ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 1 2016

УДК 512.572

КОРАЗМЕРНОСТИ МНОГООБРАЗИЙ АЛГЕБР ПУАССОНА С ЛИЕВО НИЛЬПОТЕНТНЫМИ КОММУТАНТАМИ

С. М. Рацеев, О. И. Череватенко

В работе исследуются многообразия алгебр Пуассона, определяемые тождествами $\{x_1, x_2\}\cdot\{x_3, x_4\} = 0$, $\{\{x_1, x_2\}, \ldots, \{x_{2s+1}, x_{2s+2}\}\} = 0$, $s \geq 1$. Для каждого такого многообразия найдена алгебра-носитель, построен базис n-й собственной полилинейной части, получены точные формулы для экспоненциальных производящих функций для последовательности коразмерностей и последовательности собственных коразмерностей, получены точные формулы коразмерностей и собственных коразмерностей.

Ключевые слова: алгебра Пуассона, многообразие алгебр, рост многообразия.

S. M. Ratseev, O. I. Cherevatenko. Codimensions of varieties of Poisson algebras with Lie nilpotent commutants.

We study varieties of Poisson algebras defined by the identities $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$ and $\{\{x_1, x_2\}, \ldots, \{x_{2s+1}, x_{2s+2}\}\} = 0$, $s \geq 1$. For each of the varieties we find a carrier algebra and build a basis of the nth proper polylinear space. We derive exact formulas for exponential generating functions for sequences of codimensions and proper codimensions as well as exact formulas for codimensions and proper codimensions.

Keywords: Poisson algebra, variety of algebras, growth of a variety.

Векторное пространство A над полем K с двумя K-билинейными операциями умножения “$\cdot$” и “$\{,\}$” называется *алгеброй Пуассона*, если относительно операции “$\cdot$” пространство A является коммутативной ассоциативной алгеброй с единицей, относительно операции “$\{,\}$” — алгеброй Ли и данные операции связаны правилом Лейбница $\{a\cdot b, c\} = a\cdot\{b, c\}+\{a, c\}\cdot b, \quad a, b, c \in A$. Алгебры Пуассона возникают в различных разделах алгебры, дифференциальной геометрии, топологии, современной теоретической физики и т. д.

Договоримся опускать скобки “$\{,\}$” при их левонормированной расстановке: $\{\{a, b\}, c\} = \{a, b, c\}$.

Пусть $F(X)$ — свободная алгебра Пуассона над счетным множеством свободных образующих $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, P_n — пространство в $F(X)$, состоящее из всех полилинейных элементов степени n от переменных $x_1, \ldots, x_n$, Γ_n — подпространство в P_n, являющееся линейной оболочкой элементов вида

$$\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\} \cdot \ldots \cdot \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_t}\}, \quad s \geq 2, \ldots,\ t \geq 2.$$

Пусть $\mathbf{V}$ — некоторое многообразие алгебр Пуассона, $Id(\mathbf{V})$ — идеал тождеств многообразия $\mathbf{V}$. Обозначим

$$P_n(\mathbf{V}) = P_n/(P_n \cap Id(\mathbf{V})), \quad \Gamma_n(\mathbf{V}) = \Gamma_n/(\Gamma_n \cap Id(\mathbf{V})),$$

$$c_n(\mathbf{V}) = \dim P_n(\mathbf{V}), \quad \gamma_n(\mathbf{V}) = \dim \Gamma_n(\mathbf{V}).$$

Величины $c_n(\mathbf{V})$ и $\gamma_n(\mathbf{V})$ называются *n-й коразмерностью* и *n-й собственной коразмерностью многообразия* $\mathbf{V}$ соответственно.

В следующем предложении приводится конструкция алгебр Пуассона на основе ассоциативных алгебр. Доказательство данного несложного предложения оставляем читателю.

Предложение 1. *Пусть R — некоторая ассоциативная алгебра с операцией умножения “$\wedge$” над произвольным полем K. Рассмотрим векторное пространство $A = R\oplus K$, в котором определим операции “$\cdot$” и “$\{,\}$” следующим образом:*

$$(a, \alpha) \cdot (b, \beta) = (\beta a + \alpha b, \alpha\beta),$$

$$\{(a,\alpha),(b,\beta)\} = (a\wedge b - b\wedge a, 0),$$

где $a,b \in R$, $\alpha,\beta \in K$. Тогда полученная алгебра $(A,+,\cdot,\{,\},K)$ будет являться алгеброй Пуассона, в которой выполнено тождество $\{x_1,x_2\}\cdot\{x_3,x_4\}=0$.

Определим многообразие алгебр Пуассона $\mathbf{V}_s$ следующими полилинейными тождествами:

$$\{x_1,x_2\}\cdot\{x_3,x_4\}=0, \quad \{\{x_1,x_2\},\{x_3,x_4\},\dots,\{x_{2s+1},x_{2s+2}\}\}=0.$$

В работе [1] показано, что многообразие $\mathbf{V}_1$ имеет почти полиномиальный рост.

Пусть $UT_s = UT_s(K)$ — алгебра верхнетреугольных матриц порядка s над полем K, $U_s = UT_s \oplus K$ — алгебра Пуассона, построенная с помощью предложения 1. Нетрудно видеть, что $U_s \in \mathbf{V}_{s-1}$, $s\geq 2$. Далее будет показано, что в случае основного поля нулевой характеристики алгебра U_s порождает многообразие $\mathbf{V}_{s-1}$, $s\geq 2$.

Для произвольного многообразия $\mathbf{V}$ определим экспоненциальные производящие функции

$$\mathcal{C}(\mathbf{V},z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n(\mathbf{V})}{n!}z^n, \quad \mathcal{C}^p(\mathbf{V},z)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\gamma_n(\mathbf{V})}{n!}z^n, \quad z\in\mathbb{C}.$$

Данные функции оказываются полезными для вычисления асимптотики роста многообразий. Применение функций сложности для многообразий алгебр Ли оказалось плодотворным и привело к классификации типов роста [2; 3]. Из предложения 4 работы [4] следует такое утверждение.

Предложение 2. *Пусть для многообразия алгебр Пуассона $\mathbf{V}$ над произвольным $\mathcal{C}^p(\mathbf{V},z)$ является целой функцией комплексного аргумента. Тогда $\mathcal{C}(\mathbf{V},z)$ также является целой функцией, причем выполнено равенство $\mathcal{C}(\mathbf{V},z)=exp(z)\cdot(\mathcal{C}^p(\mathbf{V},z)+1)$.*

Пусть $f(n)$ и $g(n)$ — две функции натурального аргумента. Будем обозначать $f(n)\approx g(n)$, если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=1$.

Теорема 1. (i) *В случае произвольного поля K следующие полилинейные элементы от переменных $x_1,\dots, x_n$ образуют базис пространства $\Gamma_n(U_s)$, $s\geq 2$:*

$$\{\{x_{11},\dots,x_{1a_1}\},\dots,\{x_{r1},\dots,x_{ra_r}\}\}, \tag{1}$$

$$1\leq r\leq s-1, \quad a_i\geq 2, \quad i=1,\dots,r, \quad x_{12}<x_{j2}, \quad j=2,\dots,r, \tag{2}$$

$\{x_{ij}\}=\{x_1,\dots,x_n\}$ как множества и переменные в каждой скобке $\{x_{j1},\dots,x_{ja_j}\}$ упорядочены так: $j1>j2<\dots<ja_j$.

(ii) *Если характеристика поля равна нулю, то тождества*

$$\{x_1,x_2\}\cdot\{x_3,x_4\}=0, \quad \{\{x_1,x_2\},\dots,\{x_{2s-1},x_{2s}\}\}=0$$

порождают идеал тождеств алгебры U_s (иными словами, алгебра U_s является носителем многообразия $\mathbf{V}_{s-1}$).

Доказательство. Понятно, что $\Gamma_n(U_s)$ является линейной оболочкой элементов вида (1) с условиями (2).

Каждому элементу ω вида (1) сопоставим такой упорядоченный набор чисел (длины скобок): $I(\omega)=(a_1,\dots,a_r)$. На множестве элементов данного вида определим строгую упорядоченность. Пусть ω_1, ω_2 — элементы вида (1). Определим $\omega_1\prec\omega_2$, если набор $I(\omega_1)$ лексикографически слева направо меньше набора $I(\omega_2)$.

Предположим, что для некоторого n данные элементы линейно зависимы в $\Gamma_n(U_s)$. В полученной нетривиальной линейной комбинации элементов вида (1) зафиксируем такое слагаемое, которое имеет ненулевой коэффициент, минимальное значение r и является минимальным элементом относительно порядка $\prec$ среди всех элементов с ненулевыми коэффициентами и минимальными значениями r. Пусть это слагаемое имеет вид

$$\alpha\{\{x_{11},\dots,x_{1a_1}\},\dots,\{x_{r1},\dots,x_{ra_r}\}\},\quad 0\neq\alpha\in K.$$

Во всей линейной комбинации сделаем такую подстановку:

$$x_{11}\to(e_{12},0),\quad x_{12}\to(e_{22},0),\quad x_{13}\to(e_{22},0),\quad \dots,\quad x_{1a_1}\to(e_{22},0),$$

$$x_{21}\to(e_{23},0),\quad x_{22}\to(e_{33},0),\quad x_{23}\to(e_{33},0),\quad \dots,\quad x_{2a_2}\to(e_{33},0),$$

$$\dots$$

$$x_{r1}\to(e_{r,r+1},0),\quad x_{r2}\to(e_{r+1,r+1},0),\quad x_{r3}\to(e_{r+1,r+1},0),\quad \dots,\quad x_{ra_r}\to(e_{r+1,r+1},0),$$

где e_{ij} — матричные единички. Тогда все слагаемые, кроме рассматриваемого, будут равны нулю, а данное слагаемое будет равно $\alpha(e_{1,r+1},0)$. Понятно, что равенство $\alpha(e_{1,r+1},0)=(0,0)$ выполнено лишь в случае $\alpha=0$. Противоречие.

Осталось заметить, что в случае основного поля нулевой характеристики идеал тождеств $\mathrm{Id}(\mathbf{V})$ произвольного многообразия алгебр Пуассона $\mathbf{V}$ порождается последовательностью $\Gamma_n\cap\mathrm{Id}(\mathbf{V})$, $n\geq 1$ (см. предложение 6 работы [4]). $\square$

Теорема 2. *Для многообразия $\mathbf{V}_s$ над произвольным полем верны следующие утверждения:*

1) $\mathbf{V}_s$ *имеет экспоненциальную производящую функцию*

$$\mathcal{C}^p(\mathbf{V}_s,z)=\sum_{r=1}^{s}\frac{1}{r}\Big(1+(z-1)\exp(z)\Big)^r;$$

2) *для любого $n\geq 2$ коразмерности и собственные коразмерности вычисляются по формулам*

$$\gamma_n(\mathbf{V}_s)=\sum_{r=1}^{s}\frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r}k^n\sum_{i=0}^{k}C_r^kC_k^i(-1)^{k-i}k^{-i}\frac{n!}{(n-i)!}\approx n^ss^{n-s-1},$$

$$c_n(\mathbf{V}_s)=1+\sum_{r=1}^{s}\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r+1}k^n\sum_{i=0}^{k-1}C_r^{k-1}C_{k-1}^i(-1)^{k-1-i}k^{-i}\frac{n!}{(n-i)!}\approx s^{-1}n^s(s+1)^{n-s},$$

где C_n^k — число сочетаний из n по k.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формулы для $\mathcal{C}^p(\mathbf{V}_s,z)$ и $\gamma_n(\mathbf{V}_s)$ следуют из леммы 3.4 работы [2] и теоремы 2 работы [5].

Покажем справедливость формулы для коразмерностей $c_n(\mathbf{V}_s)$. Из предложения 2 следует, что

$$\mathcal{C}(\mathbf{V}_s,z)=\exp(z)+\exp(z)\left(\sum_{r=1}^{s}\frac{1}{r}\Big(1+(z-1)\exp(z)\Big)^r\right).$$

Запишем данную функцию в виде

$$\mathcal{C}(\mathbf{V}_s,z)=\exp(z)+\sum_{r=1}^{s}\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r+1}C_r^{k-1}(z-1)^{k-1}\exp(kz).\tag{3}$$

При этом

$$(z-1)^{k-1}exp(kz)=\sum_{i=0}^{k-1}C_{k-1}^iz^i(-1)^{k-1-i}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{k^m}{m!}z^m$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{m=0}^{\infty} C_{k-1}^{i}(-1)^{k-1-i} z^{m+i}\frac{k^m}{m!} = /m+i=n/$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{n=i}^{\infty} C_{k-1}^{i}(-1)^{k-1-i}\frac{k^{n-i}}{(n-i)!} z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^{i}(-1)^{k-1-i}\frac{1}{k^i}\frac{n!}{(n-i)!}\Big)\frac{k^n}{n!} z^n.$$

В последнем равенстве использовался тот факт, что $\dfrac{n!}{(n-i)!} = 0$ при $n-i<0$. Подставим последнюю двойную сумму в (3):

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\Big(1+\sum_{r=1}^{s}\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r+1}k^n\sum_{i=0}^{k-1}C_r^{k-1}C_{k-1}^{i}(-1)^{k-1-i}\frac{1}{k^i}\frac{n!}{(n-i)!}\Big).$$

То, что находится внутри скобок, и есть $c_n(\mathbf{V}_s)$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Рацеев С.М.** Эквивалентные условия полиномиальности роста многообразий алгебр Пуассона // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2012. Т. 67, № 5. С. 8–13.
2. **Петроградский В.М.** О типах сверхэкспоненциального роста тождеств в PI-алгебрах Ли// Фунд. прикл. математика. 1995. Т. 1, № 4. С. 989–1007.
3. **Петроградский В.М.** Рост полинильпотентных многообразий алгебр Ли и быстро растущие целые функции// Мат. сб. 1997. Т. 188, № 6. С. 119–138.
4. **Рацеев С.М.** Алгебры Пуассона полиномиального роста // Сиб. матем. журн. 2013. Т. 54, № 3. С. 700–711.
5. **Рацеев С.М.** Взаимосвязь алгебр Пуассона и алгебр Ли на языке тождеств // Мат. заметки. 2014. Т. 96, № 4. С. 567–577.

Рацеев Сергей Михайлович
канд. физ.-мат. наук, доцент
Ульяновский государственный университет
e-mail: RatseevSM@mail.ru

Поступила 17.01.2015

Череватенко Ольга Ивановна
канд. физ.-мат. наук, и.о. зав. кафедрой
Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова
e-mail: chai@pisem.net