ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 1 2016

УДК 519.17

НЕБОЛЬШИЕ $AT4$-ГРАФЫ И ОТВЕЧАЮЩИЕ ИМ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫЕ ПОДГРАФЫ[1]

А. А. Махнев, Д. В. Падучих

Пусть $\mathcal{M}$ — класс сильно регулярных графов, для которых μ является неглавным собственным значением. Заметим, что окрестность любой вершины $AT4$-графа лежит в $\mathcal{M}$. Ранее было получено описание параметров графов из $\mathcal{M}$. В работе найдены массивы пересечений небольших $AT4$-графов и параметры отвечающих им сильно регулярных графов.

Ключевые слова: сильно регулярный граф, $AT4$-граф, локально $\mathcal{M}$-графы.

A. A. Makhnev, D. V. Paduchikh. Small $AT4$-graphs and strongly regular subgraphs corresponding to them.

Let $\mathcal{M}$ be the class of strongly regular graphs for which μ is a nonprincipal eigenvalue. Note that the neighborhood of any vertex of an $AT4$-graph lies in $\mathcal{M}$. Parameters of graphs from $\mathcal{M}$ were described earlier. We find intersection arrays of small $AT4$-graphs and of strongly regular graphs corresponding to them.

Keywords: strongly regular graph, $AT4$-graph, locally $\mathcal{M}$-graphs.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е., подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф, a, b — две вершины из Γ, число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (через $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ. Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется *μ-подграфом* (*λ-подграфом*).

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным степени* k, если степень любой вершины из Γ равна k. Граф Γ назовем *реберно регулярным с параметрами* (v, k, λ), если он содержит v вершин, регулярен степени k и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ — *вполне регулярный граф с параметрами* (v, k, λ, μ), если он реберно регулярен с соответствующими параметрами и $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин для любых двух вершин a, b, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.*

Система инцидентности с множеством точек P и множеством прямых $\mathcal{L}$ называется *α-частичной геометрией порядка* (s, t), если каждая прямая содержит $s + 1$ точку, каждая точка лежит на $t + 1$ прямой, любые две точки лежат не более чем на одной прямой и для любого антифлага $(a, L) \in (P, \mathcal{L})$ найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L (обозначение: $pG_\alpha(s, t)$ или pG_α). В случае $\alpha = 1$ геометрия называется *обобщенным четырехугольником* и обозначается как $GQ(s, t)$. Точечный граф геометрии определяется на множестве точек P и две точки смежны, если они лежат на прямой. Точечный граф геометрии $pG_\alpha(s, t)$ сильно регулярен с $v = (s + 1)(1 + st/\alpha)$, $k = s(t + 1)$, $\lambda = s - 1 + t(\alpha - 1)$, $\mu = \alpha(t + 1)$. Сильно регулярный граф с такими параметрами для некоторых натуральных чисел α, s, t называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_\alpha(s, t)$.

[1]Работа выполнена при поддержке РНФ, проект 14-11-00061 (теоремы 2 и 3) и соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006 (теорема 1).

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u,w)$ и $c_i(u,w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, ..., d$. Далее, через $p^l_{ij}(x,y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x,y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются числами пересечения графа Γ (см. [1]).

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра $d \geqslant 3$ и $\theta_0 > \theta_1 > \ldots > \theta_d$ — собственные значения Γ. По [2] выполняется фундаментальная граница

$$\Big(\theta_1 + \frac{k}{a_1+1}\Big)\Big(\theta_d + \frac{k}{a_1+1}\Big) \geqslant -\frac{ka_1b_1}{(a_1+1)^2}.$$

Положим

$$b^+ = -1 - \frac{b_1}{1+\theta_d},\ b^- = -1 - \frac{b_1}{1+\theta_1}.$$

Недвудольный граф, для которого достигается равенство в фундаментальной границе, называется плотным. Окрестность любой вершины в плотном графе сильно регулярна с собственными значениями a_1, b^+, b^-. Фундаментальная граница может быть записана в виде $k(a_1 + b^+b^-) \leqslant (a_1 - b^+)(a_1 - b^-)$. Хорошо известно (см., например, [2, теорема 3.2]), что плотный граф диаметра 3 является графом Тэйлора. В этом случае окрестность любой вершины является сильно регулярным графом с $k' = 2\mu'$.

Пусть Γ — антиподальный граф диаметра 4. Тогда согласно по [1, предложение 4.2.2] Γ имеет массив пересечений $\{k, k-a_1-1, (r-1)c_2, 1; 1, c_2, k-a_1-1, k\}$. По [2, теорема 5.2] Γ является плотным тогда и только тогда, когда $q^4_{11} = 0$. Если Γ — плотный граф с окрестностью вершины, имеющей неглавные собственные значения $p = b^+, -q = b^-$, то все параметры Γ выражаются через p, q, r. В этом случае назовем Γ антиподальным плотным графом диаметра 4 с параметрами p, q, r ($AT4(p,q,r)$-графом). В $AT4(p,q,r)$-графе окрестности вершин сильно регулярны с неглавным собственным значением $\mu = p$. Скажем, что в графе Γ параметр γ существует, если $|[u] \cap [w] \cap [z]| = \gamma$ для любых вершин u, w, z с условиями $d(u,w) = 1$, $d(u,z) = d(w,z) = 2$. В $AT4(p,q,r)$-графе параметр γ существует и $\gamma = c_2(a_1 - p)/a_2$.

Через $\mathcal{M}$ обозначим класс сильно регулярных графов с параметрами (v, k, λ, μ), для которых μ является неглавным собственным значением. В [3] представлено описание параметров графов из $\mathcal{M}$ и получены некоторые ограничения на параметры $AT4(p,q,r)$-графов.

Предложение 1 (см. [3, пп. (1), (2) предложения, п. (3) леммы 2.1, п. (1) теоремы 2]). *Если $\Delta \in \mathcal{M}$, то выполняются следующие утверждения*:

(1) Δ *имеет параметры* $(m^2\mu + m\mu + m^2, (m+1)\mu, 2\mu - m, \mu)$ *и собственные значения* $\mu, -m$;

(2) $2\mu \geqslant m$, *причем* $2\mu = m$ *тогда и только тогда, когда* $\lambda = 0$;

(3) $\mu + m$ *делит* $(\mu-1, m+1)(\mu+1, m-1)(\mu, m)^2$;

(4) *если* $\mu = m\alpha$, *то* Δ *— псевдогеометрический граф для* $pG_\alpha(m\alpha + \alpha, m-1)$.

Предложение 2 (см. [3, п. (3) теоремы 2]). *Пусть Γ является $AT4(p,q,r)$-графом, u — вершина графа Γ и $\Delta = [u]$. Если $q = p+2$, то выполняются следующие утверждения*:

(1) *число* $2p(p+1)(p+2)/r$ *четно,* $r < p+2$, r *делит* $2(p+1)$ *и* Γ *— граф с массивом пересечений* $\{(p+1)(p+2)^2, (p+3)(p+1)^2, (r-1)2(p+1)(p+2)/r, 1; 1, 2(p+1)(p+2)/r, (p+3)(p+1)^2, (p+1)(p+2)^2\}$;

(2) *антиподальное частное* $\bar\Gamma$ *является графом с параметрами* $((p+1)^2(p+4)^2/2, (p+2)(p^2+4p+2), p(p+3), 2(p+1)(p+2))$ *и собственными значениями* $p, -(p^2+4p+4)$;

(3) *вторая окрестность вершины в графе* $\bar\Gamma$ *— сильно регулярный граф с параметрами* $((p+1)(p+3)(p^2+4p+2), p(p+2)^2, p^2+p-2, 2p(p+1))$ *и собственными значениями* $p, -(p^2+$

$2p+2$), имеющий дистанционно регулярное r-накрытие с массивом пересечений $\{p(p+2)^2,(p+1)^3,2(r-1)p(p+1)/r,1;1,2p(p+1)/r,(p+1)^3,p(p+2)^2\}$.

В данной работе найдены массивы пересечений небольших $AT4(p,q,r)$-графов и параметры отвечающих им сильно регулярных графов.

Теорема 1. *Пусть Δ является сильно регулярным графом с параметрами $(m^2\mu+m\mu+m^2,(m+1)\mu,2\mu-m,\mu)$ и собственными значениями $\mu,-m$. Если $m^2\mu+m\mu+m^2\leqslant 1000$, то выполняется одно из утверждений:*

(1) *$m=1$ и Δ является $(2\mu+1)$-кликой;*

(2) *$m=2$, Δ — граф Петерсена с параметрами $(10,3,0,1)$, псевдогеометрический граф для $GQ(3,1)$ (граф Шрикханде или (4×4)-решетка с параметрами $(16,6,2,2)$) или псевдогеометрический граф для $pG_2(6,1)$ (граф с параметрами $(28,12,6,4)$);*

(3) *$m=3$, Δ — граф с параметрами $(69,20,7,5)$ или псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(4\alpha,2)$, $\alpha=1,2,3,5,7,11,23$;*

(4) *$m=4$ и Δ — граф с параметрами $(56,10,0,2)$, $(116,25,6,5)$, $(236,55,18,11)$, $(536,130,48,26)$ или псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(5\alpha,3)$, $\alpha=1,2,3,4,5,9$;*

(5) *$m=5$, Δ — граф с параметрами $(115,18,1,3)$, $(235,42,9,7)$, $(595,114,33,19)$ или псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(6\alpha,4)$, $\alpha=1,2,3,4,5$;*

(6) *$m=6$, Δ — граф с параметрами $(204,28,2,4)$, $(372,56,10,8)$, $(414,63,12,9)$, $(666,105,24,15)$ или псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(7\alpha,5)$, $\alpha=1,2$;*

(7) *$m=7$ и Δ — граф с параметрами $(329,40,3,5)$, $(553,72,11,9)$ или псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(8\alpha,6)$, $\alpha=1,2$;*

(8) *$m=8$, Δ — граф с параметрами $(352,36,0,4)$, $(496,54,4,6)$, $(784,90,12,10)$, $(1000,117,18,13)$ или псевдогеометрический граф для $GQ(9,7)$;*

(9) *$m=9$, Δ — граф с параметрами $(621,60,3,6)$, $(711,70,5,7)$ или псевдогеометрический граф для $GQ(10,8)$;*

(10) *$m=10$, Δ — граф с параметрами $(650,55,0,5)$, $(980,88,6,8)$.*

Теорема 2. *Пусть Γ является $AT4(p,q,r)$-графом степени, не большей 1000, $\bar\Gamma$ — антиподальное частное графа Γ, u — вершина графа Γ и $\Delta=[u]$. Тогда либо Δ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha((q+1)\alpha,q-1)$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *Γ — граф Джонсона $J(8,4)$ с $(p,q,r)=(2,2,2)$, половинный 8-куб с $(p,q,r)=(4,2,2)$, $3O_6^-(3)$-граф с $(p,q,r)=(3,3,3)$, первый граф Мейкснера с $(p,q,r)=(8,4,2)$, второй граф Мейкснера с $(p,q,r)=(8,4,4)$, $3O_7(3)$-граф с $(p,q,r)=(9,3,3)$ или второй граф Сойчера с $(p,q,r)=(20,4,3)$;*

(2) *Γ — граф с $(p,q,r)=(3\alpha,3,2)$, $\alpha=3,7$, массивом пересечений $\{117,80,18,1;1,18,80,117\}$ и $\gamma=6$ или $\{261,176,36,1;1,36,176,261\}$ и $\gamma=12$, $\bar\Gamma$ имеет параметры $(378,117,36,36)$ или $(900,261,84,72)$;*

(3) *Γ — граф с $(p,q,r)=(4,4,2)$, массивом пересечений $\{96,75,16,1;1,16,75,96\}$ и $\gamma=4$ или с $(p,q,r)=(8,4,3)$, массивом пересечений $\{176,135,32,1;1,16,135,176\}$ и $\gamma=4$, или с $(p,q,r)=(16,4,2)$, массивом пересечений $\{336,255,40,1;1,40,255,336\}$ и $\gamma=10$, $\bar\Gamma$ имеет параметры $(322,96,20,32)$, $(672,176,40,48)$ или $(2479,336,100,96)$;*

(4) *Γ — граф с $(p,q,r)=(10,5,3)$, массивом пересечений $\{325,264,50,1;1,25,264,325\}$ и $\gamma=5$ или с $(p,q,r)=(15,5,2)$, массивом пересечений $\{475,384,50,1;1,50,384,475\}$ и $\gamma=10$, или с $(p,q,r)=(25,5,3)$, массивом пересечений $\{775,624,100,1;1,50,624,775\}$ и $\gamma=10$, $\bar\Gamma$ имеет параметры $(1470,325,60,75)$, $(2300,475,90,100)$ или $(4000,775,150,150)$;*

(5) *Γ — граф с $(p,q,r)=(6,6,r)$, $r=2,3$, массивом пересечений $\{288,245,(r-1)72/r,1;1,72/r,245,288\}$ и $\gamma=6$ или с $(p,q,r)=(12,6,r)$, $r=2,3$, массивом пересечений $\{540,455,(r-1)108/r,1;1,108/r,455,540\}$ и $\gamma=9$, $\bar\Gamma$ имеет параметры $(1269,288,42,72)$ или $(2816,540,84,108)$;*

(6) Γ — *граф с* $(p,q,r)=(8,8,r)$, $r=2,4$, *массивом пересечений* $\{640,567,(r-1)128/r,1;1,128/r,567,640\}$ *и* $\gamma=8$ *или граф с* $(p,q,r)=(9,9,3)$, *массивом пересечений* $\{891,800,108,1;1,54,800,891\}$ *и* $\gamma=6$, $\bar\Gamma$ *имеет параметры* $(3476,640,72,128)$ *или* $(5292,891,90,162)$,

либо Δ *не является псевдогеометрическим графом и выполняется одно из следующих утверждений*:

(7) Δ — *граф Петерсена или граф Гевиртца*, Γ — *граф Конвея — Смита с* $(p,q,r)=(1,2,3)$ *или первый граф Сойчера с* $(p,q,r)=(2,4,3)$;

(8) Δ — *граф с параметрами* $(115,18,1,3)$, Γ — *граф с* $(p,q,r)=(3,5,4)$, *массивом пересечений* $\{115,96,30,1;1,10,96,115\}$ *и* $\gamma=2$, $\bar\Gamma$ *имеет параметры* $(392,115,18,40)$;

(9) Δ — *граф с параметрами* $(204,28,2,4)$, Γ — *граф с* $(p,q,r)=(4,6,5)$, *массивом пересечений* $\{204,175,48,1;1,12,175,204\}$ *и* $\gamma=2$ *или* Δ — *граф с параметрами* $(414,63,12,9)$, Γ — *граф с* $(p,q)=(9,6)$, $r=3,5$, *массивом пересечений* $\{414,350,(r-1)90/r,1;1,90/r,350,414\}$ *и* $\gamma=5$, $\bar\Gamma$ *имеет параметры* $(800,204,28,60)$ *или* $(2025,414,63,90)$;

(10) Δ — *граф с параметрами* $(329,40,3,5)$, Γ — *граф с* $(p,q)=(5,7)$, $r=3,6$, *массивом пересечений* $\{329,288,(r-1)84/r,1;1,84/r,288,329\}$ *и* $\gamma=4$ *или* Δ — *граф с параметрами* $(496,54,4,6)$, Γ — *граф с* $(p,q,r)=(6,8,7)$, *массивом пересечений* $\{496,441,96,1;1,16,441,496\}$ *и* $\gamma=2$, $\bar\Gamma$ *имеет параметры* $(1458,329,40,84)$ *или* $(2450,496,54,112)$;

(11) Δ — *граф с параметрами* $(711,70,5,7)$, Γ — *граф с* $(p,q)=(7,9)$, $r=4,8$, *массивом пересечений* $\{711,640,(r-1)144/r,1;1,144/r,640,711\}$ *и* $\gamma=4$ *или* Δ — *граф с параметрами* $(980,88,6,8)$, Γ — *граф с* $(p,q)=(8,10)$, $r=3,6,9$, *массивом пересечений* $\{980,891,(r-1)180/r,1;1,180/r,891,980\}$ *и* $\gamma=6$, $\bar\Gamma$ *имеет параметры* $(3872,711,70,144)$ *или* $(5832,980,88,180)$.

Имеется гипотетическая серия $AT4(q,q,r)$-графов, которые являются локально псевдо $GQ(q+1,q-1)$-графами. В случаях $q=2,3$ имеем граф Джонсона $J(8,4)$ с $(p,q,r)=(2,2,2)$ и $3O_6^-(3)$-граф с $(p,q,r)=(3,3,3)$, которые являются локально $GQ(q+1,q-1)$-графами. По [4] $AT4(q,q,q)$-графы не существуют для $q>3$. В [5] доказано, что $AT4(4,4,2)$-граф не является локально $GQ(5,3)$-графом.

Теорема 3. *Пусть* Γ *является* $AT4(p,p+2,r)$*-графом степени, не большей* 1000. *Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) Γ — *первый граф Сойчера с* $(p,p+2,r)=(2,4,3)$ *и массивом пересечений* $\{56,45,24,1;1,12,45,56\}$, $\bar\Gamma$ *имеет параметры* $(162,56,10,24)$ *и неглавные собственные значения* $2,-16$, *первая и вторая окрестности вершины в* $\bar\Gamma$ *сильно регулярны с параметрами* $(56,10,0,2)$ *и* $(105,32,4,12)$, *вторая окрестность вершины в* Γ *является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений* $\{32,27,8,1;1,4,27,32\}$;

(2) Γ — *граф с* $(p,q,r)=(3,5,4)$ *и массивом пересечений* $\{115,96,30,1;1,10,96,115\}$, $\bar\Gamma$ *имеет параметры* $(392,115,18,40)$ *и неглавные собственные значения* $3,-25$, *первая и вторая окрестности вершины в* $\bar\Gamma$ *сильно регулярны с параметрами* $(115,18,1,3)$ *и* $(276,75,10,24)$, *вторая окрестность вершины в* Γ *является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений* $\{75,64,18,1;1,6,64,75\}$;

(3) Γ — *граф с* $(p,q,r)=(4,6,5)$ *и массивом пересечений* $\{204,175,48,1;1,12,175,204\}$, $\bar\Gamma$ *имеет параметры* $(800,204,28,60)$ *и неглавные собственные значения* $4,-36$, *первая и вторая окрестности вершины в* $\bar\Gamma$ *сильно регулярны с параметрами* $(204,28,2,4)$ *и* $(595,144,18,40)$, *вторая окрестность вершины в* Γ *является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений* $\{144,125,32,1;1,8,125,144\}$;

(4) Γ — *граф с* $(p,q)=(5,7)$, $r=3,6$ *и массивом пересечений* $\{329,288,(r-1)84/r,1;1,84/r,288,329\}$, $\bar\Gamma$ *имеет параметры* $(1458,329,40,84)$ *и неглавные собственные значения* $5,-49$, *первая и вторая окрестности вершины в* $\bar\Gamma$ *сильно регулярны с параметрами* $(329,40,3,5)$ *и* $(1128,245,28,60)$, *вторая окрестность вершины в* Γ *является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений* $\{245,216,(r-1)60/r,1;1,60/r,216,245\}$;

(5) Γ — *граф с* $(p,q,r)=(6,8,7)$ *и массивом пересечений* $\{496,441,96,1;1,16,441,496\}$*,* $\bar\Gamma$ *имеет параметры* $(2450,496,54,112)$ *и неглавные собственные значения* $6,-64$*, первая и вторая окрестности вершины в* $\bar\Gamma$ *сильно регулярны с параметрами* $(496,54,4,6)$ *и* $(1953,384,40,84)$*, вторая окрестность вершины в* Γ *является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений* $\{384,343,72,1;1,12,343,384\}$;

(6) Γ — *граф с* $(p,q)=(7,9)$*,* $r=4,8$ *и массивом пересечений* $\{711,640,(r-1)144/r,1;1,144/r,640,711\}$*,* $\bar\Gamma$ *имеет параметры* $(3872,711,70,144)$ *и неглавные собственные значения* $7,-81$*, первая и вторая окрестности вершины в* $\bar\Gamma$ *сильно регулярны с параметрами* $(711,70,5,7)$ *и* $(3160,567,54,112)$*, вторая окрестность вершины в* Γ *является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений* $\{567,512,(r-1)112/r,1;1,112/r,512,567\}$;

(7) Γ — *граф с* $(p,q)=(8,10)$*,* $r=3,6,9$ *и массивом пересечений* $\{980,891,(r-1)180/r,1;1,180/r,891,980\}$*,* $\bar\Gamma$ *имеет параметры* $(5832,980,88,180)$ *и неглавные собственные значения* $8,-100$*, первая и вторая окрестности вершины в* $\bar\Gamma$ *сильно регулярны с параметрами* $(980,88,6,8)$ *и* $(4851,800,70,144)$*, вторая окрестность вершины в* Γ *является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений* $\{800,729,(r-1)144/r,1;1,144/r,729,800\}$.

В [6] доказана единственность дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{32,27,8,1;1,4,27,32\}$.

Имеется гипотеза о вложении гиперовалов в $GQ(9,7)$, справедливость которой влечет несуществование $AT4$-графа, в котором окрестности вершин — точечные графы для $GQ(9,7)$.

Предположение 1. *Обобщенный четырехугольник* $GQ(9,7)$ *не содержит четверку изолированных регулярных подграфов без треугольников степени* 8 *на* 32 *вершинах.*

В разд. 1 найдены параметры графов из $\mathcal{M}$, имеющих не более 1000 вершин. В разд. 2 исследованы $AT4$-графы, в которых окрестности вершин — графы из $\mathcal{M}$ с параметрами из разд. 1.

1. Параметры небольших графов из $\mathcal{M}$

Сначала приведем некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1.1 (см., например, [7, § 2]). *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* (v,k,λ,μ) *и неглавными собственными значениями* r,s, $s<0$. *Если* D — *индуцированный регулярный подграф из* Γ *степени* d *на* w *вершинах, то*

$$s\leqslant d-\frac{w(k-d)}{v-w}\leqslant r,$$

причем одно из равенств достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина из $\Gamma-D$ *смежна точно с* $w(k-d)/(v-w)$ *вершинами из* D.

Лемма 1.2 [2, теорема 5.4, следствие 5.6]. *Пусть* Γ *является* $AT4(p,q,r)$*-графом. Тогда* Γ — *граф с массивом пересечений* $\{q(pq+p+q),(q^2-1)(p+1),(r-1)q(p+q)/r,1;1,q(p+q)/r,(q^2-1)(p+1),q(pq+p+q)\}$*,* $a_1=a_3=p(q+1)$*,* $a_2=pq^2$*,* $a_4=0$*, антиподальное частное* $\bar\Gamma$ *имеет параметры* $\bar k=k$*,* $\bar\lambda=a_1$*,* $\bar\mu=q(p+q)$ *и собственные значения* $p,-q^2$*, а параметры окрестности вершины в* Γ *равны* $k'=p(q+1)$*,* $\lambda'=2p-q$*,* $\mu'=p$.

Лемма 1.3 [2, теорема 6.1; 4, теорема 4.3, следствие 4.1]. *Пусть* Γ *является* $AT4(p,q,r)$*-графом, отличным от графа Конвея — Смита. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) $pq(p+q)/r$ *четно,* $r(p+1)<q(p+q)$ *и* r *делит* $p+q$;

(2) μ*-подграфы из* Γ *являются полными многодольными тогда и только тогда, когда* $(p,q,r)=(\alpha q,q,q)$ *для любого натурального* α;

(3) *если* $(p+q)(2q+1)<3r(p+2)$*, то* μ*-подграфы из* Γ *являются полными многодольными* $K_{t\times n}$*-графами с* $n=q\alpha-p$*,* $t=q\alpha/(q\alpha-p)$.

Напомним, что класс графов $\mathcal{M}$ состоит из сильно регулярных графов с параметрами $(m^2\mu+m\mu+m^2, (m+1)\mu, 2\mu-m, \mu)$. В леммах 1.4–1.6 предполагается, что Δ является сильно регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ), $v \leqslant 1000$ и собственными значениями $(k, \mu, -m)$, где $k-\mu = m\mu$ и $\lambda - \mu = \mu - m$. Так как $m^2\mu+m\mu+m^2 \leqslant 1000$ и $\mu \geqslant m/2$, то $m^2(m+3) \leqslant 2000$ и $m \leqslant 11$.

Лемма 1.4. *Если* $m \leqslant 4$, *то выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) $m = 1$ *и* Δ *является* $(2\mu+1)$*-кликой*;

(2) $m = 2$, Δ *— граф Петерсена с параметрами* $(10, 3, 0, 1)$, *граф Шрикханде или* (4×4)*-решетка с параметрами* $(16, 6, 2, 2)$ *или граф с параметрами* $(28, 12, 6, 4)$;

(3) $m = 3$, Δ *— граф с параметрами* $(69, 20, 7, 5)$ *или псевдогеометрический граф для* $pG_\alpha(4\alpha, 2)$, $\alpha = 1, 2, 3, 5, 7, 11, 23$;

(4) $m = 4$ *и* Δ *— граф с параметрами* $(56, 10, 0, 2)$, $(116, 25, 6, 5)$, $(236, 55, 18, 11)$, $(536, 130, 48, 26)$ *или псевдогеометрический граф для* $pG_\alpha(5\alpha, 3)$, $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5, 9$.

Доказательство. Пусть $m = 1$. Тогда Δ является $(2\mu+1)$-кликой.

Пусть $m = 2$. Тогда Δ имеет параметры $(6\mu+4, 3\mu, 2\mu-2, \mu)$, $\mu+2$ делит 6μ. Поэтому $\mu = 1, 2, 4, 10$ и Δ — граф Петерсена с параметрами (10,3,0,1), граф Шрикханде или (4×4)-решетка с параметрами (16,6,2,2), граф с параметрами (28,12,6,4) или граф с параметрами (64,30,18,10). Но последний граф не существует по теореме Зейделя о сильно регулярных графах с собственным значением -2.

Пусть $m = 3$. Тогда Δ имеет параметры $(12\mu+9, 4\mu, 2\mu-3, \mu)$, $\mu+3$ делит 24μ. Поэтому $\mu = 3, 5, 6, 9, 15, 21, 33, 69$ и Δ — граф с параметрами (69,20,7,5) или псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(4\alpha, 2)$, $\alpha = 1, 2, 3, 5, 7, 11, 23$.

Пусть $m = 4$. Тогда Δ имеет параметры $(20\mu+16, 5\mu, 2\mu-4, \mu)$, $\mu+4$ делит 60μ. Поэтому $\mu = 2, 4, 6, 8, 11, 12, 16, 20, 26, 36$ и Δ — граф с параметрами (56,10,0,2), (136,30,8,6), (236,55,18,11), (536,130,48,26) или Δ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(5\alpha, 3)$, $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5, 9$.

Лемма доказана.

Лемма 1.5. *Если* $5 \leqslant m \leqslant 7$, *то выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) $m = 5$, Δ *— граф с параметрами* $(115, 18, 1, 3)$, $(235, 42, 9, 7)$, $(595, 114, 33, 19)$ *или псевдогеометрический граф для* $pG_\alpha(6\alpha, 4)$, $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$;

(2) $m = 6$, Δ *— граф с параметрами* $(162, 21, 0, 3)$, $(204, 28, 2, 4)$, $(372, 56, 10, 8)$, $(414, 63, 12, 9)$, $(666, 105, 24, 15)$ *или псевдогеометрический граф для* $pG_\alpha(7\alpha, 5)$, $\alpha = 1, 2$;

(3) $m = 7$, Δ *— граф с параметрами* $(329, 40, 3, 5)$, $(553, 72, 11, 9)$ *или псевдогеометрический граф для* $pG_\alpha(8\alpha, 6)$, $\alpha = 1, 2$.

Доказательство. Пусть $m = 5$. Тогда Δ имеет параметры $(30\mu+25, 6\mu, 2\mu-5, \mu)$, $\mu+5$ делит 120μ. Поэтому либо $\mu = 3, 7, 19$ и Δ — граф с параметрами (115,18,1,3), (235,42,9,7), (595,114,33,19), либо Δ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(6\alpha, 4)$, $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5, 7$ (так как $v \leqslant 1000$, то $\alpha < 7$).

Пусть $m = 6$. Тогда Δ имеет параметры $(42\mu+36, 7\mu, 2\mu-6, \mu)$, $\mu+6$ делит 210μ. Поэтому либо $\mu = 3, 4, 8, 9, 15$ и Δ — граф с параметрами (162,21,0,3), (204,28,2,4), (372,56,10,8), (414,63,12,9), (666,105,24,15), либо Δ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(7\alpha, 5)$, $\alpha = 1, 2, 3$. Но для $\alpha = 3$ число $\mu + 6 = 24$ не делит 210μ.

Пусть $m = 7$. Тогда Δ имеет параметры $(56\mu+49, 8\mu, 2\mu-7, \mu)$, $\mu+7$ делит $7\cdot 48\mu$. Поэтому либо $\mu = 5, 9, 17$ и Δ — граф с параметрами (329,40,3,5), (553,72,11,9), (1001,136,27,17), либо Δ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(8\alpha, 6)$, $\alpha = 1, 2$.

Лемма доказана.

Лемма 1.6. *Если* $8 \leqslant m \leqslant 11$, *то выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) $m = 8$, Δ *— граф с параметрами* $(352, 36, 0, 4)$, $(496, 54, 4, 6)$, $(784, 90, 12, 10)$, $(1000, 117, 18, 13)$ *или псевдогеометрический граф для* $GQ(9, 7)$;

(2) $m = 9$, Δ — *граф с параметрами* $(621, 60, 3, 6)$, $(711, 70, 5, 7)$ *или псевдогеометрический граф для* $GQ(10, 8)$;

(3) $m = 10$, Δ — *граф с параметрами* $(650, 55, 0, 5)$, $(980, 88, 6, 8)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $m = 8$. Тогда Δ имеет параметры $(72\mu+64, 9\mu, 2\mu-8, \mu)$, $\mu+8$ делит $8\cdot 63\mu$. Поэтому $\mu = 4, 6, 10, 13$ и Δ — граф с параметрами (352,36,0,4), (496,54,4,6), (784,90,12,10), (1000,117,18,13) или Δ — псевдогеометрический граф для $GQ(9, 7)$.

Пусть $m = 9$. Тогда Δ имеет параметры $(90\mu+81, 10\mu, 2\mu-9, \mu)$, $\mu+9$ делит $9\cdot 80\mu$. Поэтому $\mu = 6, 7$ и Δ — граф с параметрами (621,60,3,6), (711,70,5,7) или Δ — псевдогеометрический граф для $GQ(10, 8)$.

Пусть $m = 10$. Тогда Δ имеет параметры $(110\mu + 100, 11\mu, 2\mu - 10, \mu)$, $\mu + 10$ делит $10 \cdot 99\mu$. Поэтому $\mu = 5, 8$ и Δ — граф с параметрами (650,55,0,5), (980,88,6,8) или Δ — псевдогеометрический граф для $GQ(11, 9)$. В последнем случае $v = 1200$, противоречие.

Пусть $m = 11$. Тогда Δ имеет параметры $(132\mu+121, 12\mu, 2\mu-11, \mu)$, $\mu+11$ делит $11\cdot 120\mu$. Поэтому $\mu \geqslant 9$ и $v > 1000$ или Δ — псевдогеометрический граф для $GQ(12, 10)$. В последнем случае $v = 13 \cdot 121$, противоречие.

Лемма и теорема 1 доказаны.

2. Параметры небольших $AT4(p, q, r)$-графов

В этом разделе предполагается, что Γ является $AT4(p, q, r)$-графом степени, не большей 1000. Пусть u — вершина графа Γ и $\Delta = [u]$. Тогда Γ — граф с массивом пересечений $\{q(pq + p + q), (q^2 - 1)(p + 1), (r - 1)q(p + q)/r, 1; 1, q(p + q)/r, (q^2 - 1)(p + 1), q(pq + p + q)\}$, параметры антиподального частного $\bar{\Gamma}$ равны $\bar{k} = q(pq + p + q) = k$, $\bar{\lambda} = a_1 = p(q + 1)$, $\bar{\mu} = q(p + q)$. По [2, теорема 6.1] $p + q$ делит $q^2(q^2 - 1)$ и $p + q^2$ делит $q^2(q^2 - 1)(q^2 + q - 1)(q + 2)$.

Лемма 2.1. *Если* Δ — *псевдогеометрический граф для* $pG_\alpha(\alpha(q+1), q-1)$, *то верно одно из утверждений*:

(1) Γ — *граф Джонсона* $J(8, 4)$ *с* $(p, q, r) = (2, 2, 2)$, *половинный* 8-*куб с* $(p, q, r) = (4, 2, 2)$, $3O_6^-(3)$-*граф с* $(p, q, r) = (3, 3, 3)$, *первый граф Мейкснера с* $(p, q, r) = (8, 4, 2)$, *второй граф Мейкснера с* $(p, q, r) = (8, 4, 4)$, $3O_7(3)$-*граф с* $(p, q, r) = (9, 3, 3)$ *или второй граф Сойчера с* $(p, q, r) = (20, 4, 3)$;

(2) Γ — *граф с* $(p, q, r) = (3\alpha, 3, 2)$, $\alpha = 3, 7$, *и массивом пересечений* $\{117, 80, 18, 1; 1, 18, 80, 117\}$ *или* $\{261, 176, 36, 1; 1, 36, 176, 261\}$;

(3) Γ — *граф с* $(p, q, r) = (4, 4, 2)$ *и массивом пересечений* $\{96, 75, 16, 1; 1, 16, 75, 96\}$, *или с* $(p, q, r) = (8, 4, 3)$ *и массивом пересечений* $\{176, 135, 32, 1; 1, 16, 135, 176\}$, *или с* $(p, q, r) = (16, 4, 2)$ *и массивом пересечений* $\{336, 255, 40, 1; 1, 40, 255, 336\}$;

(4) Γ — *граф с* $(p, q, r) = (10, 5, 3)$ *и массивом пересечений* $\{325, 264, 50, 1; 1, 25, 264, 325\}$, *или с* $(p, q, r) = (15, 5, 2)$ *и массивом пересечений* $\{475, 384, 50, 1; 1, 50, 384, 475\}$, *или с* $(p, q, r) = (25, 5, 3)$ *и массивом пересечений* $\{775, 624, 100, 1; 1, 50, 624, 775\}$;

(5) Γ — *граф с* $(p, q, r) = (6, 6, r)$, $r = 2, 3$, *и массивом пересечений* $\{288, 245, (r-1)72/r, 1; 1, 72/r, 245, 288\}$ *или с* $(p, q, r) = (12, 6, r)$, $r = 2, 3$ *и массивом пересечений* $\{540, 455, (r-1)108/r, 1; 1, 108/r, 455, 540\}$;

(6) Γ — *граф с* $(p, q, r) = (8, 8, r)$, $r = 2, 4$, *и массивом пересечений* $\{640, 567, (r-1)128/r, 1; 1, 128/r, 567, 640\}$ *или граф с* $(p, q, r) = (9, 9, r)$, $r = 2, 3, 6$ *и массивом пересечений* $\{891, 800, (r - 1)162/r, 1; 1, 162/r, 800, 891\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $p = \alpha q$. Тогда Δ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(\alpha(q+1), q-1)$, $\alpha+1$ делит $(q-1)(q+1)(q+2)$ и $q(q^2-1)$, а $\alpha+q$ делит $q(q^2-1)(q^2+q-1)(q+2)$.

По лемме 1.3 число $q^3\alpha(\alpha + 1)/r$ четно, $r(\alpha q + 1) \leqslant q^2(\alpha + 1)$ и r делит $q(\alpha + 1)$.

Если Δ — псевдогеометрический граф для $GQ(3, 1)$, то $p = q = r = 2$ и Γ — граф Джонсона $J(8, 4)$, а если Δ — псевдогеометрический граф для $pG_2(6, 1)$, то $p = 4, q = 2, r = 2$ и Γ — половинный 8-куб.

Если Δ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(4\alpha,2)$, $\alpha=1,2,3,5,7,11,23$, то $p=3\alpha, q=3$. В случаях $\alpha=1,2$ число r нечетно, поэтому $r=3$, а в случаях $\alpha\geqslant 3$ имеем $r=2,3$. По [4] Γ — $3O_6^-(3)$-граф с $(p,q,r)=(3,3,3)$, $3O_7(3)$-граф с $(p,q,r)=(9,3,3)$ или граф с $(p,q,r)=(3\alpha,3,2)$, $\alpha=3,7,11,23$. Но в случаях $\alpha=11,23$ число $p+q^2=3(3+\alpha)$ не делит $q^2(q^2-1)(q^2+q-1)(q+2)$.

Если Δ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(5\alpha,3)$, $\alpha=1,2,3,4,5,9$, то $p=4\alpha, q=4$. Ввиду [4] имеем $r\neq 4$ или Γ — второй граф Мейкснера. В случае $\alpha=1$ имеем $r=2$ и Γ имеет массив пересечений $\{96,75,16,1;1,16,75,96\}$. В случае $\alpha=2$ имеем $r=2,3$ и либо Γ — первый граф Мейкснера с (p,q,r), равным $(8,4,2)$, либо $r=3$. В случаях $\alpha=3,4$ имеем $r=2$. Но в случае $\alpha=3$ число $p+q^2=4(4+\alpha)$ не делит $q^2(q^2-1)(q^2+q-1)(q+2)$. В случае $\alpha=5$ имеем $r=3$ и Γ — второй граф Сойчера с $(p,q,r)=(20,4,3)$. В случае $\alpha=9$ имеем $r=2$, Γ имеет массив пересечений $\{736,555,80,1;1,80,555,736\}$ и некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие.

Если Δ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(6\alpha,4)$, $\alpha=1,2,3,4,5$, то $p=5\alpha, q=5$. В случае $\alpha=1$ имеем $r=5$, а в случае $\alpha=2$ имеем $r=3,5$. В случае $\alpha=3$ имеем $r=2,5$, в случае $\alpha=4$ имеем $r=5$, а в случае $\alpha=5$ имеем $r=3,5$. Ввиду [4] тройка (p,q,r) равна (10,5,3), (15,5,2) или (25,5,3).

Если Δ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(7\alpha,5)$, $\alpha=1,2$, то $p=6\alpha, q=6$. В случае $\alpha=1$ имеем $r=2,3$, а в случае $\alpha=2$ имеем $r=2,3,6,9$. В случае $r\geqslant 6$ имеем $(\alpha+1)q(2q+1)<3r(\alpha q+2)$, по лемме 1.3 μ-подграфы из Γ являются полными многодольными графами, поэтому $r=6$, противоречие с [4].

Если Δ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(8\alpha,6)$, $\alpha=1,2$, то $p=7\alpha, q=7$. В случае $\alpha=1$ имеем $r=7$, а в случае $\alpha=2$ имеем $r=3,7$. По [4] тройка (p,q,r) равна (14,7,3). Но в этом случае некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие.

Если Δ — псевдогеометрический граф для $GQ(9,7)$, то ввиду [4] тройка (p,q,r) равна (8,8,2) или (8,8,4). Если Δ — псевдогеометрический граф для $GQ(10,8)$, то $p=q=9$ и ввиду [4] имеем $r=2,3,6$.

Лемма доказана.

Если Δ — граф Петерсена или граф Гевиртца, то Γ — граф Конвея—Смита с $(p,q,r)=(1,2,3)$ или первый граф Сойчера с $(p,q,r)=(5,3,4)$. В дальнейшем будем предполагать, что Δ не является графом Петерсена или графом Гевиртца.

Лемма 2.2. *Если $q\leqslant 5$, то Δ — граф с параметрами* $(115,18,1,3)$, *Γ — граф с* $(p,q,r)=(3,5,4)$ *и массивом пересечений* $\{115,96,30,1;1,10,96,115\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Δ — граф с параметрами $(69,20,7,5)$. Тогда $(p,q)=(5,3)$. По лемме 1.3 число $pq(p+q)/r$ четно, $r(p+1)<q(p+q)$ и r делит $p+q$, поэтому $r=2$, Γ имеет массив пересечений $\{69,48,12,1;1,12,48,69\}$ и некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие.

Пусть Δ — граф с параметрами $(116,25,6,5)$. Тогда $(p,q)=(5,4)$. По лемме 1.3 число $180/r$ четно, $6r<36$ и r делит 9, поэтому $r=3$, Γ имеет массив пересечений $\{116,90,24,1;1,12,90,116\}$ и некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие.

Пусть Δ — граф с параметрами $(236,55,18,11)$. Тогда $(p,q)=(11,4)$. По лемме 1.3 число $4/r$ четно, $12r<60$ и r делит 15, поэтому $r=3$, Γ имеет массив пересечений $\{236,180,40,1;1,20,180,236\}$ и некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие.

Пусть Δ — граф с параметрами $(536,130,48,26)$. Тогда $(p,q)=(26,4)$. По лемме 1.3 число $16/r$ четно, $26r<120$ и r делит 30, поэтому $r=2,3$, Γ имеет массив пересечений $\{536,405,(r-1)120/r,1;1,120/r,405,536\}$ и некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие.

Пусть Δ — граф с параметрами $(115,18,1,3)$. Тогда $(p,q)=(3,5)$. По лемме 1.3 число $8/r$ четно, $4r<40$ и r делит 8, поэтому $r=2,4$. По [3] граф с $(p,q,r)=(3,5,2)$ не существует. Поэтому $r=4$ и Γ имеет массив пересечений $\{115,96,30,1;1,10,96,115\}$.

Пусть Δ — граф с параметрами $(235, 42, 9, 7)$. Тогда $(p, q) = (7, 5)$. По лемме 1.3 число $4/r$ четно, $8r < 60$ и r делит 12, поэтому $r = 2, 3, 6$, Γ имеет массив пересечений $\{235, 192, (r-1)60/r, 1; 1, 60/r, 192, 235\}$ и некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие.

Пусть Δ — граф с параметрами $(595, 114, 33, 19)$. Тогда $(p, q) = (19, 5)$. По лемме 1.3 число $8/r$ четно, $20r < 120$ и r делит 24, поэтому $r = 2, 3, 4$, Γ имеет массив пересечений $\{595, 480, (r-1)120/r, 1; 1, 120/r, 480, 595\}$ и некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Если $q = 6$, то Δ — граф с параметрами $(204, 28, 2, 4)$, Γ — граф с $(p, q, r) = (4, 6, 5)$ и массивом пересечений $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$ или Δ — граф с параметрами $(414, 63, 12, 9)$, Γ — граф с $(p, q) = (9, 6)$, $r = 3, 5$ и массивом пересечений $\{414, 350, (r-1)90/r, 1; 1, 90/r, 350, 414\}$.*

Доказательство. Пусть Δ — граф с параметрами $(162, 21, 0, 3)$. Тогда $(p, q) = (3, 6)$. По лемме 1.3 число $2/r$ четно, $4r < 54$ и r делит 9, поэтому $r = 3, 9$. В случае $r = 9$ имеем $(p+q)(2q+1) < 3r(p+2)$, по лемме 1.3 μ-подграфы из Γ являются полными многодольными графами, противоречие. Значит, $r = 3$, Γ имеет массив пересечений $\{162, 140, 36, 1; 1, 18, 140, 162\}$ и некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие.

Пусть Δ — граф с параметрами $(204, 28, 2, 4)$. Тогда $(p, q) = (4, 6)$. По лемме 1.3 число $16/r$ четно, $5r < 60$ и r делит 10, поэтому $r = 2, 5$. По [3] граф с $(p, q, r) = (4, 6, 2)$ не существует. Поэтому $r = 5$ и Γ имеет массив пересечений $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$.

Пусть Δ — граф с параметрами $(372, 56, 10, 8)$. Тогда $(p, q) = (8, 6)$. По лемме 1.3 число $32/r$ четно, $9r < 84$ и r делит 14, поэтому $r = 2, 7$, Γ имеет массив пересечений $\{372, 315, (r-1)84/r, 1; 1, 84/r, 315, 372\}$ и некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие.

Пусть Δ — граф с параметрами $(414, 63, 12, 9)$. Тогда $(p, q) = (9, 6)$. По лемме 1.3 число $2/r$ четно, $10r < 90$ и r делит 15, поэтому $r = 3, 5$, Γ имеет массив пересечений $\{414, 350, (r-1)90/r, 1; 1, 90/r, 350, 414\}$.

Пусть Δ — граф с параметрами $(666, 105, 24, 15)$. Тогда $(p, q) = (15, 6)$. По лемме 1.3 число $2/r$ четно, $16r < 126$ и r делит 21, поэтому $r = 3, 7$, Γ имеет массив пересечений $\{666, 560, (r-1)126/r, 1; 1, 126/r, 560, 666\}$ и некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Если $6 < q < 9$, то Δ — граф с параметрами $(329, 40, 3, 5)$, Γ — граф с $(p, q) = (5, 7)$, $r = 3, 6$ и массивом пересечений $\{329, 288, (r-1)84/r, 1; 1, 84/r, 288, 329\}$ или Δ — граф с параметрами $(496, 54, 4, 6)$, Γ — граф с $(p, q, r) = (6, 8, 7)$ и массивом пересечений $\{496, 441, 96, 1; 1, 16, 441, 496\}$.*

Доказательство. Пусть Δ — граф с параметрами $(329, 40, 3, 5)$. Тогда $(p, q) = (5, 7)$. По лемме 1.3 число $4/r$ четно, $6r < 84$ и r делит 12, поэтому $r = 2, 3, 6$. По [3] граф с $(p, q, r) = (5, 7, 2)$ не существует. Поэтому $r = 3, 6$ и Γ имеет массив пересечений $\{329, 288, (r-1)84/r, 1; 1, 84/r, 288, 329\}$.

Пусть Δ — граф с параметрами $(553, 72, 11, 9)$. Тогда $(p, q) = (9, 7)$. По лемме 1.3 число $16/r$ четно, $10r < 112$ и r делит 16, поэтому $r = 2, 4, 8$, Γ имеет массив пересечений $\{553, 480, (r-1)112/r, 1; 1, 112/r, 480, 553\}$ и некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие.

Пусть Δ — граф с параметрами $(352, 36, 0, 4)$. Тогда $(p, q) = (4, 8)$. По лемме 1.3 число $64/r$ четно, $5r < 96$ и r делит 12, поэтому $r = 2, 3, 4, 6, 12$. В случае $r = 12$ имеем $(p+q)(2q+1) < 3r(p+2)$, по лемме 1.3 μ-подграфы из Γ являются полными многодольными графами, противоречие. Поэтому $r = 2, 3, 4, 6$, Γ имеет массив пересечений $\{352, 315, (r-

$1)96/r, 1; 1, 96/r, 315, 352\}$ и некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие.

Пусть Δ — граф с параметрами $(496, 54, 4, 6)$. Тогда $(p, q) = (6, 8)$. По лемме 1.3 число $32/r$ четно, $7r < 112$ и r делит 14, поэтому $r = 2, 7, 14$. В случае $r = 14$ имеем $(p+q)(2q+1) < 3r(p+2)$, по лемме 1.3 μ-подграфы из Γ являются полными многодольными графами, противоречие. По [3] граф с $(p, q, r) = (6, 8, 2)$ не существует. Поэтому $r = 7$ и Γ имеет массив пересечений $\{496, 441, 96, 1; 1, 16, 441, 496\}$.

Пусть Δ — граф с параметрами $(784, 90, 12, 10)$. Тогда $(p, q) = (10, 8)$. По лемме 1.3 число $32/r$ четно, $11r < 8 \cdot 18$ и r делит 18, поэтому $r = 2, 3, 6, 9$. В случае $r = 9$ имеем $(p + q)(2q + 1) < 3r(p + 2)$, по лемме 1.3 μ-подграфы из Γ являются полными многодольными графами, противоречие. Поэтому $r = 2, 3, 6$, Γ имеет массив пересечений $\{784, 693, (r - 1)144/r, 1; 1, 144/r, 693, 784\}$ и некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие.

Пусть Δ — граф с параметрами $(1000, 117, 18, 13)$. Тогда $(p, q) = (13, 8)$. По лемме 1.3 число $8/r$ четно, $14r < 8 \cdot 21$ и r делит 21, поэтому $r = 3, 7$, Γ имеет массив пересечений $\{1000, 882, (r - 1)168/r, 1; 1, 168/r, 882, 1000\}$ и некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 2.5. *Если $q > 8$, то Δ — граф с параметрами $(711, 70, 5, 7)$, Γ — граф с $(p, q) = (7, 9)$, $r = 4, 8$ и массивом пересечений $\{711, 640, (r-1)144/r, 1; 1, 144/r, 640, 711\}$ или Δ — граф с параметрами $(980, 88, 6, 8)$, Γ — граф с $(p, q) = (8, 10)$, $r = 3, 6, 9$ и массивом пересечений $\{980, 891, (r - 1)180/r, 1; 1, 180/r, 891, 980\}$.*

Доказательство. Пусть Δ — граф с параметрами $(621, 60, 3, 6)$. Тогда $(p, q) = (6, 9)$. По лемме 1.3 число $2/r$ четно, $7r < 9 \cdot 15$ и r делит 15, поэтому $r = 3, 5, 15$. В случае $r = 15$ имеем $(p + q)(2q + 1) < 3r(p + 2)$, по лемме 1.3 μ-подграфы из Γ являются полными многодольными графами, противоречие. Поэтому $r = 3, 5$ и Γ имеет массив пересечений $\{621, 560, (r - 1)135/r, 1; 1, 135/r, 560, 621\}$ и некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие.

Пусть Δ — граф с параметрами $(711, 70, 5, 7)$. Тогда $(p, q) = (7, 9)$. По лемме 1.3 число $16/r$ четно, $8r < 9 \cdot 16$ и r делит 16, поэтому $r = 2, 4, 8$. По [3] граф с $(p, q, r) = (7, 9, 2)$ не существует. Поэтому $r = 4, 8$ и Γ имеет массив пересечений $\{711, 640, (r - 1)144/r, 1; 1, 144/r, 640, 711\}$.

Пусть Δ — граф с параметрами $(650, 55, 0, 5)$. Тогда $(p, q) = (5, 10)$. По лемме 1.3 число $2/r$ четно, $6r < 10 \cdot 15$ и r делит 15, поэтому $r = 3, 5, 15$, Γ имеет массив пересечений $\{650, 594, (r - 1)150/r, 1; 1, 150/r, 594, 650\}$ и некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие.

Пусть Δ — граф с параметрами $(980, 88, 6, 8)$. Тогда $(p, q) = (8, 10)$. По лемме 1.3 число $32/r$ четно, $9r < 10 \cdot 18$ и r делит 18, поэтому $r = 2, 3, 6, 9, 18$. В случае $r = 18$ имеем $(p + q)(2q + 1) < 3r(p + 2)$, по лемме 1.3 μ-подграфы из Γ являются полными многодольными графами, противоречие. По [3] граф с $(p, q, r) = (8, 10, 2)$ не существует. Поэтому $r = 3, 6, 9$, Γ имеет массив пересечений $\{980, 891, (r - 1)180/r, 1; 1, 180/r, 891, 980\}$.

Лемма доказана.

Лемма 2.6. *Пусть Δ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(\alpha(q+1), q-1)$. Если $(p, q) = (9, 9)$, то $r = 3$.*

Доказательство. Пусть Δ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(\alpha(q+1), q-1)$.

Если Γ — граф с $(p, q, r) = (9, 9, r)$, $r = 2, 3, 6$ и массивом пересечений $\{891, 800, (r - 1)162/r, 1; 1, 162/r, 800, 891\}$, то Δ имеет параметры (891,90,9,9) и собственные значения $(9, -9)$. В этом случае $[w]$ содержит r изолированных регулярных μ-подграфов $[u_i] \cap [w]$ степени 9 на $162/r$ вершинах, поэтому $r = 3$.

Из лемм 2.1–2.7 следует теорема 2. Из теоремы 2 и предложения 2 следует теорема 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin etc: Springer-Verlag, 1989. 495 p.
2. **Jurisic A., Koolen J.** Krein parameters and antipodal tight graphs with diameter 3 and 4 // Discrete Math. 2002. Vol. 244. P. 181–202.
3. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** О сильно регулярных графах с собственным значением μ и их расширениях // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, №3. С. 207–214.
4. **Jurisic A., Koolen J.** Classification of the family $AT4(qs, q, q)$ of antipodal tight graphs // J. Comb. Theory Ser. A. 2011. Vol. 118, no. 3. P. 842–852.
5. **Махнев А.А., Падучих Д.В., Хамгокова М.М.** Дистанционно регулярные локально псевдо $GQ(5, 3)$-графы // Докл. АН. 2014. Т. 458, №5. С. 518–522.
6. **Soicher L.H.** Uniqueness of a distance-regular graph with intersection array $\{32, 27, 8, 1; 1, 4, 27, 32\}$ and related topics // arXiv:1512.05976 [math.CO]. 18 Dec 2015. P. 1–11. URL: http://arxiv.org/pdf/1512.05976v1.pdf.
7. **Brouwer A.E., Haemers W.H.** The Gewirtz graph: an exercise in the theory of graph spectra // Europ. J. Comb. 1993. Vol. 14. P. 397–407.

Махнев Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Поступила 14.05.2015

Падучих Дмитрий Викторович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: dpaduchikh@gmail.com