

УДК 517.977

**ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИИ  
ОБОБЩЕННОЙ МАШИНОЙ ДУБИНСА<sup>1</sup>****Ю. И. Бердышев**

Исследуется задача об оптимальном по быстродействию сближении нелинейной системы четвертого порядка, описывающей движение самолета в горизонтальной плоскости, с двумя неподвижными точками в заданной очередности.

Ключевые слова: управление, нелинейный объект, сближение.

Yu. I. Berdyshev. On a time-optimal control for the generalized Dubins car.

We study the problem of time-optimal approach of a fourth-order nonlinear system describing the motion of an airplane in a horizontal plane to two fixed points in a given order.

Keywords: control, nonlinear object, approach.

**1. Введение**

Рассматривается задача, в которой управляемый объект, описываемый нелинейной системой четвертого порядка, стремится за счет выбора своего управления осуществить за кратчайшее время сближение с двумя неподвижными точками, находящимися на плоскости “геометрических координат”. Очередность сближения с точками предполагается заданной. Используемая система является обобщением машины Дубинса [1] — простейшей моделью движения автомобиля, самолета в горизонтальной плоскости с переменной управляемой скоростью и управляемым углом разворота [2; 3]. Эта система отличается от машины Дубинса дополнительным (четвертым) дифференциальным уравнением, описывающим изменение величины скорости, и дополнительным управляющим параметром. В частном случае, когда скорость объекта не подвержена управлению и постоянна, а управлять можно только углом разворота, указанная модель описывается системой третьего порядка, которую использовал Р. Айзекс [4] в 1951 г. при постановке задачи “шофер-убийца”, а затем уже в 1957 г. ее исследовал Л. Е. Дубинс [1]. По-видимому, эту систему можно было бы также назвать машиной Маркова, так как еще в 1889 г. А. А. Марковым [5] была решена задача об построении кривой наименьшей длины и ограниченной кривизны, соединяющей две заданные точки.

Настоящая работа продолжает исследование, опубликованное в журнале “Прикладная математика и механика” в 1975 г. [2]. В этой статье на основании принципа максимума Л. С. Понтрягина [6] установлена структура оптимального управления и оптимальной траектории. Предложено правило построения программного управления, удовлетворяющего принципу максимума. Доказано, что предлагаемое правило определяет оптимальное управление для случая, когда целевая точка находится вне некоторой ограниченной области  $G$ . Следует отметить, что в кандидатской диссертации [7], а затем в книге [8] было доказано, что указанное правило определяет оптимальное управление и в случае, когда целевая точка находится в области  $G$ . Решить поставленную задачу удалось благодаря предварительно выявленным

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 14-08-00419, 15-01-07909).

свойствам исходной системы и системы вспомогательных переменных, фигурирующих в формулировке принципа максимума [6]. В частности, удалось полностью проинтегрировать эти системы на участках постоянства управляющих функций.

## 2. Постановка задач

Пусть движение точки в горизонтальной плоскости  $xy$  описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений [2]

$$\dot{x} = v \cos \theta, \quad \dot{y} = v \sin \theta, \quad \dot{\theta} = \frac{K_1}{v} u_1, \quad \dot{v} = K_2 u_2, \quad (2.1)$$

где  $\theta$  — угол между осью  $x$  и направлением вектора скорости  $\vec{v} \triangleq (\dot{x}, \dot{y})$ ;  $K_1 > 0$ ,  $K_2 \geq 0$  — заданные постоянные;  $v$  — величина скорости движения точки;  $u_1, u_2$  — управляющие параметры, удовлетворяющие ограничениям

$$|u_1| \leq 1, \quad |u_2| \leq 1. \quad (2.2)$$

Значение  $v = 0$  является особым для системы (2.1). Поэтому целесообразно (см. [8, с. 114]) в знаменателе правой части четвертого уравнения вместо величины  $v$  подставить функцию

$$f(v) = \begin{cases} (2 - \sqrt{2}) v_{5\pi}, & v \leq 0, \\ 2v_{5\pi} - \sqrt{2(v_{5\pi})^2 - v^2}, & 0 < v < v_{5\pi}, \\ v, & v \geq v_{5\pi}, \end{cases}$$

где  $v_{5\pi}$  — величина скорости, которая получается в результате поворота вектора скорости движущейся точки на угол  $5\pi$  при начальном значении  $v_0$ ,  $v_0 > 0$ , и управлении  $u_1(t) = 1$ ,  $u_2(t) = -1$ ,  $t \geq 0$ . Заметим, функция  $f(v)$  ограничена снизу величиной  $(2 - \sqrt{2})v_{5\pi}$  и непрерывна вместе со своей производной на всей числовой оси.

Система (2.1) описывает простейшую модель движения автомобиля, самолета в горизонтальной плоскости  $xy$  с переменной управляемой скоростью. Под траекторией системы (2.1) целесообразно понимать проекцию ее фазовой траектории на плоскость  $xy$ . Многообразие  $x = 0$ ,  $y = 0$  соответствует на этой плоскости начало координат  $O = (0, 0)$ .

Объект (2.1) функционирует на конечном, достаточно большом, промежутке времени  $T = [0, t^0]$ . Его начальное состояние задано, а именно

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad v(0) = v_0 \quad (v_0 > 0). \quad (2.3)$$

В качестве множества допустимых управлений преследователя выберем  $\mathbf{U}$  — множество всех измеримых по Борелю двумерных функций  $U = (u_1, u_2)$ ,  $u_i : T \rightarrow [-1, 1]$  ( $i = 1, 2$ ). Каждое управление  $U \in \mathbf{U}$  порождает движение, исходящее из начальной позиции (2.3), которое будем обозначать через  $(x_U, y_U, \theta_U, v_U) = \{(x_U(t), y_U(t), \theta_U(t), v_U(t)), t \in T\}$ . Под траекторией системы (2.1), порожденной управлением  $U \in \mathbf{U}$ , целесообразно понимать проекцию ее фазовой траектории  $(x_U, y_U, \theta_U, v_U)$  на плоскость  $xy$ . Точку с координатами  $x_0, y_0$  обозначим через  $M_0$ .

Пусть  $x_1, y_1$  — координаты заданной точки  $W_1$ . Будем говорить, что управление  $U \in \mathbf{U}$  обеспечивает сближение (встречу) системы (2.1) с точкой  $W_1$ , если найдется такой момент времени  $t_1$ , при котором будут выполнены соотношения  $x_U(t_1) = x_1$ ,  $y_U(t_1) = y_1$ .

*Основная задача* состоит в определении моментов времени  $t_i$ ,  $i \in \overline{1, 2}$ , и такого управления  $U \in \mathbf{U}$ , обеспечивающего последовательное сближение объекта (2.1) с двумя заданными неподвижными точками  $W_i = (x_i, y_i)$ ,  $i \in \overline{1, 2}$ , в порядке возрастания их номеров в соответствующие моменты времени  $t_i$ , при котором общее время сближения  $t_2$  является наименьшим.

Воспользуемся основными результатами исследования [2] следующей задачи.

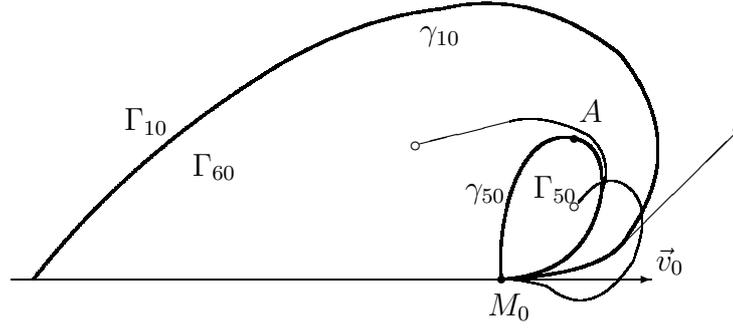


Рис. 1. Разбиение полуплоскости (3.1) на области  $\Gamma_{10}, \Gamma_{60}, \Gamma_{50}$ . Оптимальные траектории при различных местоположениях начала координат изображены тонкими линиями.

Вспомогательная задача состоит в построении оптимального по быстродействию управления  $U^0 \in \mathbf{U}$ , доставляющего изображающую точку  $(x, y, \theta, v)$  системы (2.1) из начального положения (2.3) на многообразие  $x = 0, y = 0$ .

Использование функции  $f(v)$  позволяет выполнить все условия теоремы (см. [9, с. 284]) существования оптимальных управлений в рассматриваемых задачах.

### 3. Решение вспомогательной задачи

Траекторию, порожденную управлением  $u_1(t) = 1, u_2(t) = 1, t \in [0, \tau]$ , при начальных условиях (2.3) назовем *траекторией разгона*. Траекторию, порожденную управлением  $u_1(t) = 1, u_2(t) = -1, t \in [0, s]$ , при тех же начальных условиях назовем *траекторией торможения*, а фазовую точку системы (2.1), соответствующую моменту  $s$ , обозначим через  $(x^-(s), y^-(s), \theta^-(s), v^-(s))$ . Известно [2], что указанные траектории являются логарифмическими спиралями.

Исходя из соображений симметрии, достаточно рассмотреть случай, когда начало координат  $O = (0, 0)$  находится в полуплоскости

$$(x - x_0) \sin \theta_0 - (y - y_0) \cos \theta_0 \geq 0. \quad (3.1)$$

Эта полуплоскость разбивается на три части  $\Gamma_{10}, \Gamma_{60}, \Gamma_{50}$ , которые изображены в [8, рис. 37]. Там же приведены формулы вычисления границ  $\gamma_{10}, \gamma_{50}$  этих областей и определено правило построения оптимального управления. Для полноты изложения приведем здесь этот рисунок (рис. 1) и указанное правило. Полагаем, что  $\gamma_{1s}$  — кривая, построенная для позиции  $(x^-(s), y^-(s), \theta^-(s), v^-(s))$  как для начальной аналогично кривой  $\gamma_{10}$ .

**Правило.** Выбираем управление

$$u_1(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \tau), \\ 0, & t \in [\tau, \vartheta], \end{cases} \quad u_2(t) = 1, \quad t \in [0, \vartheta], \quad \text{при } O \in \Gamma_{10}; \quad (3.2)$$

$$u_1(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \tau), \\ 0, & t \in [\tau, \vartheta], \end{cases} \quad u_2(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, s), \\ 1, & t \in [s, \vartheta], \end{cases} \quad \text{при } O \in \Gamma_{60}; \quad (3.3)$$

$$u_1(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, t_1), \\ 1, & t \in [t_1, \tau), \\ 0, & t \in [\tau, \vartheta], \end{cases} \quad u_2(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, s), \\ 1, & t \in [s, \vartheta], \end{cases} \quad \text{при } O \in \Gamma_{50}, \quad (3.4)$$

где  $\tau$  — первый момент, в который вектор скорости  $\vec{v} = (v \cos \theta, v \sin \theta)$  направлен в начало координат;  $s$  — первый момент, в который кривая  $\gamma_{1s}$  проходит через начало координат;  $t_1$  — первый момент, в который граница области  $\Gamma_{5t_1}$ , построенная для позиции, в которую система попадает в момент  $t = t_1$  в результате движения с управлением  $u_1(t) = -1$ ,  $u_2(t) = -1$ ,  $t \in [0, t_1]$ , как для начальной проходит через точку  $O$  (область  $\Gamma_{5t_1}$  строится аналогично области  $\Gamma_{50}$ );  $\vartheta$  — момент сближения с точкой  $O$ .

На рис. 1 тонкими линиями изображены оптимальные траектории, соответствующие различным местоположениям начала координат, которые отмечены кружками. Первая цифра индекса у области  $\Gamma_{i0}$  ( $i = 1, 5, 6$ ) указывает на ее порядковый номер, вторая цифра индекса указывает, что эта область строится в начальный момент времени  $t_0 = 0$ .

На траектории торможения отметим точку  $A$ , в которой вектор скорости ортогонален отрезку  $M_0A$ . Заметим, что дуга  $M_0A$  траектории торможения является частью границы  $\gamma_{50}$ , а кривая  $\gamma_{10}$  до некоторой точки совпадает с траекторией разгона, а затем охватывает ее.

#### 4. Последовательное сближение с двумя неподвижными точками

При определении решения основной задачи воспользуемся результатами работ [8; 10]. Согласно теореме 7.1 из [8] оптимальное управление удовлетворяет обобщенному принципу максимума и условиям выравнивания гамильтониана. В целях применения этой теоремы дополним систему (2.1) пятым уравнением

$$\dot{z} = 1, \quad z(0) = 0.$$

Тогда векторы вспомогательных переменных  $\psi_1 = (\psi_{11}, \dots, \psi_{15})'$ ,  $\psi_2 = (\psi_{21}, \dots, \psi_{25})'$ , используемые соответственно на отрезках  $[0, t_1]$ ,  $[t_1, t_2]$  (“штрих” сверху означает транспонирование), при условии  $v(t) \geq v_{5\pi}$  будут удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} \psi_{21} = \Lambda_{21}, \quad \psi_{22} = \Lambda_{22}, \quad \psi_{23} = \Lambda_{21}(y - y_2) - \Lambda_{22}(x - x_2), \quad \psi_{25} = -1, \\ \dot{\psi}_{24} = -\Lambda_{21} \cos \theta - \Lambda_{22} \sin \theta + \frac{K_1}{v^2} \psi_{23} u_1; \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \psi_{11} = \Lambda_{11}, \quad \psi_{12} = \Lambda_{12}, \quad \psi_{13} = \Lambda_{11}(y - y_1) - \Lambda_{12}(x - x_1), \quad \psi_{15} = 0, \\ \dot{\psi}_{14} = -\Lambda_{11} \cos \theta - \Lambda_{12} \sin \theta + \frac{K_1}{v^2} \psi_{13} u_1 \end{aligned} \quad (4.2)$$

( $\Lambda_{i1}, \Lambda_{i2}$ ,  $i = 1, 2$ , — постоянные, подлежащие определению), а также краевым условиям

$$\psi_{13}(t_1) = \psi_{23}(t_2) = 0, \quad \psi_{14}(t_1) = \psi_{24}(t_2) = 0.$$

Полагаем

$$\bar{\psi}_{2i} = \psi_{2i}, \quad \bar{\psi}_{1i} = \psi_{1i} + \psi_{2i}, \quad i \in \overline{1, 5}; \quad (4.3)$$

$$H_2 = \bar{\psi}_{21} v \cos \theta + \bar{\psi}_{22} v \sin \theta + \bar{\psi}_{23} \frac{K_1}{v} u_1 + \bar{\psi}_{24} K_2 u_2 + \bar{\psi}_{25};$$

$$H_1 = \bar{\psi}_{11} v \cos \theta + \bar{\psi}_{12} v \sin \theta + \bar{\psi}_{13} \frac{K_1}{v} u_1 + \bar{\psi}_{14} K_2 u_2 + \bar{\psi}_{15}.$$

Нетрудно показать, что дифференциальное уравнение для  $\bar{\psi}_{14}$  имеет вид

$$\dot{\bar{\psi}}_{14} = -(\Lambda_{11} + \Lambda_{21}) \cos \theta - (\Lambda_{12} + \Lambda_{22}) \sin \theta + \frac{K_1}{v^2} \bar{\psi}_{13} u_1. \quad (4.4)$$

Согласно обобщенному принципу максимума [8] справедливы соотношения

$$u_1(t) = \text{sign} \bar{\psi}_{k3}(t), \quad \bar{\psi}_{k3}(t) \neq 0, \quad u_2(t) = \text{sign} \bar{\psi}_{k4}(t), \quad \bar{\psi}_{k4}(t) \neq 0, \quad t \in [t_{k-1}, t_k], \quad k = 1, 2. \quad (4.5)$$

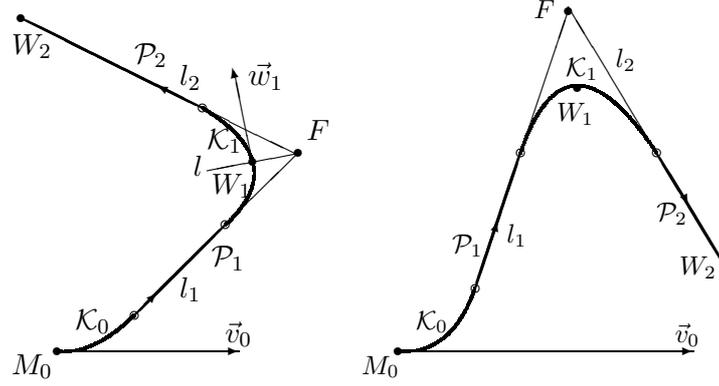


Рис. 2. Траектории обхода точек  $W_1, W_2$ . Точки стыковки криволинейных и прямолинейных участков траекторий отмечены кружками.

Ввиду наличия только двух целевых точек условие выравнивания будет единственным и представимым в виде

$$\begin{aligned} & \bar{\psi}_{21}(t_1)v_U(t_1)\cos\theta_U(t_1) + \bar{\psi}_{22}(t_1)v_U(t_1)\sin\theta_U(t_1) + \bar{\psi}_{23}(t_1)\frac{K_1}{v_U(t_1)}u_1 + \bar{\psi}_{24}(t_1)K_2u_2 \\ & = \bar{\psi}_{11}(t_1)v_U(t_1)\cos\theta_U(t_1) + \bar{\psi}_{12}(t_1)v_U(t_1)\sin\theta_U(t_1) + \bar{\psi}_{13}(t_1)\frac{K_1}{v_U(t_1)}u_1 + \bar{\psi}_{14}(t_1)K_2u_2. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом соотношений (4.1)–(4.3),  $\bar{\psi}_{14}(t_1) = \bar{\psi}_{24}(t_1)$  вытекает равенство

$$\Lambda_{11}\cos\theta_U(t_1) + \Lambda_{12}\sin\theta_U(t_1) = 0, \quad (4.6)$$

из которого следует, что для оптимальности траектории  $\mathcal{L}$ , порожденной управлением  $U = (u_1, u_2)$ , необходимо, чтобы вектор  $(\Lambda_{11}, \Lambda_{12})$  был перпендикулярен вектору скорости объекта (2.1) в момент  $t_1$  его встречи с точкой  $W_1$ .

Полагая, что расстояния между точками  $M_0, W_1$ , и  $W_1, W_2$  достаточно велики, а именно только такой случай здесь исследуется, и используя первое соотношение в (4.5), вид функций  $\psi_{23}(t), \psi_{13}(t)$  (4.1), можно показать, что любая траектория  $\mathcal{L}$ , претендующая на оптимальность, должна состоять из двух криволинейных участков  $\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1$  и двух прямолинейных участков  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ , первый из которых соединяет  $\mathcal{K}_0$  с  $\mathcal{K}_1$ , а второй соединяет  $\mathcal{K}_1$  с точкой  $W_2$  (рис. 2). Доказательство этого факта, которое здесь опускается, проводится по аналогии с установлением структуры оптимальной траектории во вспомогательной задаче [7]. Кроме того, можно также доказать, что величина скорости при движении по траектории  $\mathcal{L}$ , всегда больше, чем  $v_{5\pi}$ . В этом случае функция  $f(v)$  по определению равна  $v$ .

Пусть  $l_1$  и  $l_2$  — прямые, содержащие соответственно  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$ ;  $F$  — точка пересечения  $l_1$  с  $l_2$ ;  $l$  — прямая, проходящая через точки  $W_1$  и  $F$ . Поскольку вектор  $(\Lambda_{11}, \Lambda_{12})$  является направляющим для прямой  $l$ , то из равенства (4.6) следует ортогональность этой прямой вектору  $\bar{w}_1 = (\cos\theta_U(t_1), \sin\theta_U(t_1))$ .

Построим траекторию  $\mathcal{L}_0$ , состоящую из двух криволинейных участков  $\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1$  и двух прямолинейных участков  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ , по которой объект (2.1) только разгоняется, т. е.  $u_2(t) = 1, t \in [0, t_2]$ . При этом на криволинейных участках полагаем  $u_1(t)$  равной  $+1$  либо  $-1$ , а на прямолинейных участках полагаем  $u_1(t) = 0$ . Возможны два случая взаимного расположения точек  $M_0, W_1, W_2$ , в первом из которых поворот по  $\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1$  происходит в одном направлении (против часовой стрелки), а во втором — в различных направлениях (например, вначале против часовой стрелки, а затем по часовой стрелке) (см. рис. 2). Здесь рассматривается случай разнонаправленного движения по дугам  $\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1$ . Моменты стыковки  $\mathcal{K}_0$  с  $\mathcal{P}_1, \mathcal{K}_1$  с  $\mathcal{P}_1$  и с  $\mathcal{P}_2$  обозначим соответственно через  $\tau_0, \tau_1$  и  $\tau_2$ .

Определим условия, при которых за счет выбора параметра  $\tau_0$  можно добиться того, чтобы управление  $U = (u_1, u_2)$ , порождающее траекторию  $\mathcal{L}_0$ , удовлетворяло принципу максимума (4.5) и условию выравнивания (4.6).

Двигаясь по кривой  $\mathcal{K}_0$  с управлением ( $u_1(t) = 1, u_2(t) = 1, t \geq 0$ ) отметим первый момент  $\tau_*$ , в который вектор скорости объекта направлен в точку  $W_1$ . Продолжим движение с управлением ( $u_1(t) = 1, u_2(t) = 1, t \geq \tau_*$ ) до момента  $\tau_0$  ( $\tau_0$  — параметр, подлежащий определению,  $\tau_0 > \tau_*$ ). После момента  $\tau_0$  до некоторого момента  $\tau_1$  осуществим движение по прямой  $l_1$ , проходящей через точку  $(x_U(\tau_0), y_U(\tau_0))$  в направлении вектора с компонентами  $\cos \theta_U(\tau_0), \sin \theta_U(\tau_0)$ . Очевидно,  $\mathcal{P}_1 \subset l_1$ . С момента  $\tau_1, \tau_1 > \tau_0$ , двигаемся с управлением

$$u_1(t) = -1, \quad u_2(t) = 1, \quad t \geq \tau_1, \quad (4.7)$$

по кривой  $\mathcal{K}_1$ . Момент  $\tau_1$  выберем так, чтобы кривая  $\mathcal{K}_1$  проходила через точку  $W_1$ . Двигаемся под действием управления (4.7) до момента  $\tau_2$ , в который вектор скорости объекта будет направлен в точку  $W_2$ . Пусть  $W = (x_U(\tau_2), y_U(\tau_2)); l_2$  — прямая, проходящая через  $W$  и  $W_2$ .

Если прямая  $l$  ортогональна вектору  $\bar{w}_1 = (\cos \theta_U(t_1), \sin \theta_U(t_1))$  (см. рис. 2), то траектория  $\mathcal{L}_0$  удовлетворяет условию выравнивания (4.6). В противном случае момент  $\tau_0$  будем варьировать до тех пор, пока соотношение (4.6) не будет выполнено.

В силу построения прямых  $l_1, l_2$  управление  $U$ , порождающее траекторию  $\mathcal{L}_0$ , удовлетворяет первому соотношению в (4.5). Определим случаи, в которых второе равенство в (4.5) также имеет место. Для этого исследуем функции  $\bar{\psi}_{14}(t), \bar{\psi}_{24}(t)$ , действующие соответственно на отрезках  $[0, t_1], [t_1, t_2]$  и удовлетворяющие уравнениям (4.4), (4.1). Предварительно заметим, что присутствующие в этих уравнениях величины  $\Lambda_{21}, \Lambda_{22}, \Lambda_{11} + \Lambda_{21}, \Lambda_{12} + \Lambda_{22}$  являются коэффициентами прямых  $l_2, l_1$ . Действительно, в силу соотношений (4.1)–(4.3) равенства  $\bar{\psi}_{23} = 0, \bar{\psi}_{13} = 0$  принимают вид

$$\begin{aligned} \Lambda_{21}(y - y_2) - \Lambda_{22}(x - x_2) &= 0, \\ (\Lambda_{11} + \Lambda_{21})y - (\Lambda_{12} + \Lambda_{22})x + [\Lambda_{12}x_1 - \Lambda_{11}y_1 + \Lambda_{22}x_2 - \Lambda_{21}y_2] &= 0. \end{aligned}$$

Коэффициенты прямой  $l_2$  можно нормировать, т. е. положить

$$\Lambda_{21} = \cos \theta_U(\tau_2), \quad \Lambda_{22} = \cos \theta_U(\tau_2). \quad (4.8)$$

Пусть  $t_1$  — момент встречи объекта (2.1), движущегося по траектории  $\mathcal{L}_0$ , с точкой  $W_1$ . Используя фазовое положение  $(x_U(t_1), y_U(t_1), \theta_U(t_1), v_U(t_1))$  в качестве начального, построим области  $\Gamma_{1t_1}, \Gamma_{6t_1}, \Gamma_{5t_1}$  и применим правило выбора управления (3.2)–(3.4).

Обозначим через  $\bar{\psi}_{24}(\tau_2; t)$  решение уравнения (4.1) при условиях (4.8),  $\bar{\psi}_{24}(\tau_2; t_2) = 0$ . Согласно результатам работы [2] при  $W_2 \in \Gamma_{1t_1}$  функция  $\bar{\psi}_{24}(\tau_2; t)$  выпукла вверх (рис. 3а), имеет место неравенство

$$\bar{\psi}_{24}(\tau_2; t) > 0, \quad t \in (t_1, t_2),$$

а управление  $U$  на отрезке времени  $[t_1, t_2]$  удовлетворяет второму соотношению в (4.5) при  $\bar{\psi}_{24}(t) \stackrel{\Delta}{=} \bar{\psi}_{24}(\tau_2; t)$  (символ  $\stackrel{\Delta}{=}$  означает равенство по определению).

Пусть  $W'_1$  — точка на прямой  $l_1$ , в которую объект (2.1) попадет в момент  $t_1$ , если на отрезке  $[\tau_0, t_1]$  будет продолжать двигаться по прямой  $l_1$ . На промежутке  $[0, t_1]$  определим функцию  $\bar{\psi}_{14}(\tau_0; t)$  как решение уравнения (4.4) при условии  $\bar{\psi}_{14}(\tau_0; t_1) = 0$  и в предположении, что на отрезке  $[0, \tau_0]$  движение объекта (2.1) происходит по участку  $\mathcal{K}_0$ , а на промежутке  $[\tau_0, t_1]$  — по прямой  $l_1$  до точки  $W'_1$ .

Если  $W'_1 \in \Gamma_{10}$ , то функция  $\bar{\psi}_{14}(\tau_0; t)$  выпукла вверх и

$$\bar{\psi}_{14}(\tau_0; t) > 0, \quad t \in (0, t_1). \quad (4.9)$$

Обозначим через  $\bar{\psi}_{14}^*(t)$  функцию, которая на отрезке  $[0, \tau_1]$  совпадает с  $\bar{\psi}_{14}(\tau_0; t)$ , а на промежутке  $[\tau_1, t_1]$  является решением уравнения (4.4) при условиях, что движение на  $[\tau_1, t_1]$

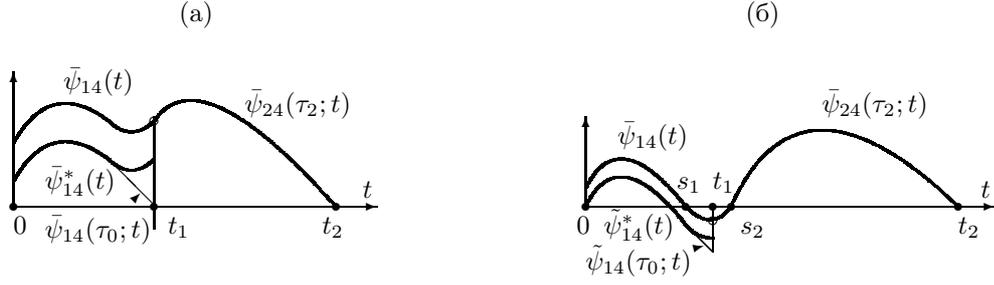


Рис. 3. Графики функций  $\bar{\psi}_{14}(t)$ ,  $\bar{\psi}_{24}(\tau_2; t)$ : (а) — при  $W_2 \in \Gamma_{1t_1}$ , (б) — при  $W_2 \notin \Gamma_{1t_1}$ . Кругом отмечены точки их стыковки.

происходит по дуге кривой  $\mathcal{K}_1$  и  $\bar{\psi}_{14}(\tau_1) = \bar{\psi}_{14}(\tau_0; \tau_1)$ . Поскольку на интервале времени  $(\tau_1, t_1)$  производная  $\dot{\bar{\psi}}_{14}(\tau_0; t) = -1$ , а производная  $\dot{\bar{\psi}}_{14}^*(t) > -1$ , то  $\bar{\psi}_{14}^*(t_1) > 0$ . При  $W'_1 \in \Gamma_{10}$  имеем  $\bar{\psi}_{14}^*(t) > 0$ ,  $t \in (0, t_1)$  (рис. 3а).

Если

$$\bar{\psi}_{14}^*(t_1) \leq \bar{\psi}_{24}(\tau_2; t_1), \quad (4.10)$$

то функция  $\bar{\psi}_{14}(t) \triangleq \bar{\psi}_{14}^*(t) + \bar{\psi}_{24}(\tau_2; t_1) - \bar{\psi}_{14}^*(t_1)$  будет положительной на отрезке времени  $[0, t_1]$ . Можно показать, что при условиях  $W_2 \in \Gamma_{1t_1}$ ,  $W'_1 \in \Gamma_{10}$ , (4.10) траектория  $\mathcal{L}_0$  будет единственной, удовлетворяющей соотношениям (4.5), (4.6), а поэтому будет оптимальной. Таким образом, доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** Для того чтобы управление  $U$ , порождающее траекторию  $\mathcal{L}_0$ , было оптимальным, достаточно выполнения следующих трех условий:  $W_2 \in \Gamma_{1t_1}$ ,  $W'_1 \in \Gamma_{10}$  (4.10).

Графики функций  $\bar{\psi}_{24}(\tau_2; t)$ ,  $\bar{\psi}_{14}(\tau_0; t)$ ,  $\bar{\psi}_{14}^*(t)$ ,  $\bar{\psi}_{14}(t)$  при условиях этой теоремы изображены на рис. 3а.

**Теорема 2.** Для того чтобы управление  $U$ , порождающее траекторию  $\mathcal{L}_0$ , было оптимальным, необходимо выполнение соотношения  $W_2 \in \Gamma_{1t_1}$  и неравенства  $\bar{\psi}_{14}^*(t_1) - \bar{\psi}_{14}^*(0) \leq \bar{\psi}_{24}(\tau_2; t_1)$ .

**Доказательство.** Если  $W_2 \notin \Gamma_{1t_1}$ , то ввиду ограничения на выбор целевых точек справедливо включение  $W_2 \in \Gamma_{6t_1}$ . Тогда найдутся такие моменты  $\tau_2, s_2, t_2$ ,  $t_1 < s_2 < \tau_2 < t_2$ , при которых решение  $\bar{\psi}_{24}(\tau_2; t)$  уравнения (4.1) при условиях (4.8),  $\tau = \tau_2$ ,  $\bar{\psi}_{24}(\tau_2; t_2) = 0$  будет удовлетворять соотношениям

$$\bar{\psi}_{24}(\tau_2; t) < 0, \quad t \in [t_1, s_2]; \quad \bar{\psi}_{24}(\tau_2; s_2) = 0; \quad \bar{\psi}_{24}(\tau_2; t) > 0, \quad t \in (s_2, t_2). \quad (4.11)$$

Поэтому при выбранной управляющей функции  $u_2(t) \equiv 1$ ,  $t \in [0, t_2]$  функция  $\bar{\psi}_{24}(t) \triangleq \bar{\psi}_{24}(\tau_2; t)$  на полуинтервале  $[t_1, s_2]$  не будет удовлетворять второму равенству в (4.5). Следовательно, управление  $U = (u_1, u_2)$ , у которого вторая компонента тождественно равна единице, не может быть оптимальным.

При нарушении неравенства  $\bar{\psi}_{14}^*(t_1) - \bar{\psi}_{14}^*(0) \leq \bar{\psi}_{24}(\tau_2; t_1)$  найдется момент  $s_0$ ,  $s_0 \in (0, t_1)$ , при котором ранее построенная функция  $\bar{\psi}_{14}(t) \triangleq \bar{\psi}_{14}^*(t) + \bar{\psi}_{24}(\tau_2; t_1) - \bar{\psi}_{14}^*(t_1)$  будет отрицательной на полуинтервале  $[0, s_0]$ . Но это противоречит второму соотношению в (4.5). Таким образом, теорема доказана.

## 5. Построение управления при нарушении условий теоремы 1

Если имеют место включения  $W_2 \in \Gamma_{1t_1}$ ,  $W'_1 \in \Gamma_{10}$ , а неравенство (4.10) не выполняется, то может существовать полуинтервал  $[0, s_0] \subset [0, t_1]$ , на котором функция  $\bar{\psi}_{14}(t)$  будет строго

отрицательной. В этом случае траектория  $\mathcal{L}_0$  не будет оптимальной, так как ее порождающее управление не удовлетворяет принципу максимума (4.5). Здесь на полуинтервале  $[0, s_0)$  надо полагать  $u_2(t) = -1$ .

Перейдем к рассмотрению случая, когда  $W_2 \notin \Gamma_{1t_1}$ ,  $W'_1 \in \Gamma_{10}$ . Как было отмечено при доказательстве теоремы 2, ввиду ограничения на выбор целевых точек условия  $W_2 \notin \Gamma_{1t_1}$ ,  $W_2 \in \Gamma_{6t_1}$  эквивалентны, а при выполнении последнего из них имеют место соотношения (4.11). Кроме того, известно [2], что при этом же условии управление (3.3), где  $\tau = \tau_2$ ,  $s = s_2$ ,  $\vartheta = t_2$ , будет не только удовлетворять необходимым условиям оптимальности, но и обеспечит перевод объекта (2.1) из положения  $(x_U(t_1), y_U(t_1)), \theta_U(t_1), v_U(t_1))$  в точку  $W_2$  за наименьшее время, равное  $t_2 - t_1$ . В указанном случае положение прямой  $l_2$  изменится. Следовательно, условие выравнивания (4.6) нарушится и для его выполнения необходима корректировка момента  $\tau_0$ .

Заметим, что при условии (4.6) производные функций  $\bar{\psi}_{24}(t)$ ,  $\bar{\psi}_{14}(t)$  в момент  $t_1$  совпадают. При этом ввиду краевых условий справедливы соотношения  $\bar{\psi}_{14}(t_1) = \bar{\psi}_{24}(t_1) \stackrel{\Delta}{=} \bar{\psi}_{24}(\tau_2; t_1)$ . Поэтому функция  $\bar{\psi}_{14}(t)$  отрицательна на интервале  $(t_1 - \varepsilon, t_1)$ , где  $\varepsilon$  — достаточно малое положительное число.

Определим наибольший момент времени  $s_1$ ,  $s_1 < t_1$ , при котором  $\bar{\psi}_{14}(s_1) = 0$ ;  $\bar{\psi}_{14}(t) < 0$ ,  $t \in (s_1, t_1)$ . Пусть  $\tilde{\psi}_{14}(\tau_0; t)$  — решение уравнения (4.4) при условии  $\tilde{\psi}_{14}(\tau_0; 0) = 0$  и в предположении, что на отрезке  $[0, \tau_0]$  движение объекта (2.1) происходит по участку  $\mathcal{K}_0$ , а на отрезке  $[\tau_0, t_1]$  — по прямой  $l_1$  до точки  $W'_1$ .

Очевидно,

$$\tilde{\psi}_{14}(\tau_0; t) = \bar{\psi}_{14}(\tau_0; t) - \bar{\psi}_{14}(\tau_0; 0), \quad t \in (0, t_1).$$

Обозначим через  $\tilde{\psi}_{14}^*(t)$  функцию, которая на отрезке времени  $[0, \tau_1]$  совпадает с  $\tilde{\psi}_{14}(\tau_0; t)$ , а на отрезке времени  $[\tau_1, t_1]$  является решением уравнения (4.4) при краевом условии  $\tilde{\psi}_{14}^*(\tau_1) = \tilde{\psi}_{14}(\tau_0; \tau_1)$ . Функцию  $\bar{\psi}_{14}(t)$  определим соотношением  $\bar{\psi}_{14}(t) \stackrel{\Delta}{=} \tilde{\psi}_{14}^*(t) + \bar{\psi}_{24}(\tau_2; t_1) - \tilde{\psi}_{14}^*(t_1)$ , а момент  $s_1$  — равенством  $\bar{\psi}_{14}(s_1) = 0$ . Графики функций  $\bar{\psi}_{24}(\tau_2; t)$ ,  $\tilde{\psi}_{14}(\tau_0; t)$ ,  $\tilde{\psi}_{14}^*(t)$ ,  $\bar{\psi}_{14}(t)$  в рассматриваемом случае изображены на правой части рис. 3б.

Если

$$\tilde{\psi}_{14}^*(t_1) \leq \bar{\psi}_{24}(\tau_2; t_1), \quad (5.1)$$

то функция  $\bar{\psi}_{14}(t)$  будет положительной на интервалах  $(0, s_1)$ ,  $(s_2, t_2)$  и отрицательной на промежутке  $(s_1, s_2)$ . В этом случае согласно условиям (4.5) время последовательного сближения с точками  $W_1, W_2$  разобьем на следующие промежутки:  $[0, \tau'_0)$ ,  $[\tau'_0, \tau'_1)$ ,  $[\tau'_1, s_1)$ ,  $[s_1, s_2)$ ,  $[s_2, \tau'_2)$ ,  $[\tau'_2, t'_2]$  и определим управление  $U = (u_1, u_2)$  соотношениями

$$\begin{aligned} u_1(t) &= 1, \quad u_2(t) = 1, \quad t \in [0, \tau'_0); & u_1(t) &= 0, \quad u_2(t) = 1, \quad t \in [\tau'_0, \tau'_1); \\ u_1(t) &= -1, \quad u_2(t) = 1, \quad t \in [\tau'_1, s_1); & u_1(t) &= -1, \quad u_2(t) = -1, \quad t \in [s_1, s_2); \\ u_1(t) &= -1, \quad u_2(t) = 1, \quad t \in [s_2, \tau'_2); & u_1(t) &= 0, \quad u_2(t) = 1, \quad t \in [\tau'_2, t'_2]. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Моменты  $\tau'_0, \tau'_1, s_1, t'_1, s_2, \tau'_2, t'_2$ , выберем удовлетворяющими следующим семи условиям:

$$W_1 \in \mathcal{L}_1, \quad W_2 \in \mathcal{L}_1, \quad \bar{\psi}_{14}(s_1) = 0, \quad \bar{\psi}_{14}(s_2) = 0, \quad \bar{\psi}_{14}(t'_1) = \bar{\psi}_{24}(t'_1), \quad \bar{\psi}_{24}(t'_2) = 0, \quad \text{усл. (4.6)}$$

( $t'_1, t'_2$  — моменты сближения с точками  $W_1, W_2$ ). В результате получим систему из семи уравнений с семью неизвестными  $\tau'_0, \tau'_1, s_1, t'_1, s_2, \tau'_2, t'_2$ . Поскольку оптимальное управление существует, то эта система имеет решение, которое предлагается определять следующим образом.

При решении данной системы используем принцип Беллмана: *оптимальное управление  $U$  обладает тем свойством, что каково бы ни было это управление, переводящее систему (2.1) из начального состояния в положение  $(x_1, y_1, \theta_U(t'_1), v_U(t'_1))$ , последующее управление до момента  $t'_2$  сближения со второй точкой  $W_2 = (x_2, y_2)$  должно быть оптимальным.*

Пусть  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  — параметры, подлежащие определению. Положим  $\tau'_0 = \tau_0 - \delta_1$ ,  $\tau'_1 = \tau_1 - \delta_2$ ,  $s_1 = t_1 - \delta_3$ , где  $\tau_0, \tau_1, t_1$  — моменты, вычисленные при построении траектории  $\mathcal{L}_0$ .

Управление  $U = (u_1, u_2)$  (5.2) можно переписать в виде

$$u_1(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \tau'_0], \\ 0, & t \in [\tau'_0, \tau'_1], \\ -1, & t \in [\tau'_1, t'_1], \end{cases} \quad u_2(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, s_1], \\ -1, & t \in (s_1, t'_1]. \end{cases} \quad (5.3)$$

При фиксированных значениях  $\delta_1, \delta_2$  определим величину  $\delta_3$ , при которой управление (5.3) обеспечивает сближение системы (2.1) с точкой  $W_1$  в некоторый момент  $t'_1$ . Принимая состояние  $(x_1, y_1, \theta_U(t'_1), v_U(t'_1))$  системы (2.1) за начальное, воспользуемся правилом (3.2)–(3.4) построения оптимального управления на заключительном этапе движения — на отрезке  $[t'_1, t'_2]$ . В результате вычислим моменты  $s_2, \tau'_2$ , при которых справедливы соотношения  $\bar{\psi}_{24}(\tau'_2; s_2) = 0$ ;  $\bar{\psi}_{24}(\tau'_2; t) > 0$ ,  $t \in (s_2, t'_2)$ , а также определим значение  $\bar{\psi}_{24}(\tau'_2; t'_1)$ . Моменты  $\tau'_0, \tau'_2$  однозначно определяют соответственно прямые  $l_1, l_2$ , содержащие участки  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$  и пересекающиеся в некоторой точке  $F$ .

Как и ранее, обозначим через  $l$  прямую, проходящую через точки  $W_1, F$ . Неизвестные величины  $\delta_1, \delta_2$  выбираем так, чтобы, во-первых, прямая  $l$  была ортогональна вектору  $(\cos \theta_U(t'_1), \sin \theta_U(t'_1))$ , а во-вторых, функция  $\bar{\psi}_{14}(t)$ , удовлетворяющая уравнению (4.4) с краевым условием  $\bar{\psi}_{14}(t) = \bar{\psi}_{24}(\tau'_2; t'_1)$ , была бы в момент  $s_1$  равной нулю. В результате получим управление (5.3), удовлетворяющее необходимым условиям оптимальности. Таким образом, решение системы семи уравнений с семью неизвестными сводится к решению двух уравнений с двумя неизвестными  $\delta_1, \delta_2$ . Отметим, что при вычислении искомых величин  $\delta_1, \delta_2$  одним из методов динамического программирования потребуется многократно использовать правило (3.2)–(3.4) и вычислять соответствующие моменты  $s_2, \tau'_2$  и значения  $\bar{\psi}_{24}(\tau'_2; t'_1)$ . Поскольку известно аналитическое решение уравнения (4.1) (см. [2]), то определение значения  $\bar{\psi}_{24}(\tau'_2; t'_1)$  является несложным делом.

При нарушении условия (5.1) найдется такой момент  $s_0 \in (0, \tau'_0)$ , при котором

$$\bar{\psi}_{14}(s_0) = 0, \quad \bar{\psi}_{14}(t) < 0, \quad t \in (0, s_0).$$

Тогда промежуток  $[0, \tau'_0)$ , разбивается на две части:  $[0, s_0)$ ,  $[s_0, \tau'_0)$ . В соответствии с (4.5) полагаем

$$u_1(t) = 1, \quad u_2(t) = -1, \quad t \in [0, s_0); \quad u_1(t) = 1, \quad u_2(t) = 1, \quad t \in [s_0, \tau'_0).$$

Если систему из указанных семи уравнений дополнить уравнением  $\bar{\psi}_{14}(s_0) = 0$ , то получим систему с восемью неизвестными:  $s_0, \tau'_0, \tau'_1, s_1, t'_1, s_2, \tau'_2, t'_2$ .

**З а м е ч а н и е.** В результате исследования поведения функций  $\bar{\psi}_{24}(t) \triangleq \bar{\psi}_{24}(\tau_2; t)$ ,  $\bar{\psi}_{14}(t)$ , являющихся решением уравнений (4.1), (4.4) и определяющих в каждый момент времени  $t \in [0, t_2]$  значения  $u_2(t)$  (4.5), приходим к выводу, что на оптимальной траектории торможение возможно только в окрестностях точек  $W_0, W_1$ . Этот факт согласуется с физическими свойствами системы (2.1), (2.2). Действительно, для быстрого разворота, который может происходить только в окрестностях точек  $W_0, W_1$ , необходимо максимально увеличивать угловую скорость за счет уменьшения линейной скорости, т. е. полагать  $u_2(t) = -1$ . Если при движении по траектории в цель происходит небольшой разворот вектора скорости либо цель находится достаточно далеко от начальной точки и потеря времени при развороте компенсируется более быстрым движением по траектории, то надо максимально разгоняться, т. е. полагать  $u_2(t) = 1$ . В противном случае при развороте надо тормозить.

## Заключение

С использованием свойств рассматриваемой системы (2.1), (2.2), вспомогательных переменных [2] и необходимых условий оптимальности в нелинейных задачах последовательного

управления, сформулированных в теореме 7.1 в [8], исследована задача об оптимальном по быстродействию сближении этой системы с двумя неподвижными точками в заданной очередности. Предложен метод построения управления, удовлетворяющего принципу максимума и условиям выравнивания гамильтониана. Определены условия, при которых указанное управление является оптимальным и имеет вторую компоненту  $u_2(t)$ , тождественно равную единице.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Dubins L.E.** On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents // Amer. J. Math. 1957. Vol. 79. P. 497–516.
2. **Berdyshev Iu.I.** Time-optimal control synthesis for a fourth-order nonlinear system // J. Appl. Math. Mech. 1975. Vol. 39, no. 6. P. 948–956.
3. **Хамза М.Х., Колас И., Рунгальдер В.** Оптимальные по быстродействию траектории полета в задаче преследования // Управление космическими аппаратами и кораблями. М.: Наука, 1971. С. 410–418.
4. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 497 с.
5. **Марков А.А.** Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах // Сообщение Харьков. мат. общества. 1889. Сер. 2. Т. 1, № 5, 6. С. 250–276.
6. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. М.: Физматгиз, 1961. 384 с.
7. **Бердышев Ю.И.** Синтез оптимального по быстродействию управления движением материальной точки в среде с сопротивлением: дис. . . . канд. физ.-мат. наук / ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1978. 133 с.
8. **Бердышев Ю.И.** Нелинейные задачи последовательного управления и их приложение / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2015. 193 с.
9. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
10. **Бердышев, Ю.И.** Об одной задаче последовательного обхода нелинейным управляемым объектом совокупности гладких многообразий // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 11. С. 1–11.

Бердышев Юрий Иванович

Поступила 10.12.15

д-р физ.-мат. наук

ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: berd@imm.uran.ru