), \gamma''_-(t)) / \|\gamma'(t)\|^3$  и  $\kappa_+(\gamma(t)) = \det(\gamma'(t), \gamma''_+(t)) / \|\gamma'(t)\|^3$  не меняют знак в точке разрыва производной второго порядка. Стало быть, дуга регулярной кривой, содержащая  $\gamma(t_*)$ ,  $t_* \in T$ , в качестве внутренней точки, является локально выпуклой.

Удобства ради множества кривых  $\Gamma$  с означенными дифференциальными свойствами и условием А, налагаемым на точки разрыва кривизны, обозначим  $\{\Gamma\}_T$ .

В дальнейшем потребуются обобщение ранее полученного результата [8].

**Лемма.** Если  $\gamma(t_0) = (\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0))$  — псевдовершина плоской кривой  $\Gamma \in \{\Gamma\}_T$ ,  $t_2 = t_2(t_1)$  — локальный диффеоморфизм, определяемый уравнением (2.2), причем  $\lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \frac{dt_2}{dt_1}(t_1) = c$ , то предельное значение  $c$  равно 0 либо  $-\infty$ .

**Доказательство.** По условию  $\Gamma$  является регулярной кривой. Пусть для определенности  $\gamma'_1(t_0) \neq 0$ . Тогда в силу классических теорем математического анализа в некоторой окрестности  $O(t_0) = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ ,  $\delta > 0$ , точки  $t = t_0$  дуга кривой является графиком скалярной функции  $y = f(x)$  такой, что  $x_0 = \gamma_1(t_0)$ ,  $f(x_0) = \gamma_2(t_0)$ . В этом случае на кривую переносятся результаты, справедливые для графиков скалярных функций [8]. Воспользуемся ранее доказанной теоремой о спектральных свойствах производной локального диффеоморфизма для случая графика  $\Gamma = \text{gr } f$  функции  $y = f(x)$ ,  $x \in X$ ,  $X \subseteq \mathbb{R}$  [9]. Под спектром здесь

понимается множество возможных значений односторонних производных локальных диффеоморфизмов, определяющих псевдовершины. Спектр совпадает с отрицательной полупрямой  $(-\infty, 0]$ . Согласно этой теореме выполняется равенство (см. [9, с. 179])  $c = \frac{cf_+''(x_0)}{f_-''(x_0)}$  для случая, когда псевдовершина  $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$  принадлежит гладкому графику  $\Gamma = \text{gr } f$  при условии, что односторонние производные второго порядка  $f_-''(x_0)$  и  $f_+''(x_0)$  существуют, конечны, но при этом  $f_-''(x_0) \neq f_+''(x_0)$ . Оно получено из условий трансверсальности ветвей решения нелинейного уравнения  $G(x_1, x_2) = 0$  с помощью (громоздких) аппроксимативных преобразований и представляет собой равенство пределов. Из него следует тривиальный факт, что  $c = 0$ , если  $f_-''(x_0) \neq 0$ . Из него же вытекает, что предел принимает несобственное значение  $c = -\infty$ , если  $f_-''(x_0) = 0$  и отношение  $f_+''(x)/f_-''(x)$  неотрицательно в точках  $x$  из окрестности  $x_0$ . В рассматриваемом случае в силу условия А в окрестности точки  $x = x_0$  функция  $y = f(x)$  выпукла либо же вогнута. В каждой из этих ситуаций отношение односторонних производных второго порядка  $f_-''(x)$  и  $f_+''(x)$ , вычисленных в точках из окрестности  $x = x_0$ , как раз неотрицательно.  $\square$

**З а м е ч а н и е.** Лемма выражает одно из многочисленных проявлений симметрии, присущей изучаемой математической модели. Здесь если для исходного локального диффеоморфизма  $t_2 = t_2(t_1)$  выполняется предельное равенство  $\lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \frac{dt_2}{dt_1}(t_1) = 0$ , то для обратного локального диффеоморфизма  $t_1 = t_1(t_2)$  в соответствии с классическими результатами анализа

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_0+0} \frac{dt_1}{dt_2}(t_2) = \left( \lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \frac{dt_2}{dt_1}(t_1) \right)^{-1} = -\infty.$$

И наоборот, если  $\lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \frac{dt_2}{dt_1}(t_1) = -\infty$ , то

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_0+0} \frac{dt_1}{dt_2}(t_2) = \left( \lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \frac{dt_2}{dt_1}(t_1) \right)^{-1} = 0.$$

С точки зрения геометрии эти пределы выражают ортогональную склейку графиков исходного диффеоморфизма и ему обратного диффеоморфизма (подробнее см. [9]). Рассматриваемый случай разрыва кривой по производной второго порядка является в некотором смысле пограничным для гладких кривых. Пограничность этого случая выражается в том, что предельное значение производной локального диффеоморфизма принимает одно из двух крайних (пограничных) значений спектра — либо 0, либо  $-\infty$ .

#### 4. Теорема о необходимых условиях второго порядка

В этом разделе обоснуем необходимые условия для псевдовершин в классе кривых, имеющих разрывы координатных функций по производным второго порядка. При доказательстве будем использовать локальные разложения скалярных функций вблизи точки  $t = t_0$  по формуле Тейлора, технику струй. Пусть  $k$  — натуральное число. Следуя [13], под  $k$ -струей достаточно число раз дифференцируемой функции  $f(t)$ ,  $t \in T$ , будем понимать многочлен Тейлора  $k$ -го порядка

$$J_{t,t_0}^k f(\delta) = \sum_{i=0}^k \frac{f^{(i)}(t_0)}{i!} \delta^i, \quad \delta = t - t_0.$$

Пусть  $f(t)$  и  $g(t)$  — дифференцируемые функции. Сумма  $k$ -струй этих функций находится как сумма соответствующих многочленов Тейлора. Произведение  $k$ -струй определяется по следующему правилу. Если

$$J_{t,t_0}^k f(\delta_1) = \sum_{i=0}^k \frac{f^{(i)}(t_0)}{i!} \delta_1^i, \quad \delta_1 = t - t_0, \quad J_{\tau,t_0}^k g(\delta_2) = \sum_{i=0}^k \frac{g^{(i)}(t_0)}{i!} \delta_2^i, \quad \delta_2 = \tau - t_0,$$

—  $k$ -струи функций  $f(t)$  и  $g(t)$  соответственно, то их произведением  $J_{t,t_0}^k f(\delta_1) \otimes J_{\tau,t_0}^k g(\delta_2)$  называется многочлен, получаемый почленным умножением многочленов  $J_{t,t_0}^k f(\delta_1)$  и  $J_{\tau,t_0}^k g(\delta_2)$ , в котором отброшены все члены степени выше  $k$ . Учитывая трехточечность рассматриваемой модели, будем различать струи, получаемые дифференцированием “назад”, т. е. когда  $t_0 < t = t_2$ , и струи, получаемые дифференцированием “вперед”, т. е. когда  $t_0 > t = t_1$ . Примем обозначения  $\Delta_1 = t_0 - t_1 > 0$ ,  $\Delta_2 = t_2 - t_0 > 0$ ,  $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ .

**Теорема** (О необходимых условиях второго порядка). *Если  $\gamma(t_0) = (\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0))$  — псевдовершина плоской регулярной кривой  $\Gamma \in \{\Gamma\}_T$  в краевой задаче (1.1), (1.2),  $t_0 \in T$ , то в указанной точке выполняется одно из условий:*

$$\gamma'_1(t_0) \neq 0, \quad \gamma'_2(t_0) = 0, \quad (4.1)$$

$$\kappa_-(\gamma(t_0)) = 2 \frac{(\gamma'_1(t_0))^2}{\|\gamma'(t_0)\|^3} \lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \left( \frac{\gamma_2(t_2(t_1)) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2(t_1)) - \gamma_1(t_1)} \right)' = 2 \frac{(\gamma'_2(t_0))^2}{\|\gamma'(t_0)\|^3} \lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \left( \frac{\gamma_1(t_2(t_1)) - \gamma_1(t_1)}{\gamma_2(t_2(t_1)) - \gamma_2(t_1)} \right)',$$

если

$$\gamma'_1(t_0) \neq 0, \quad \gamma'_2(t_0) \neq 0, \quad \lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \frac{dt_2}{dt_1}(t_1) = 0, \quad (4.2)$$

$$\gamma'_2(t_0) \neq 0, \quad \gamma'_1(t_0) = 0, \quad (4.3)$$

$$\kappa_+(\gamma(t_0)) = 2 \frac{(\gamma'_1(t_0))^2}{\|\gamma'(t_0)\|^3} \lim_{t_2 \rightarrow t_0+0} \left( \frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1(t_2))}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1(t_2))} \right)' = 2 \frac{(\gamma'_2(t_0))^2}{\|\gamma'(t_0)\|^3} \lim_{t_2 \rightarrow t_0+0} \left( \frac{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1(t_2))}{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1(t_2))} \right)',$$

если

$$\gamma'_1(t_0) \neq 0, \quad \gamma'_2(t_0) \neq 0, \quad \lim_{t_2 \rightarrow t_0+0} \frac{dt_1}{dt_2}(t_2) = 0. \quad (4.4)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** По определению псевдовершины

$$(x_0, y_0) = \lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} (\bar{x}_*, \bar{y}_*),$$

где  $(\bar{x}_*, \bar{y}_*) = (\bar{x}_*(t_1), \bar{y}_*(t_1))$  — однопараметрическое подмножество решений системы (2.1), определяемое локальным диффеоморфизмом  $t_2 = t_2(t_1)$ , являющимся решением уравнения (2.2). Кривая регулярная. Пусть для определенности  $\gamma'_1(t_0) \neq 0$ . Тогда в некоторой окрестности  $t = t_0$  приращение  $\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1) \neq 0$  и производные  $\gamma'_1(t_2) \neq 0$ ,  $\gamma'_1(t_1) \neq 0$ . В этом случае уравнение (2.2) допускает эквивалентное представление

$$2(\gamma_2(t_1) - \gamma_2(t_2))(\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)) + \left( \frac{\gamma'_2(t_1)}{\gamma'_1(t_1)} + \frac{\gamma'_2(t_2)}{\gamma'_1(t_2)} \right) (\gamma_1(t_1) - \gamma_1(t_2))^2 - 2 \frac{\gamma'_2(t_1)\gamma'_2(t_2)}{\gamma'_1(t_1)\gamma'_1(t_2)} (\gamma_1(t_1) - \gamma_1(t_2))(\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)) - \left( \frac{\gamma'_2(t_1)}{\gamma'_1(t_1)} + \frac{\gamma'_2(t_2)}{\gamma'_1(t_2)} \right) (\gamma_2(t_1) - \gamma_2(t_2))^2 = 0. \quad (4.5)$$

Возможны два случая.

**С л у ч а й 1)**  $\left( \frac{\gamma'_2(t_1)}{\gamma'_1(t_1)} + \frac{\gamma'_2(t_2)}{\gamma'_1(t_2)} \right) = 0$ . **С л у ч а й 2)**  $\left( \frac{\gamma'_2(t_1)}{\gamma'_1(t_1)} + \frac{\gamma'_2(t_2)}{\gamma'_1(t_2)} \right) \neq 0$ .

Пусть реализовался случай 1). Повторяя рассуждения, приведенные в работе [11], нетрудно показать выполнение условий (4.1).

Пусть теперь реализовался случай 2). После алгебраических преобразований уравнение (4.5) принимает вид

$$\left( \frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)} \right)^2 + 2 \frac{\gamma'_1(t_1)\gamma'_1(t_2) - \gamma'_2(t_1)\gamma'_2(t_2)}{\gamma'_2(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_2)\gamma'_1(t_1)} \cdot \frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)} - 1 = 0.$$

Примем обозначения:

$$\lambda = \lambda(t_1, t_2) \triangleq \frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)}, \quad \mu = \mu(t_1, t_2) \triangleq \frac{\gamma'_1(t_1)\gamma'_1(t_2) - \gamma'_2(t_1)\gamma'_2(t_2)}{\gamma'_2(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_2)\gamma'_1(t_1)}.$$

Уравнение, выписанное относительно  $\lambda$ , является квадратичным:

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda - 1 = 0,$$

близко к уравнению гармонической пропорции [14] и имеет два действительных решения разного знака:

$$\lambda_- = -\mu - \sqrt{\mu^2 + 1} < 0, \quad \lambda_+ = -\mu + \sqrt{\mu^2 + 1} > 0.$$

Стало быть,  $\lambda^2 + 2\mu\lambda - 1 = (\lambda - \lambda_-)(\lambda - \lambda_+)$ .

Далее докажем, что точка  $t_1 = t_0$  является корнем второго сомножителя в разложении, т.е. указанная точка есть решение уравнения

$$\frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)} + \mu(t_1, t_2) - \sqrt{(\mu(t_1, t_2))^2 + 1} = 0, \quad (4.6)$$

когда переменные связаны в силу диффеоморфизма  $t_2 = t_2(t_1)$ . Для этого преобразуем левую часть уравнения (4.6). Поскольку

$$\mu^2 + 1 = \frac{(s(t_1))^2 (s(t_2))^2}{\gamma_2'(t_1)\gamma_1'(t_2) + \gamma_2'(t_2)\gamma_1'(t_1)},$$

где  $s(t) = \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}$  — длина касательного вектора  $\gamma'(t)$ , то

$$\lambda_+ = -\mu + \sqrt{\mu^2 + 1} = \frac{-\gamma_1'(t_1)\gamma_1'(t_2) + \gamma_2'(t_1)\gamma_2'(t_2) + s(t_1)s(t_2)}{\gamma_2'(t_1)\gamma_1'(t_2) + \gamma_2'(t_2)\gamma_1'(t_1)}.$$

Уравнение (4.6) принимает вид

$$\frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)} - \frac{-\gamma_1'(t_1)\gamma_1'(t_2) + \gamma_2'(t_1)\gamma_2'(t_2) + s(t_1)s(t_2)}{\gamma_2'(t_1)\gamma_1'(t_2) + \gamma_2'(t_2)\gamma_1'(t_1)} = 0. \quad (4.7)$$

Изучим свойства этого уравнения и его значимой части в окрестности точки  $(t_1, t_2) = (t_0, t_0)$  с помощью разложений координатных функций по формуле Тейлора. В этих разложениях приращения  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  выбираются сначала независимыми. Далее они связываются в силу диффеоморфизма  $t_2 = t_2(t_1)$ ,  $\lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} t_2(t_1) = t_0$ .

Согласно приведенной в разд. 3 лемме может реализоваться одна из двух ситуаций относительно предельного значения производной локального диффеоморфизма:

$$\text{ситуация 1) } \lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \frac{dt_2}{dt_1}(t_1) = 0, \quad \text{ситуация 2) } \lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \frac{dt_2}{dt_1}(t_1) = -\infty.$$

Далее рассмотрим подробно ситуацию 1), когда  $\lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \frac{dt_2}{dt_1}(t_1) = 0$ . Здесь

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \frac{\Delta_2}{\Delta} = \lim_{t \rightarrow t_0-0} \frac{(t_2(t_1) - t_0)'}{(t_2(t_1) - t_1)'} = 0, \quad \lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \frac{\Delta_1}{\Delta} = \lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \frac{(t_1 - t_0)'}{(t_2(t_1) - t_1)'} = 1.$$

Стало быть,

$$\Delta_2 = o(\Delta), \quad \Delta \downarrow 0 \text{ и } \Delta \sim \Delta_1, \quad \Delta_1 \downarrow 0, \quad \Delta_2 = o(\Delta_1), \quad \Delta_1 \downarrow 0. \quad (4.8)$$

Тогда соответствующие члены разложений вида  $\text{const } \Delta_2^k$  имеют порядок малости  $o(\Delta_1^k)$  и ими в разложении  $k$ -го порядка допустимо пренебречь.

Следуя намеченному плану, воспользуемся формулами для струй, дифференцируя функции в точке  $t = t_0$ . При этом дифференцирование осуществляем “назад” по отношению к точке  $t = t_1$  и “вперед” по отношению к точке  $t = t_2$ . Начнем с вычисления 1-струй

$$J_{t_2, t_0}^1 \gamma_2 = \gamma_2 + \Delta_2 \gamma_2', \quad J_{t_1, t_0}^1 \gamma_2 = \gamma_2 - \Delta_1 \gamma_2' \quad \text{и} \quad J_{t_2, t_0}^1 \gamma_2 - J_{t_1, t_0}^1 \gamma_2 = (\Delta_2 + \Delta_1) \gamma_2' = \Delta \gamma_2',$$

$$J_{t_2,t_0}^1 \gamma_1 = \gamma_1 + \Delta_2 \gamma_1', \quad J_{t_1,t_0}^1 \gamma_1 = \gamma_1 - \Delta_1 \gamma_1' \quad \text{и} \quad J_{t_2,t_0}^1 \gamma_1 - J_{t_1,t_0}^1 \gamma_1 = (\Delta_2 + \Delta_1) \gamma_1' = \Delta \gamma_1'.$$

Аппроксимация отношения  $\frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)}$  приращений координатных функций принимает вид

$$\frac{J_{t_2,t_0}^1 \gamma_2 - J_{t_1,t_0}^1 \gamma_2}{J_{t_2,t_0}^1 \gamma_1 - J_{t_1,t_0}^1 \gamma_1} = \frac{\Delta \gamma_2'}{\Delta \gamma_1'} = \frac{\gamma_2'}{\gamma_1'}.$$

Заметим, что эта аппроксимация не зависит от приращений аргументов. Но тогда и аппроксимация этого отношения при наложении на точки из окрестности  $t = t_0$  дифференциальной связи  $t_2 = t_2(t_1)$ , т. е. в более частном случае, принимает тот же самый вид

$$\left. \frac{J_{t_2,t_0}^1 \gamma_2 - J_{t_1,t_0}^1 \gamma_2}{J_{t_2,t_0}^1 \gamma_1 - J_{t_1,t_0}^1 \gamma_1} \right|_{t_2=t_2(t_1)} = \frac{\Delta \gamma_2'}{\Delta \gamma_1'} = \frac{\Delta_1 \gamma_2'}{\Delta_1 \gamma_1'} = \frac{\gamma_2'}{\gamma_1'}.$$

Последнее равенство показывает, что  $t_1 = t_0$  является корнем и числителя, и знаменателя дроби  $\left. \frac{J_{t_2,t_0}^1 \gamma_2 - J_{t_1,t_0}^1 \gamma_2}{J_{t_2,t_0}^1 \gamma_1 - J_{t_1,t_0}^1 \gamma_1} \right|_{t_2=t_2(t_1)}$ .

Аппроксимируем с помощью 1-струй вычитаемую дробь в уравнении (4.7). Поскольку

$$J_{t_1,t_0}^1 \gamma_2' \otimes J_{t_2,t_0}^1 \gamma_1' = (\gamma_2' - \Delta_1 \gamma_{2,-}'') \otimes (\gamma_1' + \Delta_2 \gamma_{1,+}'') = \gamma_2' \gamma_1' - \Delta_1 \gamma_{2,-}'' \gamma_1' + \Delta_2 \gamma_{1,+}'' \gamma_2',$$

$$J_{t_2,t_0}^1 \gamma_2' \otimes J_{t_1,t_0}^1 \gamma_1' = (\gamma_2' + \Delta_2 \gamma_{2,+}'') \otimes (\gamma_1' - \Delta_1 \gamma_{1,-}'') = \gamma_2' \gamma_1' + \Delta_2 \gamma_{2,+}'' \gamma_1' - \Delta_1 \gamma_{1,-}'' \gamma_2',$$

то

$$J_{t_1,t_0}^1 \gamma_2' \otimes J_{t_2,t_0}^1 \gamma_1' + J_{t_2,t_0}^1 \gamma_2' \otimes J_{t_1,t_0}^1 \gamma_1' = 2\gamma_2' \gamma_1' - \Delta_1 (\gamma_{2,-}'' \gamma_1' + \gamma_{1,-}'' \gamma_2') + \Delta_2 (\gamma_{1,+}'' \gamma_2' + \gamma_{2,+}'' \gamma_1').$$

Поэтому линейная аппроксимация  $J_{t_1,t_0}^1 \gamma_2' \otimes J_{t_2,t_0}^1 \gamma_1' + J_{t_2,t_0}^1 \gamma_2' \otimes J_{t_1,t_0}^1 \gamma_1' \Big|_{t_2=t_2(t_1)}$  суммы  $\gamma_2'(t_1) \gamma_1'(t_2) + \gamma_2'(t_2) \gamma_1'(t_1)$ , вычисляемая в силу дифференциальной связи  $t_2 = t_2(t_1)$ , т. е. когда  $\Delta_2 = o(\Delta_1)$ ,  $\Delta_1 \downarrow 0$ , “теряет” (см. (4.8)) линейные по приращениям  $\Delta_2$  члены и принимает следующий вид:

$$J_{t_1,t_0}^1 \gamma_2' \otimes J_{t_2,t_0}^1 \gamma_1' + J_{t_2,t_0}^1 \gamma_2' \otimes J_{t_1,t_0}^1 \gamma_1' \Big|_{t_2=t_2(t_1)} = 2\gamma_2' \gamma_1' - \Delta_1 (\gamma_{2,-}'' \gamma_1' + \gamma_{1,-}'' \gamma_2').$$

Действуя аналогично, находим линейные аппроксимации функций  $\gamma_2'(t_1) \gamma_2'(t_2) - \gamma_1'(t_1) \gamma_1'(t_2)$  и  $s(t_1) s(t_2)$ :

$$\begin{aligned} & J_{t_1,t_0}^1 \gamma_2' \otimes J_{t_2,t_0}^1 \gamma_2' - J_{t_1,t_0}^1 \gamma_1' \otimes J_{t_2,t_0}^1 \gamma_1' \\ &= (\gamma_2')^2 - (\gamma_1')^2 + \Delta_2 \gamma_{2,+}'' \gamma_2' - \Delta_1 \gamma_{2,-}'' \gamma_2' + \Delta_1 \gamma_{1,-}'' \gamma_1' - \Delta_2 \gamma_{1,+}'' \gamma_1', \\ & (J_{t_1,t_0}^1 \gamma_2' \otimes J_{t_2,t_0}^1 \gamma_2' - J_{t_1,t_0}^1 \gamma_1' \otimes J_{t_2,t_0}^1 \gamma_1') \Big|_{t_2=t_2(t_1)} = (\gamma_2')^2 - (\gamma_1')^2 + \Delta_1 (\gamma_{1,-}'' \gamma_1' - \gamma_{2,-}'' \gamma_2'), \\ & J_{t_1,t_0}^1 s_1 \otimes J_{t_2,t_0}^1 s_2 = (s - \Delta_1 s_-') \otimes (s + \Delta_2 s_+') = s^2 + \Delta_2 s s_+' - \Delta_1 s s_-', \\ & (J_{t_1,t_0}^1 s_1 \otimes J_{t_2,t_0}^1 s_2) \Big|_{t_2=t_2(t_1)} = s^2 - \Delta_1 s s_-'. \end{aligned}$$

Подставляя в левую часть уравнения (4.7) 1-струи, найденные с учетом диффеоморфизма, получим

$$\frac{(J_{t_1,t_0}^1 \gamma_2' \otimes J_{t_2,t_0}^1 \gamma_2' - J_{t_1,t_0}^1 \gamma_1' \otimes J_{t_2,t_0}^1 \gamma_1') \Big|_{t_2=t_2(t_1)} + (J_{t_1,t_0}^1 s_1 \otimes J_{t_2,t_0}^1 s_2) \Big|_{t_2=t_2(t_1)}}{J_{t_1,t_0}^1 \gamma_2' \otimes J_{t_2,t_0}^1 \gamma_1' + J_{t_2,t_0}^1 \gamma_2' \otimes J_{t_1,t_0}^1 \gamma_1' \Big|_{t_2=t_2(t_1)}}$$

$$+ \left. \frac{J_{t_2, t_0}^1 \gamma_2 - J_{t_1, t_0}^1 \gamma_2}{J_{t_2, t_0}^1 \gamma_1 - J_{t_1, t_0}^1 \gamma_1} \right|_{t_2=t_2(t_1)} = \frac{\gamma'_2}{\gamma'_1} - \frac{(\gamma'_2)^2 - (\gamma'_1)^2 + \Delta_1 (\gamma''_{1,-} \gamma'_1 - \gamma''_{2,-} \gamma'_2) + s^2 - \Delta_1 s s'_-}{2\gamma'_2 \gamma'_1 - \Delta_1 (\gamma''_{2,-} \gamma'_1 + \gamma''_{1,-} \gamma'_2)}.$$

Упростим числитель второй дроби:

$$\begin{aligned} & (\gamma'_2)^2 - (\gamma'_1)^2 + \Delta_1 (\gamma''_{1,-} \gamma'_1 - \gamma''_{2,-} \gamma'_2) + s^2 - \Delta_1 s s'_- \\ &= (\gamma'_2)^2 - (\gamma'_1)^2 + \Delta_1 (\gamma''_{1,-} \gamma'_1 - \gamma''_{2,-} \gamma'_2) + (\gamma'_1)^2 + (\gamma'_2)^2 - \Delta_1 s \frac{\langle \gamma', \gamma''_- \rangle}{s} = 2(\gamma'_2)^2 - 2\Delta_1 \gamma''_{2,-} \gamma'_2. \end{aligned}$$

Тогда разность аппроксимирующих дробей

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma'_2}{\gamma'_1} - \frac{(\gamma'_2)^2 - (\gamma'_1)^2 + \Delta_1 (\gamma''_{1,-} \gamma'_1 - \gamma''_{2,-} \gamma'_2) + s^2 - \Delta_1 s s'_-}{2\gamma'_2 \gamma'_1 - \Delta_1 (\gamma''_{2,-} \gamma'_1 + \gamma''_{1,-} \gamma'_2)} \\ &= \frac{2(\gamma'_2)^2 \gamma'_1 - \Delta_1 \gamma'_2 (\gamma''_{2,-} \gamma'_1 + \gamma''_{1,-} \gamma'_2) - 2(\gamma'_2)^2 \gamma'_1 + 2\Delta_1 \gamma''_{2,-} \gamma'_2 \gamma'_1}{2\gamma'_2 (\gamma'_1)^2 - \Delta_1 \gamma'_1 (\gamma''_{2,-} \gamma'_1 + \gamma''_{1,-} \gamma'_2)} \\ &= \frac{\Delta_1 \gamma'_2 (\gamma''_{2,-} \gamma'_1 - \gamma''_{1,-} \gamma'_2)}{2\gamma'_2 (\gamma'_1)^2 - \Delta_1 \gamma'_1 (\gamma''_{2,-} \gamma'_1 + \gamma''_{1,-} \gamma'_2)} = \frac{\Delta_1 \gamma'_2 \det(\gamma', \gamma''_-)}{2\gamma'_2 (\gamma'_1)^2 - \Delta_1 \gamma'_1 (\gamma''_{2,-} \gamma'_1 + \gamma''_{1,-} \gamma'_2)}. \end{aligned}$$

Если псевдовершина стационарна по второй координате, т.е.  $\gamma'_2(t_0) = 0$ , то вновь реализовалось условие (4.1). Рассмотрим более общий подслучай, когда  $\gamma'_2(t_0) \neq 0$ . Тогда знаменатель последней дроби отличен от нуля и, стало быть,

$$\frac{\Delta_1 \gamma'_2 \det(\gamma', \gamma''_-)}{2\gamma'_2 (\gamma'_1)^2 - \Delta_1 \gamma'_1 (\gamma''_{2,-} \gamma'_1 + \gamma''_{1,-} \gamma'_2)} = \text{const} \cdot \Delta_1.$$

Полученное равенство означает, что в окрестности точки  $t_1 = t_0$  по лемме Адамара [7] существует по крайней мере непрерывная в точке  $t_1 = t_0$  функция  $g(t_1)$  такая, что левая часть уравнения (4.7), вычисленная вдоль диффеоморфизма  $t_2 = t_2(t_1)$ , раскладывается на множители

$$\left( \frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)} - \frac{-\gamma'_1(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_1)\gamma'_2(t_2) + s(t_1)s(t_2)}{\gamma'_2(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_2)\gamma'_1(t_1)} \right) \Big|_{t_2=t_2(t_1)} = (t_0 - t_1)g(t_1).$$

Полученное разложение завершает доказательство того, что  $t_1 = t_0$  является корнем уравнения (4.7) для нестационарного случая, когда  $\gamma'_1(t_0) \neq 0$ ,  $\gamma'_2(t_0) \neq 0$ .

Докажем выполнимость необходимых условий (4.2). Из (4.7) следует

$$\frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)} = \frac{-\gamma'_1(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_1)\gamma'_2(t_2) + s(t_1)s(t_2)}{\gamma'_2(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_2)\gamma'_1(t_1)}.$$

По-прежнему полагая, что переменные  $t_1$  и  $t_2$  стеснены дифференциальной связью

$$t_2 = t_2(t_1), \quad \lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} t_2(t_1) = t_0, \quad \lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \frac{dt_2}{dt_1}(t_1) = 0, \quad (4.9)$$

продифференцируем обе части равенства по  $t_1$ :

$$\left( \frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)} \right)' = \left( \frac{-\gamma'_1(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_1)\gamma'_2(t_2) + s(t_1)s(t_2)}{\gamma'_2(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_2)\gamma'_1(t_1)} \right)'. \quad (4.10)$$

Сосредоточимся на вычислении производной, стоящей справа от знака равенства:

$$\left( \frac{-\gamma'_1(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_1)\gamma'_2(t_2) + s(t_1)s(t_2)}{\gamma'_2(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_2)\gamma'_1(t_1)} \right)'$$

$$= \frac{(-\gamma_1''(t_1)\gamma_1'(t_2) - \gamma_1'(t_1)\gamma_1'(t_2)t_2' + \gamma_2''(t_1)\gamma_2'(t_2) + \gamma_2'(t_1)\gamma_2''(t_2)t_2' + s_-(t_1)s(t_2) + s(t_1)s_+'(t_2)t_2')}{(\gamma_2'(t_1)\gamma_1'(t_2) + \gamma_2'(t_2)\gamma_1'(t_1))^2} \\ \times (\gamma_2'(t_1)\gamma_1'(t_2) + \gamma_2'(t_2)\gamma_1'(t_1)) - \frac{(-\gamma_1'(t_1)\gamma_1'(t_2) + \gamma_2'(t_1)\gamma_2'(t_2) + s(t_1)s(t_2))}{(\gamma_2'(t_1)\gamma_1'(t_2) + \gamma_2'(t_2)\gamma_1'(t_1))^2} \\ \times (\gamma_2''(t_1)\gamma_1'(t_2) + \gamma_2'(t_1)\gamma_1''(t_2)t_2' + \gamma_2''(t_2)t_2'\gamma_1'(t_1) + \gamma_2'(t_2)\gamma_1''(t_1)).$$

Здесь  $t_2' = t_2'(t_1)$ . Найдем односторонний левый предел, памятуя, что  $t_2' \rightarrow 0$  при  $t_1 \rightarrow t_0 - 0$ , применяя также формулу  $s' = \frac{\langle \gamma', \gamma'' \rangle}{s}$  и опуская для краткости обозначение  $t_0$  аргумента у пределов производных:

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \left( \frac{-\gamma_1'(t_1)\gamma_1'(t_2) + \gamma_2'(t_1)\gamma_2'(t_2) + s(t_1)s(t_2)}{\gamma_2'(t_1)\gamma_1'(t_2) + \gamma_2'(t_2)\gamma_1'(t_1)} \right)' = \frac{(-\gamma_{1,-}'\gamma_1' + \gamma_{2,-}''\gamma_2' + s_-'s)(2\gamma_2'\gamma_1')}{(2\gamma_2'\gamma_1')^2} \\ - \frac{(-\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2 + s^2)(\gamma_{2,-}''\gamma_1' + \gamma_2'\gamma_{1,-}'')}{(2\gamma_2'\gamma_1')^2} = \frac{2\gamma_{2,-}''\gamma_2'}{2\gamma_2'\gamma_1'} - \frac{(\gamma_{2,-}''\gamma_1' + \gamma_2'\gamma_{1,-}'')}{2(\gamma_1')^2} = \frac{\det(\gamma', \gamma''_-)}{2(\gamma_1')^2}.$$

Стало быть, с учетом (4.10) получаем предельное равенство

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \left( \frac{\gamma_2(t_2(t_1)) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2(t_1)) - \gamma_1(t_1)} \right)' = \frac{\det(\gamma'(t_0), \gamma''_-(t_0))}{2(\gamma_1'(t_0))^2}.$$

Подчеркнем, что слева стоит односторонний левый частичный предел, обусловленный выбором локального диффеоморфизма  $t_2 = t_2(t_1)$  со свойствами (4.9). Левое равенство условий (4.2) доказано.

Допустим теперь, что реализовалась ситуация 2)  $\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{dt_2}{dt_1}(t_1) = -\infty$ . Тогда (см. замечание к лемме)  $\lim_{t_2 \rightarrow t_0 + 0} \frac{dt_1}{dt_2}(t_2) = 0$ . Это предельное соотношение фиксирует наличие гладкой локальной перепараметризации правой дуги кривой  $\Gamma$ , стянутой в точку  $\gamma(t_0)$ , имеющей при этом бесконечно малую производную. Выше подробно рассмотрена ситуация 1), когда  $\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{dt_2}{dt_1}(t_1) = 0$ , что означает то же качество применительно к левой дуге кривой  $\Gamma$ , стянутой в ту же точку  $\gamma(t_0)$ . Стало быть, выводы по обоим ситуациям идентичны. Поэтому, рассмотрев уравнение (4.7) вдоль локального диффеоморфизма  $t_1 = t_1(t_2)$ , когда  $\lim_{t_2 \rightarrow t_0 + 0} t_1(t_2) = t_0$ ,  $\frac{dt_1}{dt_2}(t_2) < 0$ ,  $\lim_{t_2 \rightarrow t_0 + 0} \frac{dt_1}{dt_2}(t_2) = 0$ , и повторив выкладки, аналогичные тем, что осуществлены в ситуации 1), вследствие симметрии значимой части (4.7) получим правое равенство условий (4.4).

Для завершения доказательства теоремы осталось предположить, что реализовалось неравенство  $\gamma_2'(t_0) \neq 0$ . В этом случае уравнение (2.2) допускает эквивалентное представление, получаемое из (4.5) циклической перестановкой индексов 1 и 2 координатных функций. Учитывая симметрию математической модели, повторив далее рассуждения и преобразования, мы последовательно удостоверимся в истинности условия (4.3) и правых равенств условий (4.2) и (4.4).  $\square$

### 5. Примеры

Для задачи (1.1), (1.2) рассматривается краевое множество  $M$ , ограниченное контуром  $\Gamma$ , координатными функциями которого являются

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} (1.5 - 0.75 \sin(2\bar{t})) \cos t, & \bar{t} \leq \pi/4, \\ (1 - 0.25 \sin^2(\bar{t})) \cos t, & \bar{t} > \pi/4, \end{cases} \quad \gamma_2(t) = \begin{cases} (1.5 - 0.75 \sin(2\bar{t})) \sin t, & \bar{t} \leq \pi/4, \\ (1 - 0.25 \sin^2(\bar{t})) \sin t, & \bar{t} > \pi/4. \end{cases}$$

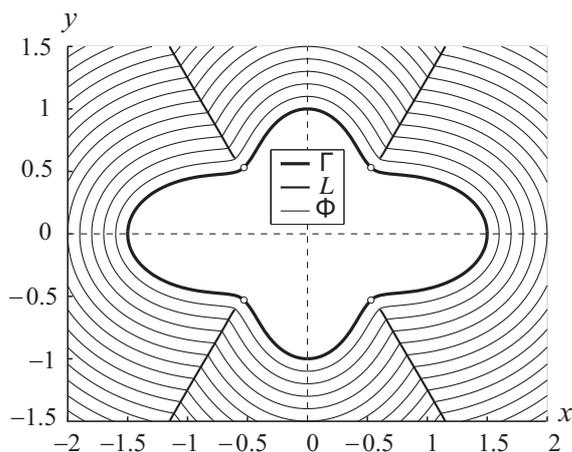


Рис. 1. Псевдовершины краевого множества. Сингулярные кривые. Распространение волновых фронтов.

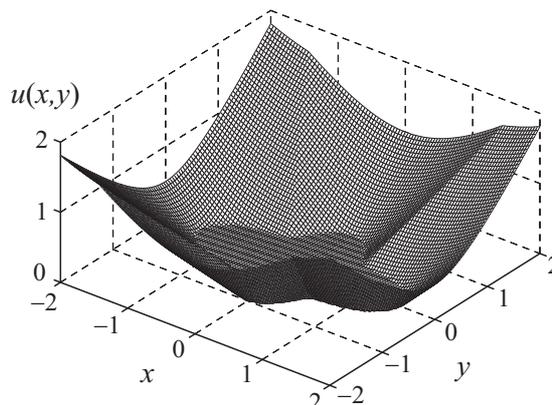


Рис. 2. График функции  $u(x, y) = \rho((x, y), M)$ .

Параметр  $t$  берется из отрезка  $[0, 2\pi]$ . Здесь вспомогательная переменная

$$\bar{t} = \begin{cases} t, & \text{если } t \leq \pi/2, \\ \pi - t, & \text{если } \pi/2 < t \leq \pi, \\ t - \pi, & \text{если } \pi < t \leq 3\pi/2, \\ 2\pi - t, & \text{если } 3\pi/2 < t \leq 2\pi. \end{cases}$$

Краевое множество имеет четыре псевдовершины, помеченные на рис. 1 маркерами, определяемые параметром  $t$ , равным  $0.5\pi$ ,  $1.5\pi$ ,  $2.5\pi$  и  $3.5\pi$ . Точки не являются стационарными, при этом во всех них производные второго порядка терпят разрыв. Здесь для двух псевдовершин существует локальный диффеоморфизм вида  $t_2 = t_2(t_1)$ , для которого выполняются соотношения  $\lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} t_2(t_1) = t_0$ ,  $\frac{dt_2}{dt_1}(t_1) < 0$  для  $t_1 < t_0$ ,  $\lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \frac{dt_2}{dt_1}(t_1) = 0$ . Для двух других существует локальный диффеоморфизм вида  $t_2 = t_2(t_1)$ , для которого выполняются соотношения  $\lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} t_2(t_1) = t_0$ ,  $\frac{dt_2}{dt_1}(t_1) < 0$  для  $t_1 < t_0$ ,  $\lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \frac{dt_2}{dt_1}(t_1) = -\infty$ . Построение диффеоморфизмов осуществлено численными методами, ибо отыскание их явного аналитического выражения наталкивается на непреодолимые трудности. В справедливости необходимых условий убеждаемся также с помощью вычислительных процедур, нацеленных на определение односторонних пределов, фигурирующих в (4.2) и (4.4). Для полноты иллюстрации результатов исследования на рис. 1 представлены также волновые фронты  $\Phi$ , являющиеся линиями уровня функции  $u(x, y) = \rho((x, y), M)$ , с шагом  $h_\rho = 0.1$ . В точках сингулярного множества  $L(M)$  они теряют гладкость. График сужения функции  $u(x, y) = \rho((x, y), M)$  на множество  $[-2, 2] \times [-2, 2]$  представлен на рис. 2.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кружков С.Н.** Обобщенные решения уравнений Гамильтона — Якоби типа эйконала, I // Мат. сб. 1975. Т. 98, вып. 3. С. 450–493.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. **Subbotin A.I.** Generalized solutions of first-order partial differential equations: The dynamical optimization. Boston: Birkhäuser, 1995. 312 p.
4. **Crandall M.G., Lions P.L.** Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277. No. 1. P. 1–42.

5. Колокольников В.Н., Маслов В.П. Задача Коши для однородного уравнения Беллмана // Докл. АН СССР. 1987. Vol. 296 (4). С. 796–800.
6. Ушаков В.Н., Успенский А.А., Лебедев П.Д. Построение минимаксного решения уравнения типа эйконала // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 182–191.
7. Брус Дж., Джиблин П. Кривые и особенности. М.: Мир, 1988. 262 с.
8. Успенский А.А., Лебедев П.Д. Условия трансверсальности ветвей решения нелинейного уравнения в задаче быстрогодействия с круговой индикатрисой // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 4. С. 82–100.
9. Успенский А.А., Лебедев П.Д. О множестве предельных значений локальных диффеоморфизмов при эволюции волновых фронтов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 171–186.
10. Успенский А.А. Формулы исчисления негладких особенностей функции оптимального результата в задаче быстрогодействия // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 276–290.
11. Успенский А.А. Необходимые условия существования псевдовершин краевого множества в задаче Дирихле для уравнения эйконала // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 1. С. 250–263.
12. Бюшгенс С.С. Дифференциальная геометрия. М.: ГИТТЛ, 1940. 300 с.
13. Брекер Т., Ландер Л. Дифференцируемые ростки и катастрофы. М.: Мир, 1977. 208 с.
14. Ohm M. Lehrbuch der gesamten höhern Mathematik. Bd 2. Leipzig: Verlag Friedrich Volckmar, 1835.

Успенский Александр Александрович  
канд. физ.-мат. наук  
зав. сектором

Поступила 5.11.2015

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН  
e-mail: uspen@imm.uran.ru

Лебедев Павел Дмитриевич  
канд. физ.-мат. наук  
научн. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН  
e-mail: pleb@yandex.ru