ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 1 2016

УДК 517.948

ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ, ВЫЗВАННОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИЕЙ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА

В. П. Танана, А. И. Сидикова

Исследован регуляризующий алгоритм приближенного решения интегральных уравнений первого рода, включающий конечномерную аппроксимацию исходной задачи. Получена оценка погрешности этого алгоритма, использующего дискретизацию интегрального уравнения первого рода по двум переменным. Для получения этой оценки использована эквивалентность обобщенного метода невязки и обобщенного принципа невязки.

Ключевые слова: регуляризация, оценка погрешности, некорректная задача.

V. P. Tanana, A. I. Sidikova. On estimating the error of an approximate solution caused by the discretization of an integral equation of the first kind.

A regularizing algorithm for the approximate solution of integral equations of the first kind is investigated. The algorithm involves a finite-dimensional approximation of the problem; more exactly, the integral equation is discretized in two variables. An error estimate of the algorithm is obtained with the use of the equivalence of the generalized discrepancy method and the generalized discrepancy principle.

Keywords: regularization, error estimate, ill-posed problem.

Введение

При решении некорректно поставленных задач важную роль играет их конечномерная аппроксимация, позволяющая свести исходную задачу к конечномерной. Поэтому исследованию сходимости конечномерных аппроксимаций регуляризованных решений посвящено большое число статей [1–4] и др. Однако, при использовании методов регуляризации важную роль играет увязка параметра регуляризации с погрешностью, вносимой конечномерной аппроксимацией, а также оценка погрешности метода, включающего эту аппроксимацию.

Рассмотрению этих вопросов посвящена статья [5], в которой при решении интегральных уравнений первого рода использована конечномерная аппроксимация лишь по одной переменной.

В настоящей статье сделаны усиление основных результатов работы [5] за счет конечномерной аппроксимации интегрального уравнения по обеим переменным. Для учета погрешности конечномерной аппроксимации в окончательной оценке в работе использован обобщенный метод невязки, предложенный в [6].

1. Постановка задачи

Рассмотрим интегральное уравнение первого рода

$$Au(s) = \int_a^b P(s,t)u(s)ds = f(t), \quad c \le t \le d, \tag{1.1}$$

где $P(s,t)$ и $P'_t(s,t) \in C([a,b]\times[c,d])$, $u(s) \in L_2[a,b]$, $f(t) \in L_2[c,d]$ и ядро оператора $P(s,t)$ замкнуто. Предположим, что при $f(t) = f_0(t)$ существует точное решение $u_0(s)$ уравнения (1.1), которое принадлежит множеству M, где

$$M = \{u(s)\colon u(s), u'(s) \in L_2[a,b],\ u(a) = u(b) = 0\}, \tag{1.2}$$

а $u'(s)-$ производная $u(s)$ по s. Из замкнутости ядра $P(s,t)$ будет следовать единственность решения $u_0(s)$ уравнения (1.1).

Пусть точное значение $f_0(t)$ нам не известно, а вместо него даны $f_\delta(t) \in L_2[c,d]$ и $\delta > 0$ такие, что $\|f_\delta(t) - f_0(t)\| \le \delta$. Требуется по $f_\delta(t)$, δ и M определить приближенное решение $u_\delta(s)$ уравнения (1.1) и оценить его уклонение от точного решения $u_0(s)$ в метрике пространства $L_2[a,b]$.

Введем оператор B, отображающий пространство $L_2[a,b]$ в $L_2[a,b]$, формулой

$$u(s) = Bv(s) = \int\limits_a^s v(\xi)d\xi, \quad v(s), Bv(s) \in L_2[a,b] \tag{1.3}$$

и оператор C — формулой

$$Cv(s) = ABv(s), \quad v(s) \in L_2[a,b], \quad Cv(s) \in L_2[c,d]. \tag{1.4}$$

Из (1.3) и (1.4) следует, что $Cv(s) = \displaystyle\int_a^b K(s,t)v(s)ds$, где $K(s,t) = -\displaystyle\int_a^s P(\xi,t)d\xi$.

Для численного решения уравнения (1.1) оператор C заменим конечномерным $C_{n,m}$ и введем величину $h_{n,m}$, удовлетворяющую соотношению

$$\|C_{n,m} - C\| \le h_{n,m}.$$

Для определения величины $h_{n,m}$ введем функцию

$$N(t) = \max_{a\le s\le b} |P(s,t)|, \quad t \in [c,d], \tag{1.5}$$

и число

$$N_1 = \max\bigl\{|K_t'(s,t)|\colon a \le s \le b;\ c \le t \le d\bigr\}. \tag{1.6}$$

Так как $P(s,t)$ и $P_t'(s,t) \in C([a,b]\times[c,d])$, то из (1.5) и (1.6) следует существование числа N_1, определяемого (1.6), кроме того, очевидно, что $N(t) \in C[c,d]$.

Разобьем отрезок $[a,b]$ на n равных частей точками $s_i = a + \dfrac{i(b-a)}{n}$, $i = 0,1,\dots,n-1$, а также отрезок $[c,d]$ — на m равных частей точками $t_j = c + \dfrac{j(d-c)}{m}$, $j = 0,1,\dots,m-1$.

Теперь введем функции

$$\overline{K}_i(t) = K(s_i,t), \tag{1.7}$$

$$K_n(s,t) = \overline{K}_i(t), \quad s_i \le s < s_{i+1}, \quad t \in [c,d], \quad i = 0,1,\dots,n-1, \tag{1.8}$$

$$K_{n,m}(s,t) = \overline{K}_i(t_j), \quad s_i \le s < s_{i+1}, \quad t_j \le t < t_{j+1}, \quad i = 0,1,\dots n-1, \quad j = 0,1,\dots,m-1. \tag{1.9}$$

Используя формулы (1.7)–(1.9), определим операторы C_n и $C_{n,m}$ формулами

$$C_n v(s) = \int\limits_a^b K_n(s,t)v(s)ds, \quad t \in [c,d],$$

$$C_{n,m}v(s) = \int\limits_a^b K_{n,m}(s,t)v(s)ds, \quad t \in [c,d], \tag{1.10}$$

и предположим, что эти операторы отображают пространство $L_2[a,b]$ в $L_2[c,d]$.

Перейдем к оценке величины $\|C_{n,m} - C\|$.

Для этого используем неравенство $\|C_{n,m} - C\| \le \|C_{n,m} - C_n\| + \|C_n - C\|$. Так как

$$|K_{n,m}(s,t) - K_n(s,t)| \le |\overline{K}_i(t) - \overline{K}_i(t_j)| \tag{1.11}$$

при $s_i \le s < s_{i+1}$ и $t_j \le t < t_{j+1}$, $i = 0,1,\dots,n-1$, $j = 0,1,\dots,m-1$, а из (1.6) вытекает, что

$$|\overline{K}_i(t) - \overline{K}_i(t_j)| \le N_1 \frac{d-c}{m} \ ,$$

то из (1.11) получим

$$|\overline{K}_{n,m}(s,t) - \overline{K}_n(s,t)| \le N_1 \frac{d-c}{m} \ . \tag{1.12}$$

Ввиду того что $\|C_{n,m} - C_n\| = \sup_{\|v\|\le 1} \|C_{n,m}v - C_n v\|$, можно утверждать:

$$\|C_{n,m} - C_n\|^2 \le \sup_{\|v\|\le 1} \int\limits_c^d \Big[\int\limits_a^b |K_{n,m}(s,t) - K_n(s,t)| \cdot |v(s)| ds \Big]^2 dt. \tag{1.13}$$

Из (1.12) и (1.13) выводим

$$\|C_{n,m} - C_n\|^2 \le N_1^2 \Big(\frac{d-c}{m}\Big)^2 \int\limits_c^d \Big[\int\limits_a^b |v(s)| ds \Big]^2 dt. \tag{1.14}$$

Так как $\int_a^b |v(s)|ds \le \sqrt{b-a}\|v(s)\|_{L_2}$, то из (1.14) следует, что

$$\|C_{n,m} - C_n\| \le \sqrt{(b-a)(d-c)} \ N_1 \frac{d-c}{m}. \tag{1.15}$$

Теперь перейдем к оценке слагаемого $\|C_n - C\|$.

Так как $Cv(s) - C_n v(s) = \int_a^b (K(s,t) - K_n(s,t))v(s)ds$ и

$$\|C_n - C\|^2 \le \sup\Big\{ \int\limits_c^d \Big[\int\limits_a^b |K(s,t) - K_n(s,t)| \cdot |v(s)| ds \Big]^2 dt \colon \|v(s)\| \le 1 \Big\},$$

то, учитывая (1.5), (1.7), (1.8) и

$$\int\limits_a^b |K(s,t) - K_n(s,t)| \cdot |v(s)| ds \le \int\limits_a^b |K(s,t) - K(s_i,t)| \cdot |v(s)| ds \le \frac{b-a}{n} \ N(t) \int\limits_a^b |v(s)| ds,$$

получим, что

$$\|Cv(s) - C_n v(s)\|^2 \le \Big(\frac{b-a}{n}\Big)^2 \int\limits_c^d N^2(t) \Big[\int\limits_a^b |v(s)| ds \Big]^2 dt. \tag{1.16}$$

Из того, что $\|v(s)\| \le 1$ и $\displaystyle\int_a^b |v(s)|ds \le \sqrt{b-a}\ \|v(s)\|$, учитывая (1.16), имеем

$$\|C_n - C\| \le \sqrt{b-a}\ \|N(t)\|_{L_2} \frac{b-a}{n}. \tag{1.17}$$

Таким образом, из (1.15) и (1.17) следует, что

$$h_{n,m} = \sqrt{(b-a)(d-c)}\ N_1\ \frac{d-c}{m} + \sqrt{b-a}\ \|N(t)\|_{L_2} \frac{b-a}{n}. \tag{1.18}$$

2. Обобщенный метод невязки

Введем конечномерное подпространство X_n пространства $L_2[a,b]$, состоящее из функций, постоянных на промежутках $[s_i, s_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, а также подпространство Y_m пространства $L_2[c,d]$, состоящее из функций, постоянных на промежутках $[t_j, t_{j+1})$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$. Через P_n обозначим оператор метрического проектирования пространства $L_2[a,b]$ на X_n, а через Q_m оператор метрического проектирования пространства $L_2[c,d]$ на Y_m.

Для приближенного решения уравнения (1.1) воспользуемся обобщенным методом невязки, предложенным в работе [6] и иследованным в [7]. Этот метод заключается в сведении уравнения (1.1) к вариационной задаче на условный экстремум

$$\inf\left\{\|v(s)\|^2 \colon v(s) \in X_n,\ \|C_{n,m}v(s) - f_\delta^m(t)\| \le \|v(s)\| h_{n,m} + \delta\right\}, \tag{2.1}$$

где $f_\delta^m(t) = Q_m[f_\delta(t)]$.

В работе [7] доказано, что при условии

$$\|f_\delta^m(t)\| > \|u_0'(s)\| h_{n,m} + \delta \tag{2.2}$$

вариационная задача (2.1) имеет единственное решение $v_{\delta,h_{n,m}}(s)$, которое удовлетворяет равенству $\|C_{n,m}v_{\delta,h_{n,m}}(s) - f_\delta^m(t)\| = \|v_{\delta,h_{n,m}}(s)\| h_{n,m} + \delta$.

Из работы [7] следует, что вариационная задача (2.1) сводится к вариационной задаче на безусловный экстремум

$$\inf\{\|C_{n,m}v(s) - f_\delta^m(t)\|^2 + \alpha\|v(s)\|^2 \colon v(s) \in X_n\}, \quad \alpha > 0, \tag{2.3}$$

являющейся конечномерным вариантом метода регуляризации А.Н. Тихонова [8].

Задача (2.3) имеет единственное решение $v_\delta^\alpha(s)$. Это решение должно удовлетворять обобщенному принципу невязки [9]:

$$\|C_{n,m}v_\delta^\alpha(s) - f_\delta^m(t)\| = \|v_\delta^\alpha(s)\| h_{n,m} + \delta. \tag{2.4}$$

Известно (см. [7]), что при выполнении условия (2.2) уравнение (2.4) относительно α имеет единственное решение $\alpha(n,m)$.

Из теоремы, доказанной в [7], следует, что при условии (2.2) справедливо $v_{\delta,h_{n,m}}(s) = v_\delta^{\alpha(n,m)}(s)$, а приближенное решение $u_{\delta,h_{n,m}}(s)$ определяется формулой

$$u_{\delta,h_{n,m}}(s) = Bv_{\delta,h_{n,m}}(s). \tag{2.5}$$

Из (1.7), (1.9) и (1.10) следует, что

$$C_{n,m}v(s) = \sqrt{\frac{b-a}{n}} \sum_{i=0}^{n-1} \overline{K}_i(t_j)v_i, \quad t \in [t_j, t_{j+1}), \quad j = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{2.6}$$

где

$$v_i = \sqrt{\frac{n}{b-a}} \int\limits_{s_i}^{s_{i+1}} v(s)ds. \tag{2.7}$$

Из вида оператора Q_m вытекает, что $f_\delta^m(t) = \{f_j\colon t_j \le t < t_{j+1},\ j = 0, 1, \dots, m-1\}$, где $f_j = \sqrt{\dfrac{m}{d-c}} \displaystyle\int_{t_j}^{t_{j+1}} f_\delta(t)dt$.

Решая вариационную задачу (2.3), придем к уравнению

$$C^*_{n,m} C_{n,m} v(s) + \alpha v(s) = C^*_{n,m} f_\delta^m(t), \tag{2.8}$$

где $C^*_{n,m}$– оператор, сопряженный оператору $C_{n,m}$.

Так как уравнение (2.8) эквивалентно задаче (2.3), то его решением будет элемент $v_\delta^\alpha(s)$. Значение параметра регуляризации α в этом решении определим из уравнения (2.4).

Теперь, чтобы свести уравнение (2.8) к системе линейных алгебраических уравнений, введем ортонормированные базисы $\{\varphi_i(s)\}$ — в пространстве X_n и $\{\psi_j(t)\}$ — в пространстве Y_m формулами

$$\varphi_i(s) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{n}{b-a}}, & s_i \le s < s_{i+1}, \\ \quad 0 \quad, & s \notin [s_i, s_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \end{cases} \tag{2.9}$$

и

$$\psi_j(t) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{m}{d-c}}, & t_j \le t < t_{j+1}, \\ \quad 0 \quad, & t \notin [t_j, t_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \end{cases} \tag{2.10}$$

Используя эти базисы, определим операторы J_1 и J_2, отображающие пространство $\mathbb{R}^n$ на X_n и $\mathbb{R}^m$ на Y_m соответственно:

$$J_1[(x_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} x_i\ \varphi_i(s), \quad (x_i) \in \mathbb{R}^n, \quad J_1[(x_i)] \in X_n, \tag{2.11}$$

$$J_2[(y_j)] = \sum_{j=0}^{m-1} y_j\ \psi_j(t), \quad (y_j) \in \mathbb{R}^m, \quad J_2[(y_j)] \in Y_m, \tag{2.12}$$

Так как базисы $\{\varphi_i(s)\}$ и $\{\psi_j(t)\}$ ортонормированы в X_n и Y_m соответственно, то операторы J_1 и J_2, определяемые формулами (2.11) и (2.12), изометричны.

Теперь наряду с задачей (2.3) рассмотрим задачу

$$\inf\left\{ \frac{d-c}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \left[\sqrt{\frac{b-a}{n}} \sum_{i=0}^{n-1} \overline{K}_i(t_j) v_i - f_j \right]^2 + \alpha \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} v_i^2 \colon (v_i) \in \mathbb{R}^n \right\}, \tag{2.13}$$

где $f_j = \sqrt{\dfrac{m}{d-c}} \displaystyle\int_{t_j}^{t_{j+1}} f_\delta(t)dt$.

Из [8] следует, что для любого $\alpha > 0$ существует единственное решение $(\overline{v}_i^\alpha) \in \mathbb{R}^n$ задачи (2.13). Кроме того, задача (2.13) эквивалентна системе линейных алгебраических уравнений

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} b_{ik} v_i + \alpha v_k = g_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \tag{2.14}$$

где $b_{ik} = \dfrac{d-c}{m}\sum\limits_{j=0}^{m-1}\overline{K}_i(t_j)\overline{K}_k(t_j)$ и $g_k = \dfrac{d-c}{m}\sqrt{\dfrac{b-a}{n}}\sum\limits_{j=0}^{m-1}\overline{K}_k(t_j)f_j$.

Теорема. Пусть операторы J_1, J_2 определены формулами (2.11) и (2.12) и $v_\delta^\alpha(s)$ и $(\overline{v}_i^\alpha)$ — решения задач (2.3) и (2.13) соответственно.

Тогда эти решения связаны соотношением $v_\delta^\alpha(s) = J_1[(\overline{v}_i^\alpha)]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v_\delta^\alpha(s)$ — решение задачи (2.3). Тогда

$$\|C_{n,m}v_\delta^\alpha(s) - f_\delta^m(t)\|^2 + \alpha\,\|v_\delta^\alpha(s)\|^2 = \inf\{\|C_{n,m}v(s) - f_\delta^m(t)\|^2 + \alpha\,\|v(s)\|^2 : v(s) \in X_n\}, \tag{2.15}$$

где $f_\delta^m(t) = Q_m[f_\delta(t)]$.

Если $(\hat{v}_i^\alpha) = J_1^{-1}[v_\delta^\alpha(s)]$, то

$$\frac{d-c}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\left[\sqrt{\frac{b-a}{n}}\sum_{i=0}^{n-1}\overline{K}_i(t_j)\ \hat{v}_i^\alpha - f_j\right]^2 = \|J_2^{-1}C_{n,m}J_1\ J_1^{-1}v_\delta^\alpha(s) - J_2^{-1}f_\delta^m(t)\|^2. \tag{2.16}$$

Из (2.16) и изометричности операторов J_1 и J_2 следует, что

$$\|C_{n,m}v_\delta^\alpha(s) - f_\delta^m(t)\|^2 + \alpha\,\|v_\delta^\alpha(s)\|^2$$

$$= \frac{d-c}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\left[\sqrt{\frac{b-a}{n}}\sum_{i=0}^{n-1}\overline{K}_i(t_j)\ \hat{v}_i^\alpha - f_j\right]^2 + \alpha\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(\hat{v}_i^\alpha)^2. \tag{2.17}$$

Теперь покажем, что $(\hat{v}_i^\alpha)$ является решением задачи (2.13). Для этого предположим противное, т. е. найдется вектор $(\overline{v}_i) \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$\frac{d-c}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\left[\sqrt{\frac{b-a}{n}}\sum_{i=0}^{n-1}\overline{K}_i(t_j)\ \overline{v}_i - f_j\right]^2 + \alpha\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\overline{v}_i^2$$

$$< \frac{d-c}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\left[\sqrt{\frac{b-a}{n}}\sum_{i=0}^{n-1}\overline{K}_i(t_j)\ \hat{v}_i^\alpha - f_j\right]^2 + \alpha\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(\hat{v}_i^\alpha)^2. \tag{2.18}$$

Тогда, положив $\overline{v}(s) = J_1[(\overline{v}_i)]$ и используя (2.17), получим

$$\|C_{n,m}\overline{v}(s) - f_\delta^m(t)\|^2 + \alpha\,\|\overline{v}(s)\|^2 = \frac{d-c}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\left[\sqrt{\frac{b-a}{n}}\sum_{i=0}^{n-1}\overline{K}_i(t_j)\ \overline{v}_i - f_j\right]^2 + \alpha\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\overline{v}_i^2,$$

что, наряду с (2.18), противоречит (2.15).

Таким образом, $(\overline{v}_i^\alpha) = J_1^{-1}[v_\delta^\alpha(s)]$ является решением задачи (2.13).

Тем самым теорема доказана.

Так как из теоремы будет следовать, что вариационная задача (2.3) может быть сведена к системе линейных алгебраических уравнений (2.14), то, решив последнюю, получим $(\overline{v}_i^\alpha) \in \mathbb{R}^n$. Используя это решение и оператор восполнения J_1, получим решение задачи (2.3):

$$v_\delta^\alpha(s) = J_1[(\overline{v}_i^\alpha)].$$

Для определения параметра регуляризации α в решении $v_\delta^\alpha(s)$ используем уравнение (2.4).

Таким образом, при выполнении условия (2.2) получим решение вариационной задачи (2.1):

$$v_{\delta,h_{n,m}}(s) = v_\delta^{\alpha(n,m)}(s).$$

Используя (2.2) и (2.5), получим приближенное решение $u_{\delta,h_{n,m}}(s)$ уравнения (1.1).

3. Оценка погрешности приближенного решения $u_{\delta,h_{n,m}}(s)$ уравнения (1.1)

Так как множество значений $R(C_{n,m})$ оператора $C_{n,m}$ содержится в Y_m, а элемент $v_0(s) = B^{-1}u_0(s)$ на основании (2.6) удовлетворяет соотношениям

$$C_{n,m}v_0(s) = C_{n,m}v_0^n(s), \tag{3.1}$$

где $v_0^n(s) = P_n v_0(s)$ и

$$C_{n,m}v_0(s) \in Y_m, \tag{3.2}$$

то из (3.1) и (3.2) имеем

$$\|C_{n,m}v_0(s) - f_\delta\| \geq \|Q_m[C_{n,m}v_0(s)] - Q_m[f_\delta(t)]\| = \|C_{n,m}v_0(s) - f_\delta^m(t)\|,$$

а

$$\|C_{n,m}v_0(s) - f_\delta\| = \|C_{n,m}v_0^n(s) - f_\delta\| \text{ и } \|C_{n,m}v_0^n(s) - f_\delta\| \leq \|C_{n,m}v_0^n(s) - Cv_0(s)\| + \|Cv_0(s) - f_\delta(t)\|.$$

Из (3.1) получаем

$$\|C_{n,m}v_0^n(s) - Cv_0(s)\| = \|C_{n,m}v_0(s) - Cv_0(s)\| \leq \|C_{n,m} - C\| \cdot \|v_0(s)\|. \tag{3.3}$$

Из (1.18) и (3.3) следует, что

$$\|C_{n,m}v_0(s) - f_\delta^m(t)\| \leq \|v_0(s)\|h_{n,m} + \delta. \tag{3.4}$$

Соотношения (2.1) и (3.4) влекут

$$\|v_{\delta,h_{n,m}}(s)\| \leq \|v_0(s)\|, \tag{3.5}$$

а

$$\|C_{n,m}v_{\delta,h_{n,m}}(s) - f_\delta^m(t)\| \leq \|v_0(s)\|h_{n,m} + \delta. \tag{3.6}$$

Таким образом, из (3.6) следует, что

$$\|Cv_{\delta,h_{n,m}}(s) - f_\delta^m(t)\| \leq 2\|v_0(s)\|h_{n,m} + \delta. \tag{3.7}$$

Ввиду того что $Au_{\delta,h_{n,m}}(s) = Cv_{\delta,h_{n,m}}(s)$, из (3.7) имеем

$$\|Au_{\delta,h_{n,m}}(s) - f_\delta^m(t)\| \leq 2\|v_0(s)\|h_{n,m} + \delta. \tag{3.8}$$

Из (2.1) получаем

$$\|v_0^n(s)\| = \|P_n v_0(s)\| \leq \|v_0(s)\| \tag{3.9}$$

и

$$\|Cv_0^n(s) - f_\delta^m(t)\| \leq 2\|v_0(s)\|h_{n,m} + \delta. \tag{3.10}$$

Из (3.10) вытекает

$$\|Au_0(s) - f_\delta^m(t)\| \leq 2\|v_0(s)\|h_{n,m} + \delta, \tag{3.11}$$

а из (3.5), (3.8), (3.9) и (3.11) следует, что

$$\|u_{\delta,h_{n,m}}(s) - v_0^n(s)\| \leq \omega_1(4\|v_0(s)\|h_{n,m} + \delta, \|v_0(s)\|), \tag{3.12}$$

где $\omega_1(\tau, r) = \sup_{u,u'} \left\{ \|u - u'\| \colon u, u' \in M_r,\ \|Au - Au'\| \le \tau \right\}$ и

$$M_r = \left\{ u(s) \colon u(s), u'(s) \in L_2[a,b],\ \int_a^b [u'(s)]^2 ds \le r^2,\ u(a) = u(b) = 0 \right\}.$$

На основании работы [3], из (3.12) следует, что

$$\|u_{\delta,h_{n,m}}(s) - u_0^n(s)\| \le \omega(4\|v_0(s)\| h_{n,m} + 2\delta, 2\|v_0(s)\|), \tag{3.13}$$

где $\omega(\tau, r) = \sup\limits_u \{\|u\| \ :\ u \in M_r,\ \ \|Au\| \le \tau\}$.

Окончательно, из (3.13) следует оценка

$$\|u_{\delta,h_{n,m}}(s) - u_0^n(s)\| \le 2\omega(\ 2\|v_0(s)\| h_{n,m} + \delta, \|v_0(s)\|).$$

Заключение

В работе предложен регуляризующий алгоритм для решения интегральных уравнений первого рода. Этот алгоритм включает в себя конечномерную аппроксимацию интегрального уравнения по обеим переменным. В качестве метода регуляризации при этом использован обобщенный метод невязки [6], который позволил учесть погрешность аппроксимации и получить оценку погрешности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гончарский А.В., Леонов А.С., Ягола А.Г.** Конечноразностная аппроксимация линейных некорректных задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1974. Т. 14, № 1. С. 15–24.
2. **Танана В.П.** Проекционные методы и конечноразностная аппроксимация линейных некорректных задач // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 6. С. 1301–1307.
3. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
4. **Васин В.В.** Дискретная сходимость и конечномерная аппроксимация регуляризующих алгоритмов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1979. Т. 19, № 1. С. 11–21.
5. **Танана В.П., Сидикова А.И.** Об оценке погрешности регуляризующего алгоритма, основанного на обобщенном принципе невязки, при решении интегральных уравнений // Журн. вычисл. методы и программирование. 2015. Т. 16, № 1. С. 1–9.
6. **Танана В.П.** Об одном проекционно-итеративном алгоритме для операторных уравнений первого рода с возмущенным оператором // Докл. АН СССР. 1975. Т. 224, № 15. С. 1025–1029.
7. **Танана В.П.** О проекционно-итеративном алгоритме решения некорректно поставленных задач с приближенно заданным оператором // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1977. Т. 17, № 1. С. 15–23.
8. **Тихонов А.Н.** О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151, № 3. С. 501–504.
9. **Гончарский А.В., Леонов А.С., Ягола А.Г.** Обобщенный принцип невязки // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1973. Т. 13, № 2. С. 294–302.

Танана Виталий Павлович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Южно-Уральский государственный университет
e-mail: tvpa@susu.ac.ru

Поступила 26.02.2015

Сидикова Анна Ивановна
канд. физ.-мат. наук
доцент
Южно-Уральский государственный университет
e-mail: 7413604@mail.ru