ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 1 2016

УДК 517.928

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ТРЕМЯ ТОЧКАМИ ПОВОРОТА

Д. А. Турсунов

Обобщенным методом пограничных функции, построено равномерное асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для сингулярно возмущенного, линейного, неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с тремя точками поворота в действительной оси. Построенный асимптотический ряд представляет собой ряд Пюйзё.

Ключевые слова: асимптотическое разложение, точка поворота, сингулярное (бисингулярное) возмущение, обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, уравнение Эйри, модифицированные функции Бесселя, задача Дирихле, обобщенная пограничная функция, малый параметр.

D. A. Tursunov. Asymptotic expansion for a solution of an ordinary second-order differential equation with three turning points.

Using the generalized method of boundary functions, we construct a uniform asymptotic expansion of the solution of the Dirichlet problem for a singularly perturbed linear inhomogeneous ordinary second-order differential equation with three turning points on the real axis. The constructed asymptotic series is a Puiseux series.

Keywords: asymptotic expansion, turning point, singular (bisingular) perturbation, ordinary second-order differential equation, Airy equation, modified Bessel functions, Dirichlet problem, generalized boundary function, small parameter.

1. Введение

Интерес к задачам с точками поворота для уравнений второго порядка был стимулирован задачами механики сплошной среды, гидродинамики, квантовой физики и др. Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с точками поворота, исследованы в работах В. Вазова (W. Wasow) [1], М. Ивано (M. Iwano), Сибуйя (Y. Sibuya), Р. Е. Лангера (R. E. Langer), Черри (T. M. Cherry), Эрдейи (Erdely), Свенсона (C. A. Swanson), Олвера (F.W.J. Olver) [2; 3], Казаринова (N. D. Kazarinoff) и Маккельви (R. W. McKelvey), А. М. Ильина [4; 5], К. Алымкулова [6–9], В. Н. Бобочко и др.

В работах [4; 5] методом согласования исследована задача

$$\varepsilon y''(x) - xq(x)y(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad q(x) > 0;$$

в работе [10] методом сращивания исследована задача

$$\varepsilon y''(x) - x^2 y(x) = f(x), \quad x \in (-1,1), \quad y(-1) = 0, \quad y(1) = 0;$$

а в работе [11] методом обобщенных пограничных функций исследована задача

$$\varepsilon y''(x) - x(1-x)y(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \quad y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta.$$

В этих работах построены равномерные асимптотические разложения решений задач с любой степенью точности по малому параметру.

В данной статье покажем преимущества метода обобщенных пограничных функций при построении равномерного асимптотического разложения решения задачи Дирихле для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений второго порядка с точками поворота по малому параметру.

2. Постановка задачи

Исследуем асимптотическое поведение решения задачи Дирихле для сингулярно возмущенного, линейного, неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\varepsilon y_\varepsilon''(x) - x^2(1-x^2)a(x)y_\varepsilon(x) = f(x), \quad x \in (-1,1), \tag{1}$$

$$y_\varepsilon(-1) = 0, \quad y_\varepsilon(1) = 0, \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon << 1$ — малый параметр, $f(x), a(x) \in C^\infty[-1,1]$, $a(x) > 0$, $x \in [-1,1]$.

Не нарушая общности, рассматриваем однородные краевые условия, так как неоднородные краевые условия $y_\varepsilon(-1) = A_1$, $y_\varepsilon(1) = A_2$ с помощью замены $y_\varepsilon(x) = z_\varepsilon(x) + A_1 + (x+1)(A_2 - A_1)/2$ приводятся к однородным $z_\varepsilon(-1) = 0$, $z_\varepsilon(1) = 0$.

При $\varepsilon > 0$ решение задачи (1), (2) существует и единственно. Нас интересует асимптотическое поведение этого решения, когда $\varepsilon \to 0$. Если либо $f(0) \neq 0$, либо $f(1) \neq 0$, либо $f(-1) \neq 0$, то решение предельного уравнения ($\varepsilon = 0$) $-x^2(1-x^2)a(x)y_0 = f(x)$ на отрезке $x \in [-1,1]$ не является гладкой функцией $y_0(x) = -\dfrac{f(x)}{x^2(1-x^2)a(x)}$. Функция $y_0(x)$ в общем случае в точках $x = 0, x = 1, x = -1$ имеет разрывы второго рода. Кроме того, в этих точках собственные значения задачи совпадают, т. е. точки $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ являются классическими точками поворота, по определению В. Вазова [1] или М. В. Федорюка [12].

Для начала рассмотрим внешнее решение задачи (1), (2), которое будем искать в виде

$$U(x) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \ldots + \varepsilon^n u_n(x) + \ldots. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим рекуррентную систему

$$-x^2(1-x^2)a(x)u_0(x) = f(x), \quad x^2(1-x^2)a(x)u_k(x) = u_{k-1}''(x), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Из этих равенств нетрудно определить функции $u_k(x), k = 0, 1, \ldots,$:

$$u_0(x) = -f(x)/x^2(1-x^2)a(x), \quad u_k(x) = u_{k-1}''(x)/x^2(1-x^2)a(x), \quad k \in \mathbb{N},$$

или $u_k(x) = P_k(x)/x^{2+4k}(1-x^2)^{1+3k}$, где $P_k(x) \in C^\infty[-1,1]$, $k = 0, 1, \ldots$.

Заметим, что справедливы асимптотические разложения

$$u_k(x) = (1+x)^{-1-3k}\sum_{j=0}^{+\infty} c_{k,j}(1+x)^j \ \text{ при } \ x \to -1,$$

$$u_k(x) = (1-x)^{-1-3k}\sum_{j=0}^{+\infty} \widetilde{c}_{k,j}(1-x)^j \ \text{ при } \ x \to 1,$$

$$u_k(x) = x^{-2-4k}\sum_{j=0}^{+\infty} \overline{c}_{k,j}x^j \ \text{ при } \ x \to 0, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где $c_{k,j}, \widetilde{c}_{k,j}, \overline{c}_{k,j}$ — некоторые постоянные.

Функции $u_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots$, имеют нарастающие особенности в окрестностях точек $x = -1$, $x = 0$ и $x = 1$. Кроме того, при $|x| \le \sqrt[4]{\varepsilon}$, или $0 \le 1+x \le \sqrt[3]{\varepsilon}$, или $0 \le 1-x \le \sqrt[3]{\varepsilon}$ ряд (3) теряет асимптотический характер. Поэтому задачу (1), (2), по терминологии А. М. Ильина, можно называть бисингулярно возмущенной [4; 5].

3. Основной результат

Теорема 1. *Если $f(-1)\neq 0$, $f(0)\neq 0$ и $f(1)\neq 0$, то для решения задачи* (1), (2) *справедливо асимптотическое разложение*

$$y_\varepsilon(x)=v_0(x)+\varepsilon v_1(x)+\sum_{k=-1}^{2}\sqrt[3]{\varepsilon^k}\Big(q_k\Big(\frac{1+x}{\sqrt[3]{\varepsilon}}\Big)+w_k\Big(\frac{1-x}{\sqrt[3]{\varepsilon}}\Big)\Big)+\sum_{k=-2}^{3}\sqrt[4]{\varepsilon^k}\psi_k\Big(\frac{x}{\sqrt[4]{\varepsilon}}\Big)+O(\sqrt[3]{\varepsilon}). \quad (4)$$

где $v_0(x)$, $v_1(x)$ — регулярные функции;

$q_k\Big(\dfrac{1+x}{\sqrt[3]{\varepsilon}}\Big)$, $w_k\Big(\dfrac{1-x}{\sqrt[3]{\varepsilon}}\Big)$ *— обобщенные пограничные функции в окрестностях точек $x=-1$ и $x=1$ соответственно;*

$\psi_k\Big(\dfrac{x}{\sqrt[4]{\varepsilon}}\Big)$ *— функции в окрестности точки $x=0$ (конкретизируются ниже).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Асимптотическое разложение решения задачи (1), (2) будем строить обобщенным методом пограничных функций [6–11]. Доказательство теоремы состоит из двух частей: построения формального асимптотического разложения решения (ФАРР) и обоснования ФАРР.

Формальное асимптотическое разложение решения задачи (1), (2) ищем в виде

$$y_\varepsilon(x)=v_0(x)+\varepsilon v_1(x)+\sum_{k=-1}^{2}\lambda^k(q_k(\eta)+w_k(\xi))+\sum_{k=-2}^{3}\mu^k\psi_k(\tau)+R_\varepsilon(x), \quad (5)$$

где $\eta=(1+x)/\lambda$, $\xi=(1-x)/\lambda$, $\tau=x/\mu$, $\lambda=\sqrt[3]{\varepsilon}$, $\mu=\sqrt[4]{\varepsilon}$, $R_\varepsilon(x)$ — остаточный член.

Подставляя выражение (5) в уравнение (1), имеем

$$\varepsilon(v_0''(x)+\varepsilon v_1''(x))-x^2(1-x^2)a(x)(v_0(x)+\varepsilon v_1(x))+R_\varepsilon''(x)-x^2(1-x^2)a(x)R_\varepsilon(x)$$
$$+\sum_{k=-1}^{2}\lambda^{k+1}q_k''(\eta)-\eta(\eta\lambda-1)^2(2-\eta\lambda)a(\eta\lambda-1)\sum_{k=-1}^{2}\lambda^{k+1}q_k(\eta)+\sum_{k=-1}^{2}\lambda^{k+1}w_k''(\xi)$$
$$-\xi(1+\xi\lambda)^2(2-\xi\lambda)a(1+\xi\lambda)\sum_{k=-1}^{2}\lambda^{k+1}w_k(\xi)+\sum_{k=-2}^{3}\mu^{k+2}\psi_k''(\tau)-\tau^2(1-(\mu\tau)^2)a(\mu\tau)\sum_{k=-2}^{3}\mu^{k+2}\psi_k(\tau)$$
$$=f(x)-h_0(x)-\varepsilon h_1(x)+h_0(x)+\varepsilon h_1(x).$$

Согласно идее метода мы ввели новые, пока неизвестные, функции $h_0(x)$ и $h_1(x)$, которые конкретизируем ниже.

Отсюда получаем

$$v_0(x)=-\frac{f(x)-h_0(x)}{x^2(1-x^2)a(x)}, \quad v_1(x)=\frac{v_0''(x)+h_1(x)}{x^2(1-x^2)a(x)}.$$

Функции $h_0(x)$ и $h_1(x)$ выберем так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\text{a)}\ \ v_0(x),\quad v_1(x)\in C^\infty[-1,1];\quad \text{b)}\ \ \psi_k(\tau)\to 0,\quad \tau\to\pm\infty,\quad k=-2,-1,0,1,2,3;$$

$$\text{c)}\ \ q_k(\eta)\to 0,\quad \eta\to+\infty;\quad \text{d)}\ \ w_k(\xi)\to 0,\quad \xi\to+\infty,\quad k=-1,0,1,2.$$

Пусть

$$h_i(x)=h_i^q(x)+h_i^w(x)+h_i^\psi(x),\quad i=0,1,$$

где

$$h_i^\psi(x)=\Big(\frac{p_{i,0}}{a_0}(1-x^2)+\Big(\frac{p_{i,1}}{a_0}-\frac{p_{i,0}a_1}{a_0^2}\Big)x(1-x^2)\Big)a(x),\quad p_{i,0}=p_i(0),\quad p_{i,1}=p_i'(0),$$

$$p_0(x)=f(x),\quad p_1(x)=-v_0''(x),\quad a_0=a(0),\quad a_1=a'(0);$$
$$h_i^w(x)=\frac{x^2(1+x)p_i(1)}{2a(1)}a(x),\quad h_i^q(x)=\frac{x^2(1-x)p_i(-1)}{2a(-1)}a(x),\quad i=0,1.$$

Тогда $h_i(0)=p_i(0)$, $h_i'(0)=p_i'(0)$, $h_i(1)=p_i(1)$, $h_i(-1)=p_i(-1)$, $i=0,1$, следовательно, $v_0(x)$, $v_1(x)\in C^\infty[-1,1]$. Ниже докажем, что выполняются и остальные вышеперечисленные условия — b), c) и d). Таким образом, мы определили неизвестные функции $h_0(x)$ и $h_1(x)$, а также регулярные внешние решения $v_0(x)$ и $v_1(x)$.

Теперь приступим к построению функции $w_k(\xi)$, $\psi_k(\tau)$. Функции $q_k(\eta)$, $w_k(\xi)$, совершенно равноправны, поэтому достаточно исследовать одну из них, вторая исследуется аналогично первой.

Пусть
$$a(\tau\mu)=\sum_{k=0}^\infty a_k(\tau\mu)^k,\quad a(1+\xi\lambda)=\sum_{k=0}^\infty b_k(\xi\lambda)^k,$$
где $a_k=a^{(k)}(0)/k!$, $b_k=a^{(k)}(1)/k!$.

Тогда получим
$$L\psi_{-2}\equiv\psi_{-2}''(\tau)-a_0\tau^2\psi_{-2}(\tau)=p_{0,0},\quad \lim_{\tau\to\pm\infty}\psi_{-2}(\tau)=0;\tag{6}$$
$$L\psi_{-1}=\tau^3a_1\psi_{-2}(\tau)+p_{0,1}\tau,\quad \lim_{\tau\to\pm\infty}\psi_{-1}(\tau)=0;\tag{7}$$
$$L\psi_0=(\tau a_1\psi_{-1}(\tau)+\tau^2a_2\psi_{-2}(\tau)-\tau^2a_0\psi_{-2}(\tau))\tau^2+\Big(\frac{a_2p_{0,0}}{a_0}-p_{0,0}-\frac{a_1^2p_{0,0}}{a_0^2}+\frac{a_1p_{0,1}}{a_0}\Big)\tau^2,$$
$$\lim_{\tau\to\pm\infty}\psi_0(\tau)=0;\tag{8}$$
$$L\psi_1=(a_1\psi_0(\tau)+\tau a_2\psi_{-1}(\tau)+\tau^2a_3\psi_{-2}(\tau)-\tau a_0\psi_{-1}(\tau)-\tau^2a_1\psi_{-2}(\tau))\tau^3$$
$$+\Big(\frac{a_3p_{0,0}}{a_0}-p_{0,1}-\frac{a_1a_2p_{0,0}}{a_0^2}+\frac{a_2p_{0,1}}{a_0}\Big)\tau^3,\quad \lim_{\tau\to\pm\infty}\psi_1(\tau)=0;\tag{9}$$
$$L\psi_2=\sum_{i=1}^4a_i\tau^{i+2}\psi_{2-i}(\tau)-\sum_{i=0}^2a_i\tau^{i+4}\psi_{-i}(\tau)+\Big(\frac{a_4p_{0,0}}{a_0}-\frac{a_1p_{0,1}}{a_0}+\frac{a_1^2p_{0,0}}{a_0^2}-\frac{a_2p_{0,0}}{a_0}+\frac{a_3p_{0,1}}{a_0}$$
$$-\frac{a_3a_1p_{0,0}}{a_0^2}\Big)\tau^4+p_{1,0},\quad \lim_{\tau\to\pm\infty}\psi_2(\tau)=0;\tag{10}$$
$$L\psi_3=\sum_{i=1}^5a_i\tau^{i+2}\psi_{3-i}(\tau)-\sum_{i=0}^3a_i\tau^{i+4}\psi_{1-i}(\tau)+\Big(\frac{a_5p_{0,0}}{a_0}-\frac{a_2p_{0,1}}{a_0}+\frac{a_1a_2p_{0,0}}{a_0^2}-\frac{a_3p_{0,0}}{a_0}+\frac{a_4p_{0,1}}{a_0}$$
$$-\frac{a_4a_1p_{0,0}}{a_0^2}\Big)\tau^5+p_{1,1}\tau,\quad \lim_{\tau\to\pm\infty}\psi_3(\tau)=0;\tag{11}$$
$$lw_{-1}\equiv w_{-1}''(\xi)-2b_0\xi w_{-1}(\xi)=p_0(1);\quad w_{-1}(0)=0,\quad \lim_{\xi\to+\infty}w_{-1}(\xi)=0;\tag{12}$$
$$lw_0=(2b_1-5b_0)\xi^2w_{-1}(\xi)-\Big(\frac{5}{2}-\frac{b_1}{b_0}\Big)p_0(1)\xi,\quad w_0(0)=-v_0(1),\quad \lim_{\xi\to+\infty}w_0(\xi)=0;\tag{13}$$
$$lw_1=(2b_2-5b_1+4b_0)\xi^3w_{-1}(\xi)+(2b_1-5b_0)\xi^2w_0(\xi)-\Big(\frac{5b_1}{2b_0}-\frac{b_2}{b_0}-2\Big)p_0(1)\xi^2,$$
$$w_1(0)=0,\quad \lim_{\xi\to+\infty}w_1(\xi)=0;\tag{14}$$
$$lw_2=(2b_3-5b_2+4b_1-b_0)\xi^4w_{-1}(\xi)+(2b_2-5b_1+4b_0)\xi^3w_0(\xi)+(2b_1-5b_0)\xi^2w_1(\xi)$$
$$-\Big(\frac{5b_2}{2b_0}-\frac{b_3}{b_0}-\frac{2b_1}{b_0}+\frac{1}{2}\Big)p_0(1)\xi^3+p_1(1),\quad w_2(0)=-\lambda v_1(0),\quad \lim_{\xi\to+\infty}w_2(\xi)=0.\tag{15}$$

Докажем, что задачи (6)–(11) имеют единственные решения.

Лемма 1. *Задача*

$$z''(x) - a_0x^2z(x) = \widetilde{f}(x), \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad \widetilde{f}(x) \in C^\infty(-\infty, +\infty), \tag{16}$$

имеет единственное решение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. С помощью замены $x = \sqrt[4]{4/a_0}t$ получим уравнение

$$z''(t) - 4t^2z(t) = 0,$$

которое имеет фундаментальную систему решений $\{U_4(t), U_4(-t)\}$, где $U_4(t) = \sqrt{\dfrac{2t}{\pi}}K_{1/4}(t^2)$, $t > 0$, $K_{1/4}(t^2)$ — функция Макдональда (модифицированная функция Бесселя) [12]. Приведем основные свойства функции $U_4(t)$, $U_4(-t)$:

a) вронскиан этих функций $W(U_4(t), U_4(-t)) = 4\operatorname{cosec}(\pi/4) = 4\sqrt{2}$;

b) при $t = 0$: $U_4(0) = \pi^{-1/2}2^{-1/4}\Gamma(1/4)$;

c) при $t \to +\infty$ функция $U_4(t)$ экспоненциально убывает: $U_4(t) \sim t^{-1/2}e^{-t^2}$;

d) при $t \to -\infty$ функция $U_4(t) = \sqrt{\dfrac{2|t|}{\pi}}(\sqrt{2}\pi I_{1/4}(t^2) + K_{1/4}(t^2))$, $t < 0$, экспоненциально растет: $U_4(t) = (2/t)^{1/2}e^{t^2}(1 + O(t^{-2}))$, где $I_{1/4}(t^2)$, $K_{1/4}(t^2)$ — модифицированные функции Бесселя.

Следовательно, решение задачи (16) можно записать в виде

$$z(x) = \frac{1}{4\sqrt{2}}U_4\Big(\sqrt[4]{\frac{a_0}{4}}x\Big)\int\limits_{-\infty}^{x} U_4\Big(-\sqrt[4]{\frac{a_0}{4}}s\Big)\widetilde{f}(s)ds + \frac{1}{4\sqrt{2}}U_4\Big(-\sqrt[4]{\frac{a_0}{4}}x\Big)\int\limits_{x}^{+\infty} U_4\Big(\sqrt[4]{\frac{a_0}{4}}s\Big)\widetilde{f}(s)ds.$$

Лемма 1 доказана.

Следствие 1. *Если $\widetilde{f}(x) = O(x^{-N_1})$ при $x \to \pm\infty$, то $z(x) = O(x^{-N_1-2})$, $N_1 - \mathrm{const}$.*

С помощью леммы 1 можем записать решения задач (6)–(11). А из следствия 1 при $\tau \to \pm\infty$ вытекает справедливость следующих оценок:

$$\psi_{-2}(\tau) = \psi_2(\tau) = O\Big(\frac{1}{\tau^2}\Big), \quad \psi_{-1}(\tau) = \psi_3(\tau) = O\Big(\frac{1}{\tau}\Big), \quad \psi_0(\tau) = O\Big(\frac{1}{\tau^4}\Big), \quad \psi_1(\tau) = O\Big(\frac{1}{\tau^3}\Big).$$

Действительно, при $\tau \to \infty$ имеем

$$\psi_{-2}(\tau) = -\frac{p_{0,0}}{a_0\tau^2} - \frac{6p_{0,0}}{a_0^2\tau^6} - O\Big(\frac{1}{\tau^{10}}\Big);$$

$$\psi_{-1}(\tau) = \Big(\frac{a_1p_{0,0}}{a_0^2} - \frac{p_{0,1}}{a_0}\Big)\frac{1}{\tau} + \Big(\frac{2a_1p_{0,0}}{a_0^3} - \frac{2p_{0,1}}{a_0^2}\Big)\frac{1}{\tau^5} + O\Big(\frac{1}{\tau^9}\Big);$$

$$\psi_0(\tau) = \Big(\frac{2a_1p_{0,1}}{a_0^3} - \frac{2a_1^2p_{0,0}}{a_0^4} + \frac{6a_2p_{0,0}}{a_0^3} - \frac{6p_{0,0}}{a_0^2}\Big)\frac{1}{\tau^4} + O\Big(\frac{1}{\tau^8}\Big);$$

$$\psi_1(\tau) = O\Big(\frac{1}{\tau^3}\Big), \quad \psi_2(\tau) = O\Big(\frac{1}{\tau^2}\Big), \quad \psi_3(\tau) = O\Big(\frac{1}{\tau}\Big).$$

Теперь докажем существование и единственность решения задач (12)–(15). Для этого докажем вспомогательную лемму.

Лемма 2. *Задача*

$$lz(x) = \widetilde{f}(x), \quad x \in (0, +\infty), \quad z(0) = z^0, \quad \widetilde{f}(x) \in C^\infty[0, +\infty) \tag{17}$$

имеет единственное решение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение $lz(x) = 0$ с помощью замены $t = \sqrt[3]{b_0}x$ приводится к уравнению Эйри $z''(t) - tz(t) = 0$, которое имеет два независимых решения $Ai(t)$, $Bi(t)$. Следовательно, и уравнение $lz(x) = 0$ имеет два независимых решения $Ai(\sqrt[3]{b_0}x)$, $Bi(\sqrt[3]{b_0}x)$. С помощью этих функций запишем решение задачи (17):

$$z(x) = \frac{z^0}{Ai(0)}Ai(\sqrt[3]{b_0}x) + \frac{\pi}{\sqrt[3]{b_0}}Bi(\sqrt[3]{b_0}x)\int\limits_x^{+\infty} Ai(\sqrt[3]{b_0}s)\widetilde{f}(s)ds$$

$$+\frac{\pi}{\sqrt[3]{b_0}}Ai(\sqrt[3]{b_0}x)\Big(\int\limits_0^x Bi(\sqrt[3]{b_0}s)\widetilde{f}(s)ds - \sqrt{3}\int\limits_0^{+\infty} Ai(\sqrt[3]{c_0}s)\widetilde{f}(s)ds\Big).$$

Лемма 2 доказана.

Следствие 2. *Если $\widetilde{f}(x) = O(x^{-N_1})$ при $x \to +\infty$, то учитывая асимптотическое поведение функции Эйри при $x \to +\infty$, получаем $z(x) = O(x^{-N_1-1})$, $N_1 -$* const.

С помощью леммы 2 доказывается существование единственных решений задач (12)–(15), удовлетворяющих соответствующим условиям. Решение каждого уравнения (12)–(15) имеет на бесконечности асимптотику

$$w_{-1}(\xi) = w_2(\xi) = O(\xi^{-1}), \quad w_0(\xi) = O(\tau^{-3}), \quad w_1(\xi) = O(\xi^{-2}), \quad \xi \to +\infty.$$

Действительно, при $\xi \to +\infty$ имеем

$$w_{-1}(\xi) = -\frac{p_0(1)}{2b_0\xi} + O\Big(\frac{1}{\xi^4}\Big), \quad w_0(\xi) = \frac{p_0(1)}{2b_0\xi^3}\Big(\frac{b_1}{b_0} - \frac{5}{2}\Big) + O\Big(\frac{1}{\xi^6}\Big),$$

$$w_1(\xi) = -\frac{p_0(1)}{2b_0\xi^2}\Big(\frac{b_1^2}{b_0^2} - \frac{5b_1}{2b_0} - \frac{b_2}{b_0} + \frac{17}{4}\Big) + O\Big(\frac{1}{\xi^5}\Big), \quad w_2(\xi) = O\Big(\frac{1}{\xi}\Big).$$

Перейдем теперь к исследованию функции $R_\varepsilon(x)$. Для остаточного члена получаем задачу

$$\varepsilon R_\varepsilon''(x) - x^2(1-x^2)a(x)R_\varepsilon(x) = O(\sqrt[3]{\varepsilon^4}), \quad x \in (-1, 1),$$

$$R_\varepsilon(-1) = R_\varepsilon(1) = 0.$$

Затем, применяя принцип максимума, выводим

$$R_\varepsilon(x) = O(\sqrt[3]{\varepsilon}), \quad x \in [-1, 1], \quad \varepsilon \to 0.$$

Отсюда следует справедливость разложения (4).

З а м е ч а н и е. Построив функции $h_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяющие аналогичным выше указанным условиям a)–d), можно повысить точность асимптотического разложения по малому параметру до любой степени.

Теорема доказана.

П р и м е р. Построим асимптотическое разложение решения до любой степени точности по малому параметру следующей задачи:

$$\varepsilon y_\varepsilon''(x) - x^2(1-x^2)y_\varepsilon(x) = 1, \quad x \in (-1, 1), \tag{18}$$

с краевыми условиями (2). Докажем справедливость следующей теоремы.

Теорема 2. *Для решения задачи* (18), (2) *справедливо асимптотическое разложение*

$$y_\varepsilon(x) = \sum_{k=-1}^{+\infty}\sqrt[3]{\varepsilon^k}\Big(q_k\Big(\frac{1+x}{\sqrt[3]{\varepsilon}}\Big) + w_k\Big(\frac{1-x}{\sqrt[3]{\varepsilon}}\Big)\Big) + \sum_{k=-2}^{+\infty}\sqrt[4]{\varepsilon^k}\psi_k\Big(\frac{x}{\sqrt[4]{\varepsilon}}\Big). \tag{19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Асимптотическое разложение решения задачи (18), (2) ищем в виде

$$y_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k(x) + \sum_{k=-1}^{+\infty} \lambda^k (q_k(\eta) + w_k(\xi)) + \sum_{k=-2}^{+\infty} \mu^k \psi_k(\tau), \tag{20}$$

где $\eta = (1+x)/\lambda$, $\xi = (1-x)/\lambda$, $\tau = x/\mu$, $\lambda = \sqrt[3]{\varepsilon}$, $\mu = \sqrt[4]{\varepsilon}$.

Подставляя выражение (20) в уравнение (18) имеем

$$\varepsilon \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k v_k''(x) - x^2(1-x^2) \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k v_k(x) = 1 - h_0(x) - \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon^k h_k(x), \tag{21}$$

$$\sum_{k=-2}^{+\infty} \mu^{k+2} \psi_k''(\tau) - \tau^2(1-(\mu\tau)^2) \sum_{k=-2}^{+\infty} \mu^{k+2} \psi_k(\tau) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu^{4k} h_k^{\psi}(\mu\tau), \tag{22}$$

$$\sum_{k=-1}^{+\infty} \lambda^{k+1} w_k''(\xi) - \xi(1+\xi\lambda)^2(2-\xi\lambda) \sum_{k=-1}^{+\infty} \lambda^{k+1} w_k(\xi) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{3k} h_k^{w}(1+\xi\lambda), \tag{23}$$

$$\sum_{k=-1}^{+\infty} \lambda^{k+1} q_k''(\eta) - \eta(\eta\lambda-1)^2(2-\eta\lambda) \sum_{k=-1}^{+\infty} \lambda^{k+1} q_k(\eta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{3k} h_k^{q}(\eta\lambda-1).$$

Из равенства (21) получаем

$$v_0(x) = -\frac{1-h_0(x)}{x^2(1-x^2)}, \quad v_k(x) = \frac{v_{k-1}''(x) + h_k(x)}{x^2(1-x^2)}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Для данного примера $h_0(x) = h_0^q(x) + h_0^w(x) + h_0^{\psi}(x)$, где $h_0^{\psi}(x) = 1 - x^2$, $h_0^w(x) = \dfrac{x^2(1+x)}{2}$, $h_0^q(x) = \dfrac{x^2(1-x)}{2}$, поэтому $v_0(x) \equiv 0$.

Пусть $h_k(x) = h_k^q(x) + h_k^w(x) + h_k^{\psi}(x)$, где $h_k^{\psi}(x) = A_{k,0} + A_{k,2}x^2$, $h_k^q(x) = B_{k,0} + B_{k,1}(1+x) + B_{k,2}(1+x)^2 + B_{k,3}(1+x)^3$, $h_k^w(x) = B_{k,0} + B_{k,1}(1-x) + B_{k,2}(1-x)^2 + B_{k,3}(1-x)^3$.

Пока неизвестные коэффициенты $A_{k,0}$, $A_{k,2}$ и $B_{k,j}$, $j = 0, 1, 2, 3$, должны удовлетворять равенствам

$$A_{k,0} + 2B_{k,0} + 2B_{k,1} + 2B_{k,2} + 2B_{k,3} = 0, \quad A_{k,2} + 2B_{k,2} + 6B_{k,3} = 0, \tag{24}$$

потому что при выполнении этих равенств $v_k(x) \equiv 0$, $k \in \mathbb{N}$.

Целю введения этих коэффициентов является получение

$$\lim_{\tau\to\pm\infty} \psi_k(\tau) = 0, \quad k = -2, -1, 0, 1, \ldots;$$

$$\lim_{\xi\to+\infty} w_k(\xi) = 0, \quad \lim_{\eta\to+\infty} q_k(\eta) = 0, \quad k = -1, 0, 1, \ldots.$$

Из соотношения (22) выводим

$$\psi_{-2}''(\tau) - \tau^2 \psi_{-2}(\tau) = 1, \quad \lim_{\tau\to\pm\infty} \psi_{-2}(\tau) = 0; \tag{25}$$

$$\psi_{-1}''(\tau) - \tau^2 \psi_{-1}(\tau) = 0, \quad \lim_{\tau\to\pm\infty} \psi_{-1}(\tau) = 0; \tag{26}$$

$$\psi_0''(\tau) - \tau^2 \psi_0(\tau) = -\tau^2 \psi_{-2}'', \quad \lim_{\tau\to\pm\infty} \psi_0(\tau) = 0; \tag{27}$$

$$\psi_{4k-3}''(\tau) - \tau^2 \psi_{4k-3}(\tau) = -\tau^4 \psi_{4k-5}, \quad \lim_{\tau\to\pm\infty} \psi_{4k-3}(\tau) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots; \tag{28}$$

$$\psi''_{4k-2}(\tau)-\tau^2\psi_{4k-2}(\tau)=-\tau^4\psi_{4k-4}+A_{k,0},\quad \lim_{\tau\to\pm\infty}\psi_{4k-2}(\tau)=0,\quad k=1,2,\dots; \tag{29}$$

$$\psi''_{4k-1}(\tau)-\tau^2\psi_{4k-1}(\tau)=-\tau^4\psi_{4k-3},\quad \lim_{\tau\to\pm\infty}\psi_{4k-1}(\tau)=0,\quad k=1,2,\dots; \tag{30}$$

$$\psi''_{4k}(\tau)-\tau^2\psi_{4k}(\tau)=-\tau^4\psi_{4k-2}+A_{k,2}\tau^2,\quad \lim_{\tau\to\pm\infty}\psi_{4k}(\tau)=0,\quad k=1,2,\dots. \tag{31}$$

Из леммы 1 следует существование и единственность решения задач (25)–(31). При $\tau\to\infty$ имеем

$$\psi_{-2}(\tau)=-\frac{1}{\tau^2}-\frac{6}{\tau^6}+O\Big(\frac{1}{\tau^{10}}\Big),\quad \psi_{-1}(\tau)=0,\quad \psi_0(\tau)=-\frac{6}{\tau^4}-O\Big(\frac{1}{\tau^8}\Big),\quad \psi_{4k-3}(\tau)=0,$$

$$\psi_2(\tau)=-\frac{A_{1,0}+6}{\tau^2}-O\Big(\frac{1}{\tau^6}\Big),\quad \psi_{4k-1}(\tau)=0,\quad \psi_4(\tau)=-(A_{1,2}+A_{1,0}+6)+O\Big(\frac{1}{\tau^4}\Big).$$

Нетрудно заметить, что если $A_{1,2}+A_{1,0}+6=0$, то $\psi_4(\tau)=O\Big(\frac{1}{\tau^4}\Big)$. Отсюда получаем

$$A_{1,2}=-A_{1,0}-6. \tag{32}$$

Ниже докажем, что всегда существуют такие числа $A_{k,0}$, $A_{k,2}$, с помощью которых можно получить соотношения

$$\psi_{4k-2}(\tau)=O\Big(\frac{1}{\tau^2}\Big),\quad \psi_{4k}(\tau)=O\Big(\frac{1}{\tau^4}\Big),\quad k=1,2,\dots.$$

Функции $q_k(\eta)$ и $w_k(\xi)$ строятся одинаково, и они отличаются только аргументом, поэтому исследуем только $w_k(\xi)$. Из равенства (23) имеем

$$lw_{-1}:=w''_{-1}(\xi)-2\xi w_{-1}(\xi)=1; \tag{33}$$

$$lw_0=-5\xi w''_{-1}(\xi)/2; \tag{34}$$

$$lw_1=-5\xi^2w_0(\xi)+2\xi^2w''_{-1}(\xi); \tag{35}$$

$$lw_2=-5\xi^2w_1(\xi)+4\xi^3w_0(\xi)-\xi^3w''_{-1}(\xi)/2+B_{1,0}; \tag{36}$$

$$lw_{3k}=-5\xi^2w_{3k-1}(\xi)+4\xi^3w_{3k-2}(\xi)-\xi^4w_{3k-3}(\xi)+B_{k,1}\xi; \tag{37}$$

$$lw_{3k+1}=-5\xi^2w_{3k}(\xi)+4\xi^3w_{3k-1}(\xi)-\xi^4w_{3k-2}(\xi)+B_{k,2}\xi^2; \tag{38}$$

$$lw_{3k+2}=-5\xi^2w_{3k+1}(\xi)+4\xi^3w_{3k}(\xi)-\xi^4w_{3k-1}(\xi)+B_{k,3}\xi^3+B_{k+1,0}. \tag{39}$$

Решения всех уравнений (33)–(39) должны удовлетворять условиям

$$w_j(0)=0,\quad \lim_{\xi\to+\infty}w_j(\xi)=0,\quad j=-1,0,1,\dots. \tag{40}$$

По доказанной выше лемме 2 все задачи (33)–(40) имеют единственные решения. Остается доказать, что $\lim_{\xi\to+\infty}w_j(\xi)=0$, $j=-1,0,1,\dots$.

При $\xi\to+\infty$ имеем

$$w_{-1}(\xi)=-\frac{1}{2\xi}-\frac{1}{2\xi^4}+O\Big(\frac{1}{\xi^7}\Big),\quad w_0(\xi)=-\frac{5}{4\xi^3}+O\Big(\frac{1}{\xi^6}\Big),$$

$$w_1(\xi)=-\frac{17}{8\xi^2}+O\Big(\frac{1}{\xi^5}\Big),\quad w_2(\xi)=-\frac{1}{2\xi}\Big(\frac{49}{8}+B_{1,0}\Big)+O(\frac{1}{\xi^4}),$$

$$w_3(\xi)=O\Big(\frac{1}{\xi^3}\Big),\ \text{если}\ \frac{5}{2}\Big(\frac{49}{8}+B_{1,0}\Big)-\frac{29}{4}+B_{1,1}=0;$$

$$w_4(\xi)=O\Big(\frac{1}{\xi^2}\Big),\ \text{если}\ -2\Big(\frac{49}{8}+B_{1,0}\Big)+\frac{17}{8}+B_{1,2}=0;$$

$$w_5(\xi) = O\Big(\frac{1}{\xi}\Big), \text{ если } \frac{1}{2}\Big(\frac{49}{8} + B_{1,0}\Big) + B_{1,3} = 0.$$

Поэтому неизвестные коэффициенты $B_{1,0}$, $B_{1,1}$, $B_{1,2}$, $B_{1,3}$ подберем так, чтобы

$$w_3(\xi) = O\Big(\frac{1}{\xi^3}\Big), \quad w_4(\xi) = O\Big(\frac{1}{\xi^2}\Big), \quad w_5(\xi) = O\Big(\frac{1}{\xi}\Big)$$

и выполнялись равенства (24).

Учитывая равенство (32), мы получаем следующие значения постоянных:

$$A_{1,0} = 2, \quad A_{1,2} = -8, \quad B_{1,0} = \frac{49}{8}, \quad B_{1,1} = -\frac{187}{8}, \quad B_{1,2} = \frac{179}{8}, \quad B_{1,3} = -\frac{49}{8}.$$

Лемма 3. *Существуют такие постоянные числа* $A_{k,0}$, $A_{k,2}$, $B_{k,0}$, $B_{k,1}$, $B_{k,2}$, $B_{k,3}$, *удовлетворяющие равенствам* (24), *с помощью которых можно получить соотношения*

$$\lim_{\tau\to\pm\infty} \psi_k(\tau) = 0, \quad k = -2, -1, 0, 1, \ldots;$$

$$\lim_{\xi\to+\infty} w_k(\xi) = 0, \quad \lim_{\eta\to+\infty} q_k(\eta) = 0, \quad k = -1, 0, 1, \ldots.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя метод математической индукции, докажем существование таких чисел и справедливость равенств для любого $k = 0, 1, \ldots$:

$$\psi_{4k-2}(\tau) = O\big(\tau^{-2}\big), \quad \psi_{4k}(\tau) = O\big(\tau^{-4}\big), \quad \tau\to\infty;$$

$$w_{3k-1}(\xi) = O\big(\xi^{-1}\big), \quad w_{3k}(\xi) = O\big(\xi^{-3}\big), \quad w_{3k+1}(\xi) = O\big(\xi^{-2}\big), \quad \xi\to+\infty.$$

Выше доказаны существование чисел $A_{1,0}$, $A_{1,2}$, $B_{1,0}$, $B_{1,1}$, $B_{1,2}$, $B_{1,3}$ и справедливость этих равенств, т. е. при $k = 1$ лемма верна.

Пусть $\forall k \in \mathbb{N}$

$$w_{3k-1}(\xi) = \frac{\alpha_{3k-1,1}}{\xi} + \frac{\alpha_{3k-1,4}}{\xi^4} + O\Big(\frac{1}{\xi^7}\Big), \quad w_{3k}(\xi) = \frac{\alpha_{3k,3}}{\xi^3} + O\Big(\frac{1}{\xi^6}\Big),$$

$$w_{3k+1}(\xi) = \frac{\alpha_{3k+1,2}}{\xi^2} + O\Big(\frac{1}{\xi^5}\Big), \quad \psi_{4k}(\tau) = \frac{\beta_{4k,4}}{\tau^4} + O\Big(\frac{1}{\tau^8}\Big),$$

где $\alpha_{i,j}$, $\beta_{4k,4}$ — const.

Тогда

$$lw_{3k+2}(\xi) = -5\xi^2 w_{3k+1}(\xi) + 4\xi^3 w_{3k}(\xi) - \xi^4 w_{3k-1}(\xi) + B_{k,3}\xi^3 + B_{k+1,0},$$

$$lw_{3k+3}(\xi) = -5\xi^2 w_{3k+2}(\xi) + 4\xi^3 w_{3k+1}(\xi) - \xi^4 w_{3k}(\xi) + B_{k+1,1}\xi,$$

$$lw_{3k+4}(\xi) = -5\xi^2 w_{3k+3}(\xi) + 4\xi^3 w_{3k+2}(\xi) - \xi^4 w_{3k+1}(\xi) + B_{k+1,2}\xi^2,$$

$$lw_{3k+5}(\xi) = -5\xi^2 w_{3k+4}(\xi) + 4\xi^3 w_{3k+3}(\xi) - \xi^4 w_{3k+2}(\xi) + B_{k+1,3}\xi^3 + B_{k+2,0},$$

$$\psi''_{4k+2}(\tau) - \tau^2\psi_{4k+2}(\tau) = -\tau^4\psi_{4k} + A_{k+1,0},$$

$$\psi''_{4k+4}(\tau) - \tau^2\psi_{4k+4}(\tau) = -\tau^4\psi_{4k+2} + A_{k+1,2}\tau^2$$

и при

$$A_{k+1,0} = -4\alpha_{3k+1,2} + 6\alpha_{3k,3} - 2\alpha_{3k-1,4}, \quad A_{k+1,2} = -A_{k+1,0} + \beta_{4k,4},$$

$$B_{k,3} = \alpha_{3k-1,1}, \quad B_{k+1,0} = -\beta_{4k,4} - \alpha_{3k+1,2} + 2\alpha_{3k,3} - \alpha_{3k-1,4},$$

$$B_{k+1,1} = \frac{17}{2}\alpha_{3k+1,2} - 9\alpha_{3k,3} + \frac{5}{2}\alpha_{3k-1,4} - \frac{5}{2}B_{k+1,0},$$

$$B_{k+2,1} = -9\alpha_{3k+1,2} + 8\alpha_{3k,3} - 2\alpha_{3k-1,4} + 2B_{k+1,0},$$

$$B_{k+3,1} = \frac{5}{2}\alpha_{3k+1,2} - 2\alpha_{3k,3} + \frac{1}{2}\alpha_{3k-1,4} - \frac{1}{2}B_{k+1,0}$$

получаем

$$\psi_{4k+2}(\tau) = O(\tau^{-2}), \quad \psi_{4k+4}(\tau) = O(\tau^{-4}), \quad \tau \to \infty;$$

$$w_{3k+2}(\xi) = O(\xi^{-1}), \quad w_{3k+3}(\xi) = O(\xi^{-3}), \quad w_{3k+4}(\xi) = O(\xi^{-2}), \quad \xi \to +\infty, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Следовательно,

$$\lim_{\tau \to \pm\infty} \psi_k(\tau) = 0, \quad k = -2, -1, 0, 1, \ldots;$$

$$\lim_{\xi \to +\infty} w_k(\xi) = 0, \quad \lim_{\eta \to +\infty} q_k(\eta) = 0, \quad k = -1, 0, 1, \ldots.$$

Лемма 3 доказана.

Перейдем теперь к обоснованию асимптотического разложения (20). Пусть

$$y_{\varepsilon,n}(x) = \sum_{k=-1}^{3n} \sqrt[3]{\varepsilon^k}\Big(q_k\Big(\frac{1+x}{\sqrt[3]{\varepsilon}}\Big) + w_k\Big(\frac{1-x}{\sqrt[3]{\varepsilon}}\Big)\Big) + \sum_{k=-2}^{4n} \sqrt[4]{\varepsilon^k}\psi_k\Big(\frac{x}{\sqrt[4]{\varepsilon}}\Big).$$

Исследуем остаточную функцию $R_\varepsilon(x) = y_\varepsilon(x) - y_{\varepsilon,n}(x)$.

Для остаточного члена получим задачу

$$\varepsilon R''_\varepsilon(x) - x^2(1-x^2)R_\varepsilon(x) = O(\varepsilon^{n+2/3}), \quad x \in (-1, 1),$$

$$R_\varepsilon(-1) = R_\varepsilon(1) = 0.$$

Отсюда следует, что $R_\varepsilon(x) = O(\varepsilon^{n-1/3})$, $x \in [-1, 1]$.

Следовательно, для решения задачи (18), (2) при $\varepsilon \to 0$ справедливо асимптотическое разложение (19). Теорема 2 доказана.

З а к л ю ч е н и е. Обобщенным методом пограничных функций построено равномерное асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для сингулярно возмущенного, линейного, неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с тремя точками поворота в действительной оси. Построенный асимптотический ряд представляет собой ряд Пюйзё (V. A. Puiseux).

Исследованную задачу можно обобщить, т. е. аналогично можно исследовать асимптотическое поведение решения задачи с $(n+1)$ точкой поворота:

$$\varepsilon y''(x) - x^k(1-x)^{k_1}(1-nx)^{2k_2}\ldots(n-1-nx)^{2k_n}a(x)y(x) = f(x,\varepsilon), \quad x \in (0, 1),$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0,$$

где $f(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k f_k(x)$, $0 < a(x), f_k(x) \in C^\infty[0,1]$, k, k_1, $\ldots, k_n$, $1 < n$ — конечные натуральные числа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вазов В.** Асимптотические разложения решений дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968. 465 с.
2. **Olver F.M.** Connection formulas for second-order differential equations with multiple turning points // SIAM. J. Math. Anal. 1977. Vol. 8, no. 1. P. 127–154.
3. **Olver F.M.** Connection formulas for second-order differential equations having an arbitrary number of turning points of arbitrary multiplicities // SIAM. J. Math. Anal. 1977. Vol. 8, no. 4. P. 673–700.
4. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука; Физматлит, 1989. 336 с.
5. **Ильин А.М., Данилин А.Р.** Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 248 с.
6. **Alymkulov K.** Method of boundary layer function to solve the boundary value problem for a singularly perturbed differential equation of the order two with a turning point // Universal J. Appl. Math. 2014. Vol. 2, no. 3. P. 119–124.

7. **Алымкулов К., Халматов А.А.** Метод погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой // Мат. заметки. 2012. Т. 92, вып. 6. С. 819–824.
8. **Алымкулов К., Асылбеков Т.Д., Долбеева С.Ф.** Обобщение метода погранфункций для решения краевой задачи для бисингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка // Мат. заметки. 2013. Т. 94, вып. 4. С. 484–487.
9. **Алымкулов К., Зулпукаров А.З.** Равномерная асимптотика решения краевой задачи сингулярно возмущенного уравнения второго порядка со слабой особенностью // Докл. АН. 2004. Т. 398, № 5. С. 583–586.
10. **Турсунов Д.А.** Равномерное приближение решения краевой задачи бисингулярно возмущенного уравнения второго порядка // Вестн. ОшГУ. 2008. №. 5. С. 240–243.
11. **Турсунов Д.А.** Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с двумя точками поворота // Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2013. 1(21). С. 34–40.
12. **Федорюк М.В.** Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.

Турсунов Дилмурат Абдиллажанович
д-р физ.-мат. наук, доцент
профессор кафедры высшей математики
Институт МИиИТ УрГПУ
e-mail: d_osh@rambler.ru

Поступила 7.04.2015