ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 1 2016

УДК 512.54, 519.17

О ГРАФАХ С ВЕРШИНАМИ ДВУХ ЦВЕТОВ И ГРУППАХ С 3-ТРАНСПОЗИЦИЯМИ[1]

А. И. Созутов, И. О. Александрова

Рассматриваются помеченные неориентированные графы без петель и кратных ребер с вершинами, окрашенными в два цвета. Раскраска графа Γ_n называется нечетносвязной, если после удаления вершин первого цвета (и инцидентных им ребер) граф распадается на нечетное число связных компонент. Для определенных серий вложенных друг в друга графов Γ_n найдена общая формула числа t_n нечетносвязных раскрасок, зависящая от двух параметров. В случаях, когда два графа серии могут быть интепретированы как графы Кокстера подходящих групп с 3-транспозициями, получены конкретные формулы для чисел t_n.

Ключевые слова. Помеченный граф, раскраска графа, производящая функция, граф Кокстера, группа с 3-транспозициями.

A. I. Sozutov, I. O. Aleksandrova. On graphs with vertices of two colors and groups with 3-transpositions.

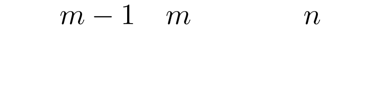
We consider labeled undirected graphs without loops or multiple edges with vertices of two colors. A coloring of a graph Γ_n is called odd-connected if the removal of vertices of the first color produces an odd number of connected components. A general formula for the number t_n of odd-connected colorings is found for certain families of embedded graphs Γ_n. The formula depends on two parameters. In the cases where two graphs in a family can be interpreted as Coxeter graphs for certain groups with 3-transpositions, specific formulas for the numbers t_n are found.

Keywords: labeled graph, graph coloring, generating function, Coxeter graph, group with 3-transpositions.

1. Введение

Рассматриваются помеченные неориентированные графы Γ_n с множеством вершин $V(\Gamma_n) = \{1, \dots, n\}$ без петель и кратных ребер [1]. Под подграфом Δ графа понимается подграф, индуцированный графом Γ_n на множестве вершин $V(\Delta)$. Считая все вершины графа Γ_n белыми, будем окрашивать некоторые (в том числе и все) вершины в черный цвет. Черная связная компонента графа Γ_n — это максимальный по включению, связный, полностью окрашенный в черный цвет подграф. Раскраска графа Γ_n называется нечетносвязной, если после удаления белых вершин он распадается на нечетное число связных комопонент, и четносвязной в противном случае. Граф Γ_n допускает 2^n различных раскрасок; нас интересует число $t_n = t(\Gamma_n)$ нечетносвязных раскрасок. Множество $\{\Gamma_n\}$ $(n \geq m)$ вложенных друг в друга графов называем A-*серией*, если их подграфы с вершинами $m-1, m, \dots, n$ являются цепями (графами Кокстера A_{n-m+2} [2]):

$$\Gamma_{m-1} \subset \Gamma_m \subset \ldots \subset \Gamma_n \subset \ldots, \qquad (1.1)$$



A-серии (1.1) соответствует последовательность $\{t_n\}$ чисел $t_n = t(\Gamma_n)$:

$$t_{m-1}, t_m, \dots, t_n, \dots \ . \qquad (1.2)$$

О числах t_n последовательности (1.2) получен следующий результат.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-04897 А).

Теорема 1. *Для чисел последовательности* (1.2) *при любом* $n \geq m$ *справедливо равенство*

$$t_n = 2^{n-1} + 2^{(n-m)/2}\Big[\big(t_{m+1} - t_m - 2^{m-1}\big)\sin\frac{\pi(n-m)}{4} + \big(t_m - 2^{m-1}\big)\cos\frac{\pi(n-m)}{4}\Big]. \qquad (1.3)$$

Последовательность (1.2) *однозначно определяется числом* m *и любой четверкой чисел* n, k, t_n, t_{n+k}, *где* $k \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 4)$.

Теорема 1 имеет непосредственное отношение к группам с симплектическими 3-транспозициями, которые тесно связаны со многими математическими структурами [3; 4]. С учетом исследований [5] в работе [6] были найдены некоторые системы порождающих 3-транспозиций групп $Sp_{2n}(2)$, $O^+_{2n}(2)$, $O^-_{2n}(2)$ и их графы, аналогичные системам порождающих отражений и графам Кокстера групп Вейля $W(E_n)$, $n = 6$, 7, 8 (см. [2]). Напомним, что множество $D = a^G$ инволюций группы G называется *классом 3-транспозиций*, если $|ab| \leq 3$ для любых $a, b \in D$, $G = \langle D\rangle$ и инволюции из D сопряжены в G [7]. Минимальной системе порождающих $X \subseteq D$ группы G ставится в соответствие граф Γ, вершинами которого являются элементы из X, и две вершины a, b смежны в том и только том случае, когда инволюции a и b неперестановочны. В статье [6] было установлено, какие группы с симплектическими 3-транспозициями соответствуют графам из трех определенных в ней серий графов-деревьев I_n, J_n, E_n ($n \geq 7$). Теорема 1 позволяет рассмотреть более общий случай. Как известно, число 3-транспозиций в группах $O^\pm_{2l}(2)$ и $Sp_{2l}(2)$ равно $t_{2l} = 2^{2l-1} \mp 2^{l-1}$ и $t_{2l+1} - 1 = 2^{2l} - 1$. Доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Если* $t_r = 2^{r-1}$ *и* $t_s = 2^{s-1} \pm 2^{(s-2)/2}$ *для некоторых нечетного* r *и четного* s, *то для чисел последовательности* (1.2) *верна точно одна из следующих групп формул*:

(1) $t_{4k} = 2^{4k-1} + (-1)^k 2^{2k-1}$; $t_{4k+1} = 2^{4k}$; $t_{4k+2} = 2^{4k+1} + (-1)^{k+1}2^{2k}$; $t_{4k+3} = 2^{4k+2} + (-1)^{k+1}2^{2k+1}$;

(2) $t_{4k} = 2^{4k-1} + (-1)^{k+1} 2^{2k-1}$; $t_{4k+1} = 2^{4k}$; $t_{4k+2} = 2^{4k+1} + (-1)^{k}2^{2k}$; $t_{4k+3} = 2^{4k+2} + (-1)^{k}2^{2k+1}$;

(3) $t_{4k} = 2^{4k-1} + (-1)^{k+1} 2^{2k-1}$; $t_{4k+1} = 2^{4k} + (-1)^{k+1}2^{2k}$; $t_{4k+2} = 2^{4k+1} + (-1)^{k+1}2^{2k}$; $t_{4k+3} = 2^{4k+2}$;

(4) $t_{4k} = 2^{4k-1} + (-1)^{k} 2^{2k-1}$; $t_{4k+1} = 2^{4k} + (-1)^{k}2^{2k}$; $t_{4k+2} = 2^{4k+1} + (-1)^{k}2^{2k}$; $t_{4k+3} = 2^{4k+2}$.

Числа t_n *из групп* (1)–(4) *вычисляются по соответствующим формулам* (i)–(iv)*:*

$$\text{(i)}\quad t_{n+1} = 2^n - 2^{n/2}\sin\frac{\pi n}{4}; \qquad \text{(ii)}\quad t_{n+1} = 2^n + 2^{n/2}\sin\frac{\pi n}{4};$$

$$\text{(iii)}\quad t_{n+1} = 2^n - 2^{n/2}\cos\frac{\pi n}{4}; \qquad \text{(iv)}\quad t_{n+1} = 2^n + 2^{n/2}\cos\frac{\pi n}{4}.$$

Часть результатов статьи была анонсирована в [8]; в теореме 2 здесь исправлена допущенная в [8] неточность (в теореме из [8] была пропущена группа формул (iv)).

З а м е ч а н и е 1. Начальный граф Γ_m в A-серии (1.1) может быть произвольным. Если, например, Γ_m — полный граф, то согласно теореме 1

$$t_n = 2^{n-1} + 2^{(n-m-2)/2}\cos\frac{\pi(n-m)}{4} - 2^{(n-m+1)/2}\cos\frac{\pi(n-m+1)}{4}.$$

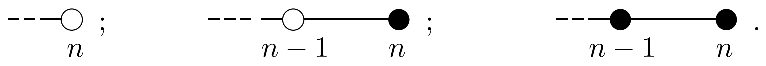
А если Γ_m — пустой граф, то $t_n = 2^{n-1}$.

Как известно, каждый граф представляется в виде дизъюнктного объединения своих связных компонент [1, теорема 4.6]. Для несвязных графов очевидно справедливо следующее свойство.

З а м е ч а н и е 2. Если граф Γ несвязен и является дизъюнктным объединением подграфов Δ и Σ, содержащих m и k вершин, то $t(\Gamma) = t(\Delta)(2^k - t(\Sigma)) + t(\Sigma)(2^m - t(\Delta))$. Если при этом $t(\Delta) = 2^{m-1}$, то во всех случаях $t(\Gamma) = 2^{m+k-1}$.

2. Доказательство теоремы 1

Множество всех нечетносвязных окрасок графа Γ_n серии (1.1) при $n \geq m+2$ естественно разбивается на три подмножества. Это окраски с белой вершиной n, число таких окрасок равно t_{n-1}; окраски с белой вершиной $n-1$ и черной вершиной n, число этих окрасок равно $2^{n-2} - t_{n-2}$; окраски с черными вершинами $n-1$ и n, число которых, очевидно, равно $t_{n-1} - t_{n-2}$:



Отсюда заключаем, что для членов последовательности $\{t_n\}$ выполняется рекуррентное соотношение

$$t_n = 2t_{n-1} + 2^{n-2} - 2t_{n-2}. \tag{2.1}$$

Предполагая, что известны начальные условия t_m и t_{m+1}, докажем формулу (1.3). Производящая функция $P(x)$ [9] для последовательности (1.1) имеет вид

$$P(x) = \sum_{n \geq m} t_n x^n.$$

Найдем функцию $P(x)$. Для этого умножим обе части равенства (2.1) на x^n и просуммируем полученные равенства по n, $n \geq m+2$:

$$\sum_{n \geq m+2} t_n x^n = 2 \sum_{n \geq m+2} t_{n-1} x^n + \sum_{n \geq m+2} 2^{n-2} x^n - 2 \sum_{n \geq m+2} t_{n-2} x^n.$$

Тогда

$$P(x) - t_m x^m - t_{m+1} x^{m+1} = 2x \left(P(x) - t_m x^m\right) + \frac{2^m x^{m+2}}{1-2x} - 2x^2 P(x).$$

Следовательно, производящая функция $P(x)$ для последовательности t_n имеет вид

$$P(x) = \frac{t_m x^m + (t_{m+1} - 4t_m)\, x^{m+1} + (4t_m - 2t_{m+1} + 2^m)\, x^{m+2}}{(1-2x+2x^2)\,(1-2x)}.$$

Согласно общему принципу (см. [9, § 1.3])

$$t_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|x|=\rho} \frac{P(x)dx}{x^{n+1}}.$$

Раскладывая дробь $\dfrac{1}{(1-2x+2x^2)(1-2x)}$ на сумму простейших дробей, получаем

$$t_n = \frac{(t_{m+1} - 2t_m)}{2\pi i} \int\limits_{|x|=\rho} \frac{dx}{(1-2x+2x^2)\, x^{n-m}} + \frac{\left(t_m - 2^{m-1}\right)}{2\pi i} \int\limits_{|x|=\rho} \frac{dx}{(1-2x+2x^2)\, x^{n-m+1}}$$

$$+ \frac{2^{m-1}}{2\pi i} \int\limits_{|x|=\rho} \frac{dx}{(1-2x)\, x^{n-m+1}}, \quad 0 < \rho \ll 1.$$

Для вычисления первого интеграла в (2.2) представим функцию $\dfrac{1}{1-2x+2x^2}$ в виде

$$\frac{1}{1-2x+2x^2} = \frac{1}{2i(x-x_1)} - \frac{1}{2i(x-x_2)},$$

где $x_1 = \dfrac{1+i}{2}$, $x_2 = \dfrac{1-i}{2}$ — корни многочлена $1-2x+2x^2$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|x|=\rho}\frac{dx}{(1-2x+2x^2)\,x^{n-m}} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|x|=\rho}\frac{dx}{2i\,(x-x_1)\,x^{n-m}} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|x|=\rho}\frac{dx}{2i\,(x-x_2)\,x^{n-m}}$$

$$= -\frac{1}{2ix_1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|x|=\rho}\frac{dx}{\Bigl(1-\dfrac{x}{x_1}\Bigr)x^{n-m}} + \frac{1}{2ix_2}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|x|=\rho}\frac{dx}{\Bigl(1-\dfrac{x}{x_2}\Bigr)x^{n-m}}$$

$$= -\frac{1}{2ix_1}\frac{1}{x_1^{n-m-1}} + \frac{1}{2ix_2}\frac{1}{x_2^{n-m-1}} = -\frac{1}{2ix_1^{n-m}} + \frac{1}{2ix_2^{n-m}},$$

и поскольку

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{(i\pi)/4}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-(i\pi)/4},$$

то для первого интеграла из (2.2) получаем следующее выражение:

$$-\frac{1}{2i\Bigl(\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{(i\pi)/4}\Bigr)^{n-m}} + \frac{1}{2i\Bigl(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-(i\pi)/4}\Bigr)^{n-m}} = -\frac{1}{2i}\bigl(\sqrt{2}\bigr)^{n-m}e^{-(i\pi)/4} + \frac{1}{2i}\bigl(\sqrt{2}\bigr)^{n-m}e^{i\pi(n-m)/4}$$

$$= \bigl(\sqrt{2}\bigr)^{n-m}\frac{e^{i\pi(n-m)/4} - e^{-i\pi(n-m)/4}}{2i} = 2^{(n-m)/2}\sin\frac{\pi(n-m)}{4}.$$

Аналогичным образом вычисляется второй интеграл в (2.2):

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|x|=\rho}\frac{dx}{(1-2x+2x^2)\,x^{n-m+1}} = 2^{(n-m+1)/2}\sin\frac{\pi(n-m+1)}{4}$$

$$= 2^{(n-m)/2}\sin\frac{\pi(n-m)}{4} + 2^{(n-m)/2}\cos\frac{\pi(n-m)}{4}.$$

И третий интеграл в (2.2):

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|x|=\rho}\frac{dx}{(1-2x)\,x^{n-m+1}} = 2^{n-m}.$$

Подставляя полученные значения интегралов в (2.2), имеем формулу (1.3). Первое утверждение теоремы 1 доказано.

Допустим теперь, что нам известны числа m, n, k и значения t_n, t_{n+k}. Согласно формуле (1.3) относительно неизвестных чисел t_m, t_{m+1} имеем систему линейных уравнений

$$\left\{\begin{aligned} &\sin\frac{\pi(n-m)}{4}t_{m+1} + 2^{1/2}\cos\frac{\pi(n-m+1)}{4}t_m \\ &\quad= 2^{(m-n)/2}t_n - 2^{(n+m-2)/2} + 2^{(2m-1)/2}\sin\frac{\pi(n-m+1)}{4}, \\ &\sin\frac{\pi(n+k-m)}{4}t_{m+1} + 2^{1/2}\cos\frac{\pi(n+k-m+1)}{4}t_m \\ &\quad= 2^{(m-n-k/2)}t_{n+k} - 2^{(n+k+m-2)/2} + 2^{(2m-1)/2}\sin\frac{\pi(n+k-m+1)}{4} \end{aligned}\right.$$

с определителем системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin\dfrac{\pi(n-m)}{4} & 2^{1/2}\cos\dfrac{\pi(n-m+1)}{4} \\[2ex] \sin\dfrac{\pi(n-m+k)}{4} & 2^{1/2}\cos\dfrac{\pi(n-m+k+1)}{4} \end{vmatrix} = -\sin\frac{\pi k}{4}.$$

Если $k \not\equiv 0 \pmod 4$, то определитель Δ не равен 0 и система имеет единственное решение. Отсюда заключаем, что при $k \not\equiv 0 \pmod 4$ значения t_m и t_{m+1} однозначно определяются числами m, n, k, t_n и t_{n+k} и второе утверждение теоремы 1 также верно. Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2

По условиям теоремы 2 (см. разд. 1) известны числа $t_r = 2^{r-1}$, $t_s = 2^{s-1} \pm 2^{(s-2)/2}$ последовательности (1.2). Тогда число r также известно, а поскольку из двух соседних степеней числа 2, между которыми расположено число t_s, только одна нечетна, то известно и число s. Согласно замечанию 1 можно считать, что последовательность (1.2) начинается с числа t_m, где $m = \min(r, s)$. По второму утверждению теоремы 1 числами m, r, s, t_r, t_s последовательность (1.2) определяется однозначно. Группа чисел (X) $(X \in \{1,2,3,4\})$, в которой содержатся оба числа t_r и t_s, определяется просто. При $r \equiv 1 \pmod 4$ число t_r содержится среди чисел t_{4k+1} групп (1), (2), а при $r \equiv 3 \pmod 4$ — среди чисел t_{4k+3} групп (3), (4) (см. формулировку теоремы, разд. 1). Из двух выбранных по числу t_r групп число t_s содержится только в одной, что и позволяет определить группу (X).

Покажем вначале, что числа групп (1)–(4) могут быть вычислены по формулам (i)–(iv) разд. 1. Функции натурального аргумента $\sin\dfrac{\pi n}{4}$ и $\cos\dfrac{\pi n}{4}$ периодические, периода 8. Начиная с $n = 4k-1$, функция $\sin\dfrac{\pi n}{4}$ последовательно принимает значения

$$(-1)^{k-1}2^{-1/2},\ 0,\ (-1)^k 2^{-1/2},\ (-1)^k,\ (-1)^k 2^{-1/2},\ 0,\ (-1)^{k+1}2^{-1/2},\ (-1)^{k+1},$$

при этом первые 4 значения функции $2^{n/2}\sin\dfrac{\pi n}{4}$ равны

$$(-1)^{k-1}2^{2k-1},\ 0,\ (-1)^k 2^{2k},\ (-1)^k 2^{2k+1}.$$

Отсюда следует, что числа групп (1), (2) удовлетворяют формулам (i), (ii).

Аналогично, начиная с $n = 4k-1$, функция $\cos\dfrac{\pi n}{4}$ принимает значения

$$(-1)^k 2^{-1/2},\ (-1)^k,\ (-1)^k 2^{-1/2},\ 0,\ (-1)^{k+1}2^{-1/2},\ (-1)^{k+1},\ (-1)^{k+1}2^{-1/2},\ (-1)^{k+1},$$

и первые 4 значения функции $2^{n/2}\cos\dfrac{\pi n}{4}$ равны

$$(-1)^k 2^{2k-1},\ (-1)^k 2^{2k},\ (-1)^k 2^{2k},\ 0.$$

Это означает, что числа групп (3), (4) могут быть вычислены по формулам (iii), (iv).

Докажем, наконец, что для чисел t_n, удовлетворяющих формулам (i)–(iv) разд. 1, выполняется рекуррентное соотношение (2.1): $t_{n+1} - 2t_n - 2^{n-1} + 2t_{n-1} = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} 2^n \pm 2^{n/2}\sin\frac{\pi n}{4} - 2\Big(2^{n-1} \pm 2^{n-1/2}\sin\frac{\pi(n-1)}{4}\Big) - 2^{n-1} + 2\Big(2^{n-2} \pm 2^{n-2/2}\sin\frac{\pi(n-2)}{4}\Big) \\ = \pm 2^{n/2}\Big(\sin\frac{\pi n}{4} + \sin\frac{\pi(n-2)}{4} - 2^{1/2}\sin\frac{\pi(n-1)}{4}\Big) \\ = \pm 2^{n/2}\Big(2^{1/2}\sin\Big(\frac{\pi n}{4} - \frac{\pi}{4}\Big) - 2^{1/2}\sin\frac{\pi(n-1)}{4}\Big) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, соотношение (2.1) для (i), (ii) верно.

Аналогично для чисел, удовлетворяющих формулам (iii), (iv), имеем

$$\begin{aligned} t_{n+1} - 2t_n - 2^{n-1} + 2t_{n-1} = \pm 2^{n/2}\Big(\cos\frac{\pi n}{4} + \cos\frac{\pi(n-2)}{4} - 2^{1/2}\cos\frac{\pi(n-1)}{4}\Big) \\ = \pm 2^{n/2}\Big(\cos\frac{\pi n}{4} + \sin\frac{\pi n}{4} - 2^{1/2}\cos\frac{\pi(n-1)}{4}\Big) = 0 \end{aligned}$$

и соотношение (2.1) справедливо. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лекции по теории графов / В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, Р. И. Тышкевич. М.: Наука; Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. 384 с.
2. **Бурбаки Н.** Группы и алгебры Ли. Гл. IV–VI.: Группы, порожденные отражениями системы корней. М.: Мир, 1972. 334 с.
3. **Hall J.I., Holroyd F.C., Wilson R.J.** Symplectic geometry and mapping class groups // Geometrical combinatorics (Milton Keynes, 1984). Pitman; London, 1984. P. 21–33. (Research Notes in Mathematics; vol. 114.)
4. **Hall J.I.** Graphs, geometry, 3-transpositions, and symplectic F_2-transvection groups // Proc. London Math. Soc. (Ser. 3). 1989. Vol. 58, no. 1. P. 89–111.
5. **Созутов А.И.** О группах типа Σ_4, порожденных 3-транспозициями // Сиб. мат. журн. 1992. Vol. 33, № 1. С. 140–149.
6. **Созутов А.И., Кузнецов А.А., Синицин В.М.** О системах порождающих некоторых групп с 3-транспозициями // Сиб. мат. электр. изв. Т. 10. С. 285–301.
7. **Aschbacher M.** 3-transposition groups. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 260 p.
8. **Александрова И.О.** О системах порождающих некоторых групп с 3-транспозициями // Алгебра, логика: теория и приложения: Тез. докл. междунар. конф., посвящ. памяти В. П. Шункова / Сиб. федер. ун-т. Красноярск, 2013. С. 14–15.
9. **Егорычев Г.П.** Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм. Новосибирск: Наука, 1979. 286 с.

Поступила 27.08.2015

Созутов Анатолий Ильич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Сибирский федеральный университет
e-mail: sozutov_ai@mail.ru

Александрова Инна Олеговна
ст. преподаватель
Сибирский федеральный университет
e-mail: aio40@mail.ru