ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 1 2016

УДК 517.977

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА[1]

Л. И. Рубина, О. Н. Ульянов

Для системы уравнений Навье — Стокса в безразмерном виде, описывающей динамику вязкой несжимаемой жидкости, рассматривается начальная и краевая задача. Используется метод характеристик и геометрический метод, развиваемый авторами. Отмечаются некоторые особенности постановки этих задач. Изучается влияние числа Рейнольдса на течение вблизи поверхности тела, обтекаемого потоком вязкой жидкости.

Ключевые слова: уравнения Навье — Стокса, начальная и краевая задача, число Рейнольдса, турбулентность.

L. I. Rubina, O. N. Ul'yanov. On some properties of the Navier–Stokes equations.

We discuss the initial and boundary value problems for the system of dimensionless Navier–Stokes equations describing the dynamics of a viscous incompressible fluid using the method of characteristics and the geometric method developed by the authors. Some properties of the formulation of these problems are considered. We study the effect of the Reynolds number on the flow of a viscous fluid near the surface of a body.

Keywords: Navier–Stokes equations, initial value problem, boundary value problem, Reynolds number, turbulence.

Введение

В статье для вязкой несжимаемой жидкости рассматривается система уравнений Навье — Стокса в безразмерном виде [1]

$$
\begin{aligned}
&S\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+E\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{1}{R}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big)=0,\\
&S\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+E\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{1}{R}\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\Big)=0,\\
&S\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}+E\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{1}{R}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\Big)=\frac{1}{F},\\
&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,
\end{aligned}
\tag{0.1}
$$

где S — число Струхаля, E — число Эйлера, R — число Рейнольдса, F — число Фруда, $\{u,v,w\}$ — компоненты вектора скорости, p — давление.

Различным аспектам изучения системы уравнений Навье — Стокса и ее приложений посвящена обширная литература. Отметим лишь часть направлений исследований: это изучение симметрий, законов сохранения и групповых свойств этих уравнений и связанных с ними уравнений (см., например, обзор [2] и библиографию к нему), поиск и применение точных и приближенных решений [3], аналитическое, приближенное и численное решение или исследование различных задач, математическая модель которых основана на применении системы

[1]Работа выполнена при поддержке Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ, контракт 02.A03.21.0006)).

уравнений Навье — Стокса (см. например, [4]), асимптотическое поведение решений [5;6]. Особое место в этом ряду занимают исследования, посвященные проблемам разрешимости задач (в частности и в первую очередь задачи Коши [7], краевых и начально-краевых задач), поставленных для системы уравнений Навье — Стокса [8], связанных с этой проблематикой вопросов BLOW-UP решений [9]. Много внимания в контексте исследования системы уравнений Навье — Стокса уделяется проблемам возникновения, развития и описания явления турбулентности в вязкой несжимаемой жидкости. Интерес к проблеме возникновения турбулентного движения и к причинам нарушения ламинарного течения уходит далеко в прошлое и сохраняется до настоящего времени [10; 11]. Известны два основных подхода к теоретическому исследованию данной проблемы [12]. В одном подходе на ламинарное течение накладываются возмущения и изучается, как эти возмущения влияют на течение [13; 14]. В другом подходе делаются попытки свести описание возникающего течения к динамическим системам и рассматриваются их особенности (бифуркация, странные аттракторы) [10].

В статье для системы уравнений Навье — Стокса (0.1) рассматриваются начальная и краевая задачи. Изучается влияние числа Рейнольдса на течение вблизи поверхности тела, обтекаемого потоком вязкой жидкости. При исследованиях используются метод характеристик и геометрический метод, развиваемый авторами. Рассмотрение ограничивается случаем непрерывно дифференцируемых функций.

В работе выделены такие особенности модели, которые в “критических” случаях могут приводить к разрушению ламинарного течения и возникновению таких явлений, как рассеяние или турбулентность (утверждение 2). Показано, как этого можно избежать (утверждение 1).

1. Некоторые особенности постановки задачи с начальными данными

Изучению начально-краевой задачи для системы (0.1) отводится значительное место в литературе. В одних работах [8] задача решается в классе обобщенных решений. В других — кроме слабых решений рассматриваются и сильные решения, при этом в трехмерном случае удается построить решение либо локальное, либо полное (при всех $t > 0$) только для достаточно малых начальных скоростей [15]. В [16] отмечено, что в системе уравнений Навье — Стокса скорости и давление удовлетворяют уравнению неразрывности $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0$ и соотношению

$$\Delta p = g, \quad g = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + 2\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2. \tag{1.1}$$

Ясно, что оба эти соотношения должны выполняться тождественно в любой момент времени, в том числе и при $t = 0$. Ясно и то, что если считать начальные скорости нулевыми [8], а давление — комплексной функцией, то обе выписанные выше зависимости обращаются в тождество. Мы будем рассматривать начальную задачу в классе достаточно гладких функций в области действительных переменных.

Перейдем в системе (0.1) к новым независимым переменным $\xi = z - \psi(x, y, t)$, $x = \eta$, $y = \zeta$, $t = \tau$ и рассмотрим решение системы вблизи поверхности $\xi = 0$. След этой поверхности на начальном многообразии имеет вид $\xi = z - \psi(x, y, 0) = 0$. Выпишем, предполагая, что $p(x, y, z, 0)$, $u(x, y, z, 0)$, $v(x, y, z, 0)$, $w(x, y, z, 0)$ — произвольные достаточно гладкие функции, в новых переменных уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\psi_\eta + \frac{\partial v}{\partial \zeta} - \frac{\partial v}{\partial \xi}\psi_\zeta + \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0,$$

его дифференциальные следствия и соотношение (1.1):

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}\psi_{\eta\eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\psi_{\eta\zeta} = G_1(\psi_\eta, \psi_\zeta, u_{\eta\eta}, u_{\eta\xi}, u_{\xi\xi}, v_{\eta\zeta}, v_{\zeta\xi}, v_{\eta\xi}, v_{\xi\xi}, w_{\eta\xi}, w_{\xi\xi}),$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}\psi_{\eta\zeta} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\psi_{\zeta\zeta} = G_2(\psi_\eta, \psi_\zeta, u_{\eta\zeta}, u_{\eta\xi}, u_{\xi\xi}, v_{\zeta\zeta}, v_{\zeta\xi}, v_{\xi\xi}, w_{\zeta\xi}, w_{\xi\xi}), \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \xi}(\psi_{\eta\eta} + \psi_{\zeta\zeta}) = F(\psi_\eta, \psi_\zeta, u_\eta, u_\zeta, u_\xi, v_\eta, v_\zeta, v_\xi, w_\eta, w_\zeta, w_\xi, p_{\eta\eta}, p_{\zeta\zeta}, p_{\xi\xi}, p_{\eta\xi}, p_{\zeta\xi}).$$

Определим $\psi_{\eta\eta}$, $\psi_{\eta\zeta}$, $\psi_{\zeta\zeta}$ из алгебраической системы уравнений (1.2):

$$\psi_{\eta\eta} = \frac{1}{F_1}\Big[G_1\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial p}{\partial \xi} - G_2\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial p}{\partial \xi} + F\Big(\frac{\partial v}{\partial \xi}\Big)^2\Big], \quad \psi_{\eta\zeta} = \frac{1}{F_1}\Big[G_1\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial p}{\partial \xi} + G_2\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial p}{\partial \xi} - F\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial v}{\partial \xi}\Big],$$

$$\psi_{\zeta\zeta} = \frac{1}{F_1}\Big[G_2\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial p}{\partial \xi} - G_1\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial p}{\partial \xi} + F\Big(\frac{\partial u}{\partial \xi}\Big)^2\Big], \quad F_1 = \frac{\partial p}{\partial \xi}\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial \xi}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v}{\partial \xi}\Big)^2\Big].$$

Система (1.2) как система в частных производных будет совместной, если смешанные производные равны ($\psi_{\eta\eta\zeta} = \psi_{\eta\zeta\eta}$, $\psi_{\eta\zeta\zeta} = \psi_{\zeta\zeta\eta}$). Отсюда, подставив в полученные соотношения $\psi_{\eta\eta\zeta} = \psi_{\eta\zeta\eta}$ и $\psi_{\eta\zeta\zeta} = \psi_{\zeta\zeta\eta}$ выражения выписанных выше вторых производных, придем к уравнению первого порядка относительно функции $\psi(\eta, \zeta)$:

$$A(\psi_\eta, \psi_\zeta, p_\xi, p_\eta, p_\zeta, p_{\xi\eta}, p_{\xi\zeta}, p_{\eta\zeta}, u_\eta, u_\zeta, u_{\xi\eta}, u_{\xi\zeta}, u_{\eta\zeta}, v_\eta, v_\zeta, v_{\xi\eta}, v_{\xi\zeta}, v_{\eta\zeta}, ...) = 0.$$

Таким образом, на начальном многообразии след $\xi = z - \psi(x, y, 0) = 0$ будет гладкой поверхностью, если уравнение неразрывности и уравнение $A = 0$ первого порядка будут задавать ψ_η и ψ_ζ — производные одной и той же функции, что приводит к зависимости между начальными данными (эта зависимость заложена в уравнении неразрывности и соотношении (1.1)). Если зависимость (согласование начальных условий) не выполняется, то течение около следа будет иметь некоторые особенности. Фактически при произвольных начальных условиях получаются два уравнения в частных производных первого порядка и, как следствие, две пересекающиеся характеристики. Одна задается уравнением неразрывности, другая — уравнением $A = 0$, что приводит к тому, что возмущения, которые распространялись бы по одномерному многообразию в случае, если начальные условия согласованы, распространяются в двумерной области между двумя характеристиками. Известно, что одномерное движение и двумерное движение могут значительно отличаться (см. например, [17]). Это создает проблемы при построении сильного решения начально-краевой задачи для произвольных начальных данных в целом.

2. Некоторые особенности постановки краевой задачи

Рассмотрим для системы (0.1) постановку задачи с краевыми условиями, когда на неподвижном обтекаемом теле заданы условия прилипания.

Из последнего уравнения системы имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\Big(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\Big), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\Big(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\Big), \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -\Big(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\Big).$$

Учитывая эти соотношения, перепишем систему (0.1) в виде

$$S\frac{\partial u}{\partial t} - u\Big(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\Big) + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + E\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{R}\Big(-\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial z\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big) = 0,$$

$$S\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} - v\Big(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\Big) + w\frac{\partial v}{\partial z} + E\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{R}\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial z\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\Big) = 0, \tag{2.1}$$

$$S\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} - w\Big(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\Big) + E\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{R}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\Big) = \frac{1}{F}.$$

В системе (2.1) перейдем к новым переменным $\psi(x,y)-z=\xi$, $x=\eta$, $y=\zeta$, $t=\tau$. Получим

$$\begin{gathered}
S\frac{\partial u}{\partial \tau}-u\Big(\frac{\partial v}{\partial \zeta}+\frac{\partial v}{\partial \xi}\psi_y-\frac{\partial w}{\partial \xi}\Big)+v\Big(\frac{\partial u}{\partial \zeta}+\frac{\partial u}{\partial \xi}\psi_y\Big)-w\frac{\partial u}{\partial \xi}+E\Big(\frac{\partial p}{\partial \eta}+\frac{\partial p}{\partial \xi}\psi_x\Big)\\
-\frac{1}{R}\Big(-\frac{\partial^2 v}{\partial \zeta\partial \eta}-\frac{\partial^2 v}{\partial \eta\partial \xi}\psi_y-\frac{\partial^2 v}{\partial \zeta\partial \xi}\psi_x-\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\psi_x\psi_y-\frac{\partial v}{\partial \xi}\psi_{xy}+\frac{\partial^2 w}{\partial \eta\partial \xi}+\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\psi_x\\
+\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta\partial \xi}\psi_y+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\psi_y^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\psi_{yy}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\Big)=0,\\
S\frac{\partial v}{\partial \tau}+u\Big(\frac{\partial v}{\partial \eta}+\frac{\partial v}{\partial \xi}\psi_x\Big)-v\Big(\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{\partial u}{\partial \xi}\psi_x-\frac{\partial w}{\partial \xi}\Big)-w\frac{\partial v}{\partial \xi}+E\Big(\frac{\partial p}{\partial \zeta}+\frac{\partial p}{\partial \xi}\psi_y\Big)\\
-\frac{1}{R}\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}+2\frac{\partial^2 v}{\partial \eta\partial \xi}\psi_x+\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\psi_x^2+\frac{\partial v}{\partial \xi}\psi_{xx}-\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \zeta}-\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\psi_y \qquad (2.2)\\
-\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta\partial \xi}\psi_x-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\psi_x\psi_y-\frac{\partial u}{\partial \xi}\psi_{xy}+\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta\partial \xi}+\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\psi_y+\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\Big)=0,\\
S\frac{\partial w}{\partial \tau}+u\Big(\frac{\partial w}{\partial \eta}+\frac{\partial w}{\partial \xi}\psi_x\Big)+v\Big(\frac{\partial w}{\partial \zeta}+\frac{\partial w}{\partial \xi}\psi_y\Big)-w\Big(\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{\partial u}{\partial \xi}\psi_x+\frac{\partial v}{\partial \zeta}+\frac{\partial v}{\partial \xi}\psi_y\Big)-E\frac{\partial p}{\partial \xi}\\
-\frac{1}{R}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial \eta\partial \xi}\psi_x+\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\psi_x^2+\frac{\partial w}{\partial \xi}\psi_{xx}\\
+\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta\partial \xi}\psi_y+\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\psi_y^2+\frac{\partial w}{\partial \xi}\psi_{yy}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\psi_x+\frac{\partial^2 v}{\partial \zeta\partial \xi}+\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\psi_y\Big)=\frac{1}{F}.
\end{gathered}$$

Систему уравнений (2.2) запишем в виде $AU=B$, где

$$A=\frac{1}{R}\begin{pmatrix}\psi_y^2+1 & -\psi_x\psi_y & \psi_x\\ -\psi_x\psi_y & \psi_x^2+1 & \psi_y\\ \psi_x & \psi_y & \psi_x^2+\psi_y^2\end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}S\frac{\partial u}{\partial \tau}-u\Big(\frac{\partial v}{\partial \zeta}+\frac{\partial v}{\partial \xi}\psi_y-\frac{\partial w}{\partial \xi}\Big)+v\Big(\frac{\partial u}{\partial \zeta}+\frac{\partial u}{\partial \xi}\psi_y\Big)-w\frac{\partial u}{\partial \xi}+E\Big(\frac{\partial p}{\partial \eta}+\frac{\partial p}{\partial \xi}\psi_x\Big)-\frac{M}{R}\\ S\frac{\partial v}{\partial \tau}+u\Big(\frac{\partial v}{\partial \eta}+\frac{\partial v}{\partial \xi}\psi_x\Big)-v\Big(\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{\partial u}{\partial \xi}\psi_x-\frac{\partial w}{\partial \xi}\Big)-w\frac{\partial v}{\partial \xi}+E\Big(\frac{\partial p}{\partial \zeta}+\frac{\partial p}{\partial \xi}\psi_y\Big)-\frac{N}{R}\\ S\frac{\partial w}{\partial \tau}+u\Big(\frac{\partial w}{\partial \eta}+\frac{\partial w}{\partial \xi}\psi_x\Big)+v\Big(\frac{\partial w}{\partial \zeta}+\frac{\partial w}{\partial \xi}\psi_y\Big)-wQ-E\frac{\partial p}{\partial \xi}-\frac{H}{R}-\frac{1}{F}\end{pmatrix}.$$

Здесь

$$M=-\frac{\partial^2 v}{\partial \zeta\partial \eta}-\frac{\partial^2 v}{\partial \eta\partial \xi}\psi_y-\frac{\partial^2 v}{\partial \zeta\partial \xi}\psi_x-\frac{\partial v}{\partial \xi}\psi_{xy}+\frac{\partial^2 w}{\partial \eta\partial \xi}+\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta\partial \xi}\psi_y+\frac{\partial u}{\partial \xi}\psi_{yy},$$

$$N=\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}+2\frac{\partial^2 v}{\partial \eta\partial \xi}\psi_x+\frac{\partial v}{\partial \xi}\psi_{xx}-\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \zeta}-\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\psi_y-\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta\partial \xi}\psi_x-\frac{\partial u}{\partial \xi}\psi_{xy}+\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta\partial \xi},$$

$$Q=\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{\partial u}{\partial \xi}\psi_x+\frac{\partial v}{\partial \zeta}+\frac{\partial v}{\partial \xi}\psi_y,$$

$$H=\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial \eta\partial \xi}\psi_x+\frac{\partial w}{\partial \xi}\psi_{xx}+\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta\partial \xi}\psi_y+\frac{\partial w}{\partial \xi}\psi_{yy}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}+\frac{\partial^2 v}{\partial \zeta\partial \xi}.$$

Из последнего уравнения системы (0.1) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{\partial v}{\partial \zeta}+\frac{\partial u}{\partial \xi}\psi_x+\frac{\partial v}{\partial \xi}\psi_y-\frac{\partial w}{\partial \xi}=0. \tag{2.3}$$

Выпишем также дифференциальные следствия выражения (2.3):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial \zeta\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\psi_x+\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\partial \eta}\psi_y-\frac{\partial^2 w}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial u}{\partial \xi}\psi_{xx}+\frac{\partial v}{\partial \xi}\psi_{xy}=0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \zeta}+\frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \zeta}\psi_x+\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\partial \zeta}\psi_y-\frac{\partial^2 w}{\partial \xi\partial \zeta}+\frac{\partial u}{\partial \xi}\psi_{xy}+\frac{\partial v}{\partial \xi}\psi_{yy}=0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \tau}+\frac{\partial^2 v}{\partial \zeta\partial \tau}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \tau}\psi_x+\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\partial \tau}\psi_y-\frac{\partial^2 w}{\partial \xi\partial \tau}=0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}+\frac{\partial^2 v}{\partial \zeta\partial \xi}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\psi_x+\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\psi_y-\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}=0.$$

Пусть на поверхности $\xi=0$ заданы краевые условия $u(t,\psi(x,y),x,y)=0$, $v(t,\psi(x,y),x,y)=0$, $w(t,\psi(x,y),x,y)=0$, $\partial u/\partial\xi=u_1(\eta,\zeta)$, $\partial v/\partial\xi=v_1(\eta,\zeta)$. Тогда из уравнения (2.3) имеем $w_1(\eta,\zeta)=\partial w/\partial\xi=u_1\psi_x+v_1\psi_y$. Зададим также на этой поверхности $p(t,\psi(x,y),x,y)=p_0(\eta,\zeta)$, $\partial p/\partial\xi=p_1(\eta,\zeta)$.

Замечаем, что определитель матрицы A равен нулю. Умножаем правую и левую часть системы $AU=B$ на левый нуль-вектор матрицы (см. [18]):

$$L=\{\psi_x^2(\psi_x^2+\psi_y^2+1),\psi_x\psi_y(\psi_x^2+\psi_y^2+1)-\psi_x(\psi_x^2+\psi_y^2+1)\},$$

и получаем условия существования решения системы (2.2) на поверхности $\xi=0$, предполагая, что $\psi_x\neq 0$, $\psi_x^2+\psi_y^2+1\neq 0$, и учитывая соотношение (2.3) и его дифференциальные следствия, а также заданные краевые условия

$$\frac{1}{R}\Big[\Big(\frac{\partial u_1}{\partial \eta}+\frac{\partial v_1}{\partial \zeta}\Big)(\psi_x^2+\psi_y^2+1)+2(\psi_x\psi_{xx}+\psi_y\psi_{xy})u_1+2(\psi_x\psi_{xy}+\psi_y\psi_{yy})v_1\Big]$$
$$+E\Big[\frac{\partial p_0}{\partial \eta}\psi_x+\frac{\partial p_0}{\partial \zeta}\psi_y+p_1(\psi_x^2+\psi_y^2+1)\Big]+\frac{1}{F}=0. \tag{2.4}$$

Итак, при заданных первых производных (краевых условиях) имеем два соотношения (2.3) и (2.4), которые должны выполняться на обтекаемой поверхности, чтобы система (2.2) имела решение.

Преобразуем соотношение (2.4) к более удобному виду. Для этого перепишем дифференциальные следствия уравнения (2.3) и соотношение (2.4) следующим образом:

$$\begin{aligned}
&u_1\psi_{\eta\eta}+v_1\psi_{\eta\zeta}=-\Big(\frac{\partial u_1}{\partial \eta}\psi_\eta+\frac{\partial v_1}{\partial \eta}\psi_\zeta-\frac{\partial w_1}{\partial \eta}\Big),\\
&u_1\psi_{\eta\zeta}+v_1\psi_{\zeta\zeta}=-\Big(\frac{\partial u_1}{\partial \zeta}\psi_\eta+\frac{\partial v_1}{\partial \zeta}\psi_\zeta-\frac{\partial w_1}{\partial \zeta}\Big),\\
&(\psi_\eta\psi_{\eta\eta}+\psi_\zeta\psi_{\eta\zeta})u_1+(\psi_\eta\psi_{\eta\zeta}+\psi_\zeta\psi_{\zeta\zeta})v_1=-0.5ER\Big[\frac{\partial p_0}{\partial \eta}\psi_\eta+\frac{\partial p_0}{\partial \zeta}\psi_\zeta+p_1 n\Big]\\
&-0.5\Big(\frac{\partial u_1}{\partial \eta}+\frac{\partial v_1}{\partial \zeta}\Big)n-0.5\frac{R}{F},\qquad \text{где}\quad n=\psi_\eta^2+\psi_\zeta^2+1.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Умножим первое уравнение системы (2.5) на ψ_η, а второе уравнение — на ψ_ζ и сложим их. Вычитая из полученной суммы третье уравнение системы (2.5), сведем (2.4) к соотношению

$$0.5n\frac{\partial u_1}{\partial \eta}+0.5n\frac{\partial v_1}{\partial \zeta}+\psi_\eta\frac{\partial w_1}{\partial \eta}+\psi_\zeta\frac{\partial w_1}{\partial \zeta}-\psi_\eta\psi_\zeta\Big(\frac{\partial u_1}{\partial \zeta}+\frac{\partial v_1}{\partial \eta}\Big)$$

$$+ 0.5ER\Big[\frac{\partial p_0}{\partial \eta}\psi_\eta + \frac{\partial p_0}{\partial \zeta}\psi_\zeta + p_1 n\Big] + 0.5\frac{R}{F} = 0. \tag{2.6}$$

Соотношение (2.3) при заданных краевых условиях принимает вид

$$w_1 = u_1\psi_\eta + v_1\psi_\zeta. \tag{2.7}$$

Тогда при заданных выводящих производных $u_1 = \partial u/\partial\xi$, $v_1 = \partial v/\partial\xi$, $w_1 = \partial w/\partial\xi$ поверхность $\xi = 0$ должна удовлетворять системе (2.6), (2.7) двух уравнений в частных производных первого порядка, если на теле известны давление p_0 и его выводящая производная $p_1 = \partial p/\partial\xi$.

Условие существования достаточно гладкого решения системы (2.2) вблизи обтекаемой поверхности свелось к получению условия совместности системы (2.6), (2.7).

Утверждение 1. *Система дифференциальных уравнений первого порядка* (2.6), (2.7) *совместна тогда и только тогда, когда тождественно выполняется равенство*

$$\{[-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}]/(2a)\}_\eta = \{w_1/u_1 - v_1[-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}]/(2au_1)\}_\zeta, \tag{2.8}$$

где нижние индексы η *и* ζ *обозначают, по каким переменным вычисляются производные от соответствующих выражений,*

$$a = 0.5\frac{u_1^2 - v_1^2}{u_1^2}\frac{\partial u_1}{\partial\eta} + \frac{v_1}{u_1}\frac{\partial u_1}{\partial\zeta} + \frac{v_1}{u_1}\frac{\partial v_1}{\partial\eta} + 0.5\frac{v_1^2 - u_1^2}{u_1^2}\frac{\partial v_1}{\partial\zeta} + 0.5ERp_1\frac{u_1^2 + v_1^2}{u_1^2},$$

$$b = \frac{v_1 w_1}{u_1^2}\frac{\partial u_1}{\partial\eta} - \frac{w_1}{u_1}\frac{\partial u_1}{\partial\zeta} - \frac{w_1}{v_1}\frac{\partial v_1}{\partial\eta} - \frac{w_1 v_1}{u_1^2}\frac{\partial v_1}{\partial\zeta} - \frac{v_1}{u_1}\frac{\partial w_1}{\partial\eta} + \frac{\partial w_1}{\partial\zeta}$$
$$- 0.5ER\frac{v_1}{u_1}\frac{\partial p_0}{\partial\eta} + 0.5ER\frac{\partial p_0}{\partial\zeta} - ERp_1\frac{v_1 w_1}{u_1^2},$$

$$c = 0.5\frac{u_1^2 - w_1^2}{u_1^2}\frac{\partial u_1}{\partial\eta} + 0.5\frac{u_1^2 + w_1^2}{u_1^2}\frac{\partial v_1}{\partial\zeta} + \frac{w_1}{u_1}\frac{\partial w_1}{\partial\eta} + 0.5ER\frac{w_1}{u_1}\frac{\partial p_0}{\partial\eta} + 0.5ERp_1\frac{u_1^2 + w_1^2}{u_1^2} + 0.5\frac{R}{F}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Якобиева система, полученная из системы дифференциальных уравнений первого порядка (2.6), (2.7), будет вполне интегрируемой тогда и только тогда, когда тождественно выполняется равенство смешанных производных.

Подставив в уравнениие (2.6) ψ_η из соотношения (2.7), имеем

$$0.5\frac{\partial u_1}{\partial\eta}\Big(\frac{u_1^2 - v_1^2}{u_1^2}\psi_\zeta^2 + 2\psi_\zeta\frac{v_1 w_1}{u_1^2} + \frac{u_1^2 - w_1^2}{u_1^2}\Big) - \frac{\partial u_1}{\partial\zeta}\Big(\frac{w_1}{u_1}\psi_\zeta - \frac{v_1}{u_1}\psi_\zeta^2\Big)$$
$$- \frac{\partial v_1}{\partial\eta}\Big(\frac{w_1}{u_1}\psi_\zeta - \frac{v_1}{u_1}\psi_\zeta^2\Big) + 0.5\frac{\partial v_1}{\partial\zeta}\Big(\frac{v_1^2 - u_1^2}{u_1^2}\psi_\zeta^2 - 2\psi_\zeta\frac{v_1 w_1}{u_1^2} + \frac{u_1^2 + w_1^2}{u_1^2}\Big)$$
$$+ \frac{\partial w_1}{\partial\eta}\Big(\frac{w_1}{u_1} - \frac{v_1}{u_1}\psi_\zeta\Big) + \frac{\partial w_1}{\partial\zeta}\psi_\zeta + 0.5ER\frac{\partial p_0}{\partial\eta}\Big(\frac{w_1}{u_1} - \psi_\zeta\frac{v_1}{u_1}\Big) + 0.5ER\psi_\zeta\frac{\partial p_0}{\partial\zeta}$$
$$+ 0.5ERp_1\Big(\frac{u_1^2 + v_1^2}{u_1^2}\psi_\zeta^2 - 2\psi_\zeta\frac{v_1 w_1}{u_1^2} + \frac{u_1^2 + w_1^2}{u_1^2}\Big) + 0.5\frac{R}{F} = 0. \tag{2.9}$$

Выразив из (2.9) ψ_ζ, а затем ψ_η из соотношения (2.7), получим якобиеву систему

$$\psi_\zeta = c_1/(2a), \quad \psi_\eta = w_1/u_1 - v_1 c_1/(2au_1), \quad \text{где} \quad c_1 = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}.$$

Требование равенства смешанных производных приведет к связывающему скорость и давление соотношению (2.8), которое должно тождественно выполняться на обтекаемом теле

Утверждение доказано. □

Если соотношение (2.8) не обращается в тождество, то смешанные производные равны только на некоторой линии $\varphi(\eta,\zeta)=0$.

Обратимся к соотношению (2.7). В этом соотношении

$$u_1=\lim_{\xi\to 0}\frac{u(\eta,\zeta,\xi)-u(\eta,\zeta,0)}{\xi}=\lim_{\xi\to 0}\frac{u(\eta,\zeta,\xi)}{\xi},\quad v_1=\lim_{\xi\to 0}\frac{v(\eta,\zeta,\xi)-v(\eta,\zeta,0)}{\xi}=\lim_{\xi\to 0}\frac{v(\eta,\zeta,\xi)}{\xi},$$

$$w_1=\lim_{\xi\to 0}\frac{w(\eta,\zeta,\xi)-w(\eta,\zeta,0)}{\xi}=\lim_{\xi\to 0}\frac{w(\eta,\zeta,\xi)}{\xi},$$

следовательно, $u(\eta,\zeta,\xi)\psi_\eta+v(\eta,\zeta,\xi)\psi_\zeta-w(\eta,\zeta,\xi)=o(\xi)$.

Таким образом в силу соотношения (2.7) поток вблизи поверхности обтекаемого тела “повторяет” форму его поверхности.

Как показано ранее, для существования достаточно гладкого решения системы (2.2) выполнения одного условия (2.7) недостаточно. Для построения решения в классе гладких функций необходимо выполнение условий (2.6)–(2.8). Если условие (2.8) не выполняется, то соотношение (2.7) и соотношение (2.6) задают два конуса нормалей и две разные поверхности, пересекающиеся по линии $\varphi(\eta,\zeta)=0$ — поверхность обтекаемого тела и поверхность, описываемаю уравнением (2.6). Так как на поверхности обтекаемого тела имеем условия прилипания, эту поверхность можно считать характеристической поверхностью слабого разрыва. Ситуация с двумя разными поверхностями, имеющими общую часть, аналогична ситуации в геометрической оптике, когда направление падающего луча света совпадает с оптической осью кристалла. Математически такая ситуация описывается двумя характеристическими поверхностями, имеющими одну общую нормаль. В случае геометрической оптики это приводит к рассеянию света, называемому конической рефракцией [19]. Как следует из наблюдений [14], нередко при обтекании гладких поверхностей (рассматриваемая нами задача) возникают зоны перемешивания и рассеяния. Причиной таких явлений является то, что возмущение от тела на линии пересечения поверхностей $\varphi(\eta,\zeta)=0$ рассеивается подобно рассеиванию луча при конической рефракции. Между поверхностями (2.6), (2.7) может возникать достаточно сложная картина течения (сильные и слабые разрывы, обострение, турбулентное перемешивание).

Следствие. *Если на поверхности обтекаемого тела* $u_1=v_1=w_1=0$*, то условие совместности* (2.4) *принимает вид*

$$E\Big[\frac{\partial p_0}{\partial\eta}\psi_x+\frac{\partial p_0}{\partial\zeta}\psi_y+p_1(\psi_x^2+\psi_y^2+1)\Big]+\frac{1}{F}=0.$$

3. Зависимость выводящих производных от числа Рейнольдса

Если в системе (0.1) перейти к новым переменным, не учитывая уравнение неразрывности, то получим систему $GU=T_0$, где

$$G=\frac{1}{R}\begin{pmatrix}\psi_x^2+\psi_y^2+1 & 0 & 0\\ 0 & \psi_x^2+\psi_y^2+1 & 0\\ 0 & 0 & \psi_x^2+\psi_y^2+1\end{pmatrix}.$$

Для вектора T_0 имеем

$$T_0=\begin{pmatrix} S\dfrac{\partial u}{\partial\tau}+u\Big(\dfrac{\partial u}{\partial\eta}+\dfrac{\partial u}{\partial\xi}\psi_x\Big)+v\Big(\dfrac{\partial u}{\partial\zeta}+\dfrac{\partial u}{\partial\xi}\psi_y\Big)-w\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+E\Big(\dfrac{\partial p}{\partial\eta}+\dfrac{\partial p}{\partial\xi}\psi_x\Big)-\dfrac{M_1}{R}\\ S\dfrac{\partial v}{\partial\tau}+u\Big(\dfrac{\partial v}{\partial\eta}+\dfrac{\partial v}{\partial\xi}\psi_x\Big)+v\Big(\dfrac{\partial v}{\partial\zeta}+\dfrac{\partial v}{\partial\xi}\psi_y\Big)-w\dfrac{\partial v}{\partial\xi}+E\Big(\dfrac{\partial p}{\partial\zeta}+\dfrac{\partial p}{\partial\xi}\psi_y\Big)-\dfrac{N_1}{R}\\ S\dfrac{\partial w}{\partial\tau}+u\Big(\dfrac{\partial w}{\partial\eta}+\dfrac{\partial w}{\partial\xi}\psi_x\Big)+v\Big(\dfrac{\partial w}{\partial\zeta}+\dfrac{\partial w}{\partial\xi}\psi_y\Big)-w\dfrac{\partial w}{\partial\xi}-E\dfrac{\partial p}{\partial\xi}-\dfrac{H_1}{R}-\dfrac{1}{F}\end{pmatrix},$$

где $M_1 = \dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}\psi_x + \dfrac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial\zeta\partial\xi}\psi_y, \quad N_1 = \dfrac{\partial^2 v}{\partial\eta^2} + 2\dfrac{\partial^2 v}{\partial\eta\partial\xi}\psi_x + \dfrac{\partial^2 v}{\partial\zeta^2} + 2\dfrac{\partial^2 v}{\partial\zeta\partial\xi}\psi_y,$

$$H_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial\eta\partial\xi}\psi_x + \frac{\partial^2 w}{\partial\zeta^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial\zeta\partial\xi}\psi_y.$$

Отсюда получаем, что на поверхности $\xi = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} &= \frac{R}{\psi_x^2 + \psi_y^2 + 1}\Big[E\Big(\frac{\partial p_0}{\partial\eta} + p_1\psi_x\Big) - \frac{M_2}{R}\Big],\\
\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2} &= \frac{R}{\psi_x^2 + \psi_y^2 + 1}\Big[E\Big(\frac{\partial p_0}{\partial\zeta} + p_1\psi_y\Big) - \frac{N_2}{R}\Big],\\
\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2} &= -\frac{R}{\psi_x^2 + \psi_y^2 + 1}\Big(Ep_1 + \frac{H_2}{R} + \frac{1}{F}\Big),
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где $M_2 = 2\Big(\dfrac{\partial u_1}{\partial\eta}\psi_x + \dfrac{\partial u_1}{\partial\zeta}\psi_y\Big), \quad N_2 = 2\Big(\dfrac{\partial v_1}{\partial\eta}\psi_x + \dfrac{\partial v_1}{\partial\zeta}\psi_y\Big), \quad H_2 = 2\Big(\dfrac{\partial w_1}{\partial\eta}\psi_x + \dfrac{\partial w_1}{\partial\zeta}\psi_y\Big),$

$w_1 = u_1\psi_x + v_1\psi_y$. Подставляя значения (3.1) в дифференциальные следствия (2.3), снова получаем соотношение (2.4). Следовательно, выражения (3.1) задают вторые производные течения около обтекаемого тела, если заданные на теле краевые условия удовлетворяют зависимости (2.4).

Как следует из (3.1), при $R \to \infty$ вторые производные от компонент скорости также стремятся к бесконечности.

Отметим, что из соотношения (3.1) также следует, что если число Рейнольдса

$$R < \min\Big\{M_2/\Big[E\Big(\frac{\partial p_0}{\partial\eta} + p_1\psi_x\Big)\Big], \quad N_2/\Big[E\Big(\frac{\partial p_0}{\partial\zeta} + p_1\psi_y\Big)\Big], \quad -H_2/\Big(Ep_1 + \frac{1}{F}\Big)\Big\},$$

то величину вторых производных определяют члены, не зависящие от величины числа Рейнольдса. Аналогично, если на теле выполняются зависимости

$$\frac{\partial p_0}{\partial\eta} + p_1\psi_x = 0, \quad \frac{\partial p_0}{\partial\zeta} + p_1\psi_y = 0, \quad Ep_1 + \frac{1}{F} = 0,$$

то число Рейнольдса не оказывает влияния на вторые производные.

Утверждение 2. *Вблизи обтекаемой плоскости* $l = at + x + by + cz$

$$\lim_{R\to\infty} K = \infty, \quad \lim_{R\to\infty} T = \infty,$$

где K — кривизна линий тока, T — кручение линий тока, R — число Рейнольдса.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим влияние числа Рейнольдса на течение вблизи обтекаемого тела на точном решении системы уравнений Навье — Стокса [20]. Предположим, что ее решение $u = u(\psi(x,y,z,t))$, $v = v(\psi(x,y,z,t))$, $w = w(\psi(x,y,z,t))$, $p = p(\psi(x,y,z,t))$, тогда $\psi(x,y,z,t) = \text{const}$ — поверхность уровня для u, v, w, p. При таком предположении система (0.1) может быть записана в виде

$$\begin{aligned}
&Su'\psi_t + uu'\psi_x + vu'\psi_y + wu'\psi_z - \frac{1}{R}(u''m + u'\Delta) = 0,\\
&Sv'\psi_t + uv'\psi_x + vv'\psi_y + wv'\psi_z - \frac{1}{R}(v''m + v'\Delta) = 0,\\
&Sw'\psi_t + uw'\psi_x + vw'\psi_y + ww'\psi_z - \frac{1}{R}(w''m + w'\Delta) = \frac{1}{F},\\
&u'\psi_x + v'\psi_y + w'\psi_z = 0, \quad m = \psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2, \quad \Delta = \psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

В системе (3.2) штрих ($'$) обозначает дифференцирование по ψ, нижние индексы — дифференцирование функции ψ по соответствующим переменным.

Пусть $\psi_x \neq 0$. Положим, что $\psi_t/\psi_x = f_1(\psi)$, $\psi_y/\psi_x = f_2(\psi)$, $\psi_z/\psi_x = f_3(\psi)$, $(\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2)/\psi_x = f_4(\psi)$, где $f_i(\psi)$ — некоторые произвольные функции ($i = 1, 2, 3, 4$). Тогда $\psi_x = f_4/(1 + f_2^2 + f_3^2) = g(\psi)$. Из равенства смешанных производных получим, что $\psi_t = ag(\psi)$, $\psi_y = bg(\psi)$, $\psi_z = cg(\psi)$, $a = \mathrm{const}$, $b = \mathrm{const}$, $c = \mathrm{const}$ и, как следствие, $\psi = \psi(l)$, $l = x + at + by + cz$. Тогда имеем, что $u = u(l)$, $v = v(l)$, $w = w(l)$, $p = p(l)$ и система уравнений (0.1) сводится к следующей системе ОДУ:

$$\begin{gathered}(Sa + u + bv + cw)u_l + Ep_l - \frac{1}{R}qu_{ll} = 0, \quad (Sa + u + bv + cw)v_l + Ebp_l - \frac{1}{R}qv_{ll} = 0,\\ (Sa + u + bv + cw)w_l + Ecp_l - \frac{1}{R}qw_{ll} = \frac{1}{F}, \quad u_l + bv_l + cw_l = 0, \quad \text{где} \quad q = 1 + b^2 + c^2.\end{gathered} \tag{3.3}$$

Дифференциальные следствия последнего уравнения системы (3.3) приводят к соотношениям $u_{ll} + bv_{ll} + cw_{ll} = 0$, $u + bv + cw = A$, $A = \mathrm{const}$. Если второе уравнение системы (3.3) умножить на b, а третье уравнение системы — на c и сложить с первым уравнением системы, то получим $p_l = c/(FEq)$. Тогда первые три уравнения системы (3.3) будут иметь вид

$$\begin{gathered}\frac{q}{R}u_{ll} - (Sa + A)u_l - \frac{c}{Fq} = 0, \quad \frac{q}{R}v_{ll} - (Sa + A)v_l - \frac{cb}{Fq} = 0,\\ \frac{q}{R}w_{ll} - (Sa + A)w_l + \frac{1 + b^2}{Fq} = 0.\end{gathered} \tag{3.4}$$

Выпишем общее решение линейной системы с постоянными коэффициентами (3.4).

Если $A \neq (-Sa)$, то

$$\begin{gathered}u = \frac{U_0}{\alpha}\exp(\alpha l) - \frac{\beta}{\alpha}l + U_1, \quad \alpha = \frac{R(Sa + A)}{q}, \quad \beta = -\frac{cR}{Fq^2},\\ U_0 = \mathrm{const}, \quad U_1 = \mathrm{const};\end{gathered}$$

$$\begin{aligned} v &= \frac{V_0}{\alpha}\exp(\alpha l) - \frac{b\beta}{\alpha}l + V_1, \quad V_0 = \mathrm{const}, \quad V_1 = \mathrm{const};\\ w &= -\frac{U_0 + bV_0}{c\alpha}\exp(\alpha l) + \frac{\beta(1 + b^2)}{c\alpha}l + \frac{A - U_1 - bV_1}{c};\\ p &= \frac{c}{FEq}l + p_0, \quad p_0 = \mathrm{const}, \quad l = at + x + by + cz.\end{aligned} \tag{3.5}$$

На примере (3.5) будем изучать свойства течения вблизи поверхности $\xi = 0$, полагая, что $\xi = l$ — подвижная обтекаемая плоскость. На плоскости $l = 0$ зададим условия прилипания $u(0) = 0$, $v(0) = 0$, $w(0) = 0$. Тогда на поверхности $l = 0$ имеем $A = 0$, $U_1 = -U_0/\alpha$, $V_1 = -V_0/\alpha$, следовательно,

$$u_1 = U_0 - \frac{c}{qF(Sa + A)}, \quad v_1 = V_0 - \frac{bc}{qF(Sa + A)}, \quad w_1 = -\frac{U_0 + bV_0}{c} + \frac{1 + b^2}{qF(Sa + A)}, \quad p_1 = \frac{c}{qEF}.$$

Заметим, что первые производные по ξ не зависят от числа Рейнольдса и, как и в общем случае (см. следствие), вблизи обтекаемой поверхности течение повторяет форму поверхности в каждый момент времени: $u_1 + bv_1 + cw_1 = 0$, следовательно, $u(l) + bv(l) + cw(l) = o(l)$.

Выпишем также вторые производные на поверхности $\xi = l = 0$. Получим

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} = \alpha U_0, \quad \frac{d^2v}{d\xi^2} = \alpha V_0, \quad \frac{d^2w}{d\xi^2} = -\frac{(U_0 + bV_0)\alpha}{c}, \quad \frac{d^2p}{d\xi^2} = 0.$$

Здесь просматривается зависимость от числа Рейнольдса (см. α в (3.5)). Аналогично для третьих производных имеем

$$\frac{d^3u}{d\xi^3} = \alpha^2 U_0, \quad \frac{d^3v}{d\xi^3} = \alpha^2 V_0, \quad \frac{d^3w}{d\xi^3} = -\frac{(U_0 + bV_0)\alpha^2}{c}, \quad \frac{d^3p}{d\xi^3} = 0.$$

Подставляя полученные значения производных в формулы кривизны K и кручения T для линии $u = u(\xi)$, $v = v(\xi)$, $w = w(\xi)$, будем иметь

$$K = \frac{R(Sa + A)}{qT_1}\sqrt{T_1T_2 - \frac{qT_3}{R(Sa + A)}}, \quad T = \Big(\frac{R(Sa + A)}{q}\Big)^3 \frac{T_4}{T_1^3K^2} \ , \tag{3.6}$$

где

$$T_1 = \Big(U_0 - \frac{c}{qF(Sa + A)}\Big)^2 + \Big(V_0 - \frac{bc}{qF(Sa + A)}\Big)^2 + \Big(- \frac{U_0 + bV_0}{c} + \frac{1 + b^2}{qF(Sa + A)}\Big)^2,$$

$$T_2 = U_0^2 + V_0^2 + \Big[\frac{U_0 + bV_0}{c}\Big]^2,$$

$$T_3 = U_0\Big(U_0 - \frac{c}{qF(Sa + A)}\Big) + V_0\Big(V_0 - \frac{bc}{qF(Sa + A)}\Big) + \frac{U_0 + bV_0}{c}\Big(- \frac{U_0 + bV_0}{c} + \frac{1 + b^2}{qF(Sa + A)}\Big),$$

$$\begin{aligned} T_4 = {} & V_0\Big(U_0 - \frac{c}{qF(Sa + A)}\Big)\Big(\frac{U_0 + bV_0}{c}\Big) + U_0V_0\Big(- \frac{U_0 + bV_0}{c} + \frac{1 + b^2}{qF(Sa + A)}\Big) \\ & + U_0\Big(\frac{U_0 + bV_0}{c}\Big)\Big(V_0 - \frac{bc}{qF(Sa + A)}\Big) - U_0V_0\Big(- \frac{U_0 + bV_0}{c} + \frac{1 + b^2}{qF(Sa + A)}\Big) \\ & - V_0\Big(\frac{U_0 + bV_0}{c}\Big)\Big(U_0 - \frac{c}{qF(Sa + A)}\Big) - U_0\Big(\frac{U_0 + bV_0}{c}\Big)\Big(V_0 - \frac{bc}{qF(Sa + A)}\Big). \end{aligned}$$

Из зависимостей (3.6) имеем

$$\lim_{R\to\infty} K = \infty, \qquad \lim_{R\to\infty} T = \infty.$$

Утверждение доказано. □

4. Заключение

Как показано выше, при постановке и начальной, и краевой задачи приходится иметь дело с переопределенной системой дифференциальных уравнений в частных производных (см. уравнение неразрывности и уравнение (1.1) в новых независимых переменных или систему (2.6), (2.7)). Требование совместности таких систем приводит при заданном давлении к определенным требованиям на скорость движения среды (см. (2.8)). Если эти требования не выполняются, то каждое уравнение системы в области решения имеет свой конус нормалей и, как показывает расширенная система уравнений характеристик [21;22], свои производные высшего порядка, через которые выражается кривизна и кручение линии тока (см. (3.6)).

Хорошо известно в оптике, что если направление падающего луча совпадает с направлением оптической оси кристалла, то вместо точки на экране наблюдается светлое пятно. Этот эффект рассеяния луча (коническая рефракция) объясняется наличием двух разных уравнений в частных производных первого порядка. Их конусы нормалей имеют одну общую нормаль, но не совпадают. Аналогичная причина ведет к явлению рассеяния при нестационарном течении идеальной плазмы, когда вектор магнитной напряженности параллелен нормали характеристической поверхности и скорость звука равна скорости Альфена [19].

Сравним этот факт с тем, что получается при решении системы (2.6), (2.7), если не выполняются условия (2.8). Отмечаем сходство с математическим описанием конической рефракции. Здесь роль оптической оси кристалла играет линия $\varphi(\eta, \zeta) = 0$. Напрашивается аналогия в поведении потока, обтекающего тело (рассеяние, турбулентное перемешивание), с эффектом рассеяния в оптике.

В случае начальной задачи, описывающей движение вязкой жидкости в начальный момент времени, поток или движение может не соответствовать окружающему атмосферному давлению, и зависимость (1.1) не выполняется. Появляются зоны дополнительных возмущений, которые при своем распространении приводят к перемешиванию, рассеянию и т. п.

Таким образом, можно считать, что первопричина, порождающая разрушение ламинарного течения, кроется в отсутствии согласования между окружающим давлением и скоростью движения жидкости. Отсюда и дополнительные возмущения [13], и рассеяние [14], и бифуркация [10]. Как показано в работе на примере краевой задачи, могут существовать определенные условия для устранения “конфликта” (см. например, (2.8)).

Переход к турбулентному движению в сплошных средах происходит с ростом числа Рейнольдса. Известно также, что кривизна линий тока оказывает существенное влияние на турбулентность, в том числе на ее интенсификацию, и является важным аспектом, который требует тщательного рассмотрения при изучении турбулентности и развитии ее моделей [23; 24]. В этом контексте интересно, что для рассмотренной математической модели (0.1) из соотношений (3.1), (3.6) следует, что при $A \neq (-Sa)$ и увеличении числа Рейнольдса кривизна и кручение линий тока увеличиваются. В противном случае $(A = -Sa)$ увеличение числа Рейнольдса не оказывает заметного влияния.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лойцянский Л.Г.** Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
2. **Пухначев В.В.** Симметрии в уравнениях Навье — Стокса // Успехи механики. 2006. № 6. С. 3–76.
3. **Brandolese L.** Fine properties of self-similar solutions of the Navier–Stokes equation // Arch. Ration. Mech. Anal. 2009. Vol. 192, no. 3. P. 375–401.
4. **Galdi G.P.** On the motion of a rigid body in a viscous liquid: a mathematical analysis with applications // Handbook of Mathematical Fluid Dynamics. Amsterdam, 2002. Vol. I. P. 653–791.
5. **Schonbek M.E.** Asymptotic behavior of solutions to free-dimensional Navier–Stokes equations // Indiana Univ. Math. J. 1992. Vol. 41, no. 3. P. 809–823.
6. **Miyakawa T.** On space-time decay properties of nonstationary incompressible Navier–Stokes flows in $\mathbf{R}^n$ // Funkcialaj Ekvacioj. 2000. Vol. 43, no. 3. P. 541–557.
7. **Fefferman C.** Existence and smoothness of the Navier–Stokes equation // The millennium prize problems / Clay Math. Inst. Cambridge, 2006. P. 57–67.
8. **Ладыженская О.А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.
9. **Galaktionov V.A.** On a spectrum of blow-up patterns for a higher-order semilinear parabolic equations // R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 2001. Vol. 457, no. 2011. P. 1623–1643.
10. **Marsden J., McCracken J.** The Hopf bifurcation and its applications. New York: Springer-Verlag, 1976. 408 p. (Appl. Math. Sci.; vol. 19.)
11. **Кочетков Ю.Н.** Турбулентность на шероховатой стенке и новые фундаментальные уравнения пограничного слоя // Двигатель. 2015. № 3 (99). С. 38–41.
12. **Слезкин Н.А.** Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М: ГИТТЛ, 1955. 519 с.
13. **Chorin A.J.** Lectures on turbulence theory. Boston: Publish or Perish, 1976. 159 p. (Math. Lecture Ser. no. 5.)
14. **Колмогоров А.Н.** Рассеяние энергии при локальной изотропной турбулентности // Докл. АН. Vol. 32, no. 1. С. 19–21.
15. **Giga Y.** Weak and strong solotions of the Navier–Stokes initial value problem // Publ. Res. Inst. Math. Sci. 1983. Vol. 19, no. 3. C. 887–910.
16. **Galdi G.P.** An introduction to the mathematical theory of the Navier–Stokes equations. Vol. I: Linear Steady Problems; Vol. II: Nonlinear Steady Problems. New York: Springer Verlag, 1994. 450 p.; 323 p. (Springer Tracts in Nat. Ph.; vol. 38; vol. 39.)

17. **Ермолин Е.В., Рубина Л.И.,Сидоров А.Ф.** К задаче о двух поршнях // Прикл. математика и механика. 1968. Т. 32, вып. 5. С. 946–954.
18. **Курант Р.** Уравнения с частными производными. М. : Мир, 1964. 830 с.
19. **Рубина Л.И.** О распространении слабых разрывов для квазилинейных систем // Прикл. математика и механика. 1972. Т. 36, №3. С. 435–443.
20. **Рубина Л.И., Ульянов О.Н.** Об одном методе решения систем нелинейных уравнений в частных производных // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, №1. С. 238–246.
21. **Рубина Л.И., Ульянов О.Н.** О решении уравнения потенциала // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 1. С. 130–145.
22. **Рубина Л.И., Ульянов О.Н.** Решение нелинейных уравнений в частных производных геометрическим методом // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 209–225.
23. **Bradshaw P.** Effects of streamwise curvature on turbulent flow // AGARDograph No. 169. London, 1973. 134 p.
24. **Pathak M., Dewan A., Dass A.K.** // Effect of streamline curvature on flow field of a turbulent plane jet in cross-flow // Mechanics Research Communications. 2007. Vol. 34. P. 241–248.

Рубина Людмила Ильинична
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: rli@imm.uran.ru

Ульянов Олег Николаевич
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
ученый секретарь института
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
доцент
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: secretary@imm.uran.ru