ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 1 2016

УДК 519.17+512.54

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$ [1]

А. А. Махнев, М. С. Нирова, Д. В. Падучих

Дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$ является $AT4$-графом. Антиподальное частное $\bar{\Gamma}$ имеет параметры $(800, 204, 28, 60)$. В работе найдены автоморфизмы указанных графов. В частности, оба указанных графа не являются реберно симметричными.

Ключевые слова: сильно регулярный граф, собственное значение графа, автоморфизм графа.

A. A. Makhnev, M. S. Nirova, D. V. Paduchikh. On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$.

A distance-regular graph Γ with intersection array $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$ is an $AT4$-graph. The antipodal quotient $\bar{\Gamma}$ has parameters $(800, 204, 28, 60)$. Automorphisms of the specified graphs are found. In particular, neither of the two graphs is edge-symmetric.

Keywords: strongly regular graph, eigenvalue of a graph, automorphism of a graph.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е., подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^{\perp} = \{a\} \cup [a]$.

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным степени* k, если степень любой вершины из Γ равна k. Граф Γ назовем *реберно регулярным с параметрами* (v, k, λ), если он содержит v вершин, регулярен степени k и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ — *вполне регулярный граф с параметрами* (v, k, λ, μ), если он реберно регулярен с соответствующими параметрами и $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин для любых двух вершин a, b, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.*

Граф Γ диаметра d называется *антиподальным*, если бинарное отношение на множестве вершин: совпадать или находиться на расстоянии d — является отношением эквивалентности. Классы этого отношения называются антиподальными классами. Антиподальное частное $\bar{\Gamma}$ в качестве вершин имеет антиподальные классы, и классы $\bar{u}, \bar{w}$ смежны, если $\bar{u}$ содержит вершину, смежную с вершиной из $\bar{w}$. Если каждый антиподальный класс содержит ровно r вершин, то r называется *индексом антиподальности* и Γ называется антиподальным r-накрытием графа $\bar{\Gamma}$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ $(\Gamma_{i-1}(u))$ с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \ldots, d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$ (см. [1]).

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РНФ, проект 15-11-10025 (теорема 2), и соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006 (теорема 1 и следствие 1).

Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\mathrm{Fix}(X)$ обозначается подграф, индуцированный множеством всех вершин графа Γ, неподвижных относительно любого автоморфизма из X. Далее, через $p^l_{ij}(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются числами пересечения графа Γ.

Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$ является $AT4(4, 6, 5)$-графом (см. [2]). В работе исследуются автоморфизмы дистанционно регулярного графа Γ с массивом пересечений $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$. Антиподальное частное $\bar{\Gamma}$ имеет параметры $(800, 204, 28, 60)$ и неглавные собственные значения $4, -36$, первая и вторая окрестности вершины в $\bar{\Gamma}$ сильно регулярны с параметрами $(204, 28, 2, 4)$ и $(595, 144, 18, 40)$, вторая окрестность вершины в Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$. В [3] найдены автоморфизмы графов с параметрами $(204, 28, 2, 4)$ и $(595, 144, 18, 40)$.

Предложение 1. *Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(204, 28, 2, 4)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 17\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *Ω — пустой граф, либо $p = 17$ и $\alpha_1(g) = 34$, либо $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 30l - 6$, либо $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 20m + 4$;*

(2) *Ω является n-кликой, либо $n = 1$, $p = 7$ и $\alpha_1(g) = 70r + 28$, либо $n = 4$, $p = 5$ и $\alpha_1(g) = 50s$, $s \leqslant 2$;*

(3) *Ω является l-кокликой, $p = 2$, $\alpha_1(g) = 20t - 6l + 4$ и $l = 8, 10, \ldots, 34$;*

(4) *Ω содержит геодезический 2-путь и либо*

(*i*) *$p = 3$, Ω — октаэдр и $\alpha_1(g) = 30t + 18$, либо*

(*ii*) *$p = 2$, степени вершин в Ω равны $2, 4, \ldots, 26$ и $|\Omega| = 4, 6, \ldots, 34$.*

В данной работе найдены возможные автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами $(800, 204, 28, 60)$ и дистанционно реулярного графа с массивом пересечений $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$.

Теорема 1. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(800, 204, 28, 60)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 17\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *Ω — пустой граф, либо $p = 5$ и $\alpha_1(g) = 200l$, либо $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 40m$;*

(2) *Ω является n-кликой, либо $n = 1$, $p = 17$ и $\alpha_1(g) = 204$, либо $n = 5$, $p = 5$ и $\alpha_1(g) = 200s + 20$, либо $n = 2$, $p = 7$ и $\alpha_1(g) = 280t + 168$;*

(3) *Ω является l-кокликой, либо $p = 3$, $l = 3m + 2$, $m \leqslant 39$, $\alpha_1(g) = 120t + 12m + 48$, либо $p = 2$, $\alpha_1(g) = 80t + 4l$ и $l = 8, 10, \ldots, 120$;*

(4) *Ω является объединением m изолированных 5-клик, $2 \leqslant m \leqslant 5$, $\alpha_1(g) = 200s + 20m$;*

(5) *Ω содержит геодезический 2-путь и либо*

(*i*) *$p = 3$, Ω является объединением $3m+1$ полных многодольных графов $K_{4\times 2}$ и $\alpha_1(g) = 96m + 120t + 72$, либо*

(*ii*) *$p = 2$, $|\Omega| = 2l \leqslant 240$, $\lambda_\Omega = 0, 2, \ldots, 26$, степени вершин в Ω равны $0, 2, \ldots, 34$ и $\alpha_1(g) = 80t + 8l$.*

Следствие 1. *Если сильно регулярный граф Γ с параметрами $(800, 204, 28, 60)$ является вершинно симметричным, то $|\mathrm{Aut}(\Gamma)|$ не делится на 17. В частности, граф Γ не является реберно симметричным.*

Теорема 2. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 17\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *g индуцирует тривиальный автоморфизм антиподального частного $\bar{\Gamma}$, $p = 5$ и $\alpha_4(g) = v$;*

(2) *Ω — пустой граф, $p = 5$, $\alpha_4(g) = 0$, $\alpha_2(g) = 1000m$, $\alpha_1(g) = 200n + 800 - 200m$, $\alpha_3(g) = -200n + 3200 - 800m$ или $p = 2$, $\alpha_4(g) = 0$, $\alpha_2(g) = 400m$, $\alpha_1(g) = 80n + 800 - 80m$, $\alpha_3(g) = 3200 - 80n - 320m$;*

(3) *Ω — антиподальный класс, $p = 17$, $\alpha_1(g) = 340 + 680e$, $\alpha_2(g) = 2975$, $\alpha_3(g) = 680(1 - e)$;*

(4) *Ω — объединение двух антиподальных классов, содержащее ребро, $p = 7$, $\alpha_2(g) = 350l$, $\alpha_1(g) = 280m + 910 - 70l$, $\alpha_3(g) = 3080 - 280l - 280n$, $l = 1, 5, 9$;*

(5) *$|\Omega| = 25$, $p = 5$, $\alpha_4(g) = 0$, $\alpha_2(g) = 1000l - 125$, $\alpha_1(g) = 200n + 700$, $\alpha_3(g) = 3400 - 1000l - 200n$;*

(6) *Ω — коклика, либо $p = 3$, $|\Omega| = 5(3m + 2) - \alpha_4(g)$, $m \leqslant 39$, $\alpha_4(g) = 60m + 120n - 120e - 720 + 6l$, $\alpha_1(g) = 6l$, $\alpha_2(g) = 600n - 75m + 150$ и $\alpha_3(g) = 3840 + 60m - 600n - 6l$, либо $p = 2$, $|\Omega| = 10l - \alpha_4(g)$, $\alpha_4(g) = (20l - 400 + 40(n - e) - 2m)/3$, $\alpha_1(g) = 4m$, $\alpha_2(g) = 400n - 50l$ и $\alpha_3(g) = 4000 + 40l - 400n - 4m$;*

(7) *$|\Omega| = 25m - \alpha_4(g)$, $p = 5$, $m \leqslant 5$, $\alpha_4(g) = 25t$, $\alpha_1(g) = -100m + 800 + 200(e - n) + 25t$, $\alpha_2(g) = 1000n - 125m$ и $\alpha_3(g) = 3200 - 800n - 200e + 200m - 25t$;*

(8) *$|\Omega| = 40(3m+1) - \alpha_4(g)$, $p = 3$, $m \leqslant 5$, $\alpha_4(g) = 24t$, $\alpha_1(g) = -480m + 600 + 120(e - n) + 144t$, $\alpha_2(g) = 600(n - m)$ и $\alpha_3(g) = 3360 - 480n + 960m - 120e - 144t$;*

(9) *$|\Omega| = 10l - \alpha_4(g)$, $p = 2$, $l \leqslant 120$, $\alpha_4(g) = (20l + 2m - 400 + 40n - 200e)/3$, $\alpha_1(g) = 4m$, $\alpha_2(g) = 400n - 50l$ и $\alpha_3(g) = 4000 - 400n + 40l - 4m$.*

Ввиду теоремы 2 и следствия 1 дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$ не является реберно симметричным.

Доказательства теорем опираются на метод Г. Хигмена.

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных G-инвариантных подпространств $W_0, \ldots, W_d$ матрицы смежности $A = A_1$ графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. [4, § 3.7]) для $g \in G$ получим $\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^{d} Q_{ij} \alpha_j(g)$, где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x, x^g) = j$.

1. Автоморфизмы графа с параметрами $(800, 204, 28, 60)$

Сначала приведем некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1.1 (см., например, [5, § 2]). *Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ) и неглавными собственными значениями r, s, $s < 0$. Если D — индуцированный регулярный подграф из Γ степени d на w вершинах, то $s \leqslant d - \dfrac{w(k-d)}{v-w} \leqslant r$, причем одно из равенств достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина из $\Gamma - D$ смежна точно с $w(k-d)/(v-w)$ вершинами из D.*

До конца раздела будем предполагать, что Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(800, 204, 28, 60)$ и спектром $204^1, 4^{714}, -36^{85}$. Пусть $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$.

Если Δ — индуцированный регулярный подграф из Γ степени d на w вершинах, то

$$d - 4 \leqslant \frac{w(204 - d)}{800 - w} \leqslant d + 36.$$

Поэтому число вершин в коклике не больше 120, а в клике не больше 6.

Лемма 1.2. *Пусть* χ_2 *— характер, полученный при проектировании* $\psi(G)$ *на подпространство размерности* 85. *Тогда* $\chi_2(g) = (4\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/40 + 5$ *и* $\chi_2(g) - 85$ *делится на* p.

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 714 & 14 & -6 \\ 85 & -15 & 5 \end{pmatrix},$$

и значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности 85 равно $\chi_2(g) = (17\alpha_0(g) - 3\alpha_1(g) + \alpha_2(g))/160$. Подставляя в эту формулу значение $\alpha_2(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим $\chi_2(g) = (4\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/40 + 5$.

Последнее утверждение леммы следует из [6, лемма 1].

Лемма доказана.

Лемма 1.3. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *если* Ω *— пустой граф, то либо* $p = 5$ *и* $\alpha_1(g) = 200l$, *либо* $p = 2$ *и* $\alpha_1(g) = 80m$;

(2) *если* Ω *является* n*-кликой, то либо* $n = 1$, $p = 17$ *и* $\alpha_1(g) = 204$, *либо* $n = 5$, $p = 5$ *и* $\alpha_1(g) = 200s + 20$, *либо* $n = 2$, $p = 7$ *и* $\alpha_1(g) = 280t + 168$;

(3) *если* Ω *является* l*-кокликой, то либо* $p = 3$, $l = 3m+2$, $m \leqslant 39$, $\alpha_1(g) = 120t+12m+48$, *либо* $p = 2$, $\alpha_1(g) = 80t + 4l$ *и* $l = 8, 10, \ldots, 120$;

(4) *если* Ω *содержит смежные вершины и не содержит геодезических* 2*-путей, то* Ω *является объединением* m *изолированных* 5*-клик,* $m \leqslant 5$, $\alpha_1(g) = 200s + 20m$;

(5) $[a]$ *не содержится в* Ω *для любой вершины* $a \in \Gamma$.

Доказательство. Пусть Ω — пустой граф. Так как $800 = 32 \cdot 25$, то $p = 2, 5$.

Пусть $p = 5$. По лемме 1.2 число $\chi_2(g) = -\alpha_1(g)/40$ делится на 5 и $\alpha_1(g) = 200l$. Пусть $p = 2$. Тогда число $\chi_2(g) = -\alpha_1(g)/40 + 5$ нечетно и $\alpha_1(g) = 80m$.

Пусть Ω является n-кликой. Если $n = 1$, то p делит 204 и 595, поэтому $p = 17$, $\chi_2(g) = (4 - \alpha_1(g))/40+5$ и $\alpha_1(g) = 204$. Если Ω содержит смежные вершины u, w, то p делит $|[u]-w^\perp| = 175$, 420 и $30 - n$, поэтому $p = 5$ и $n = 5$ или $p = 7$ и $n = 2$. В случае $p = 5$ число $\chi_2(g) = (20 - \alpha_1(g))/40 + 5$ делится на 5 и $\alpha_1(g) = 200s + 20$. В случае $p = 7$ имеем $\chi_2(g) = (8 - \alpha_1(g))/40 + 5$ и $\alpha_1(g) = 280t + 168$.

Пусть Ω является l-кокликой, $l \geqslant 2$. Тогда p делит 60, 144 и $452 - l$, поэтому либо $p = 3$, $l = 3m + 2$, $m \leqslant 39$, $\chi_2(g) = (12m + 8 - \alpha_1(g))/40 + 5$ и $\alpha_1(g) = 120t + 12m + 48$, либо $p = 2$, число $\chi_2(g) = (4l - \alpha_1(g))/40 + 5$ нечетно и $\alpha_1(g) = 80t + 4l$. Так как вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с четным числом вершин из Ω, то $l = 8, 10, \ldots, 120$ (иначе некоторая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с единственной вершиной из Ω).

Пусть Ω содержит смежные вершины и и не содержит геодезических 2-путей. Тогда p делит 60 и 175, поэтому $p = 5$, Ω является объединением m изолированных 5-клик. Ввиду леммы 1.1 имеем $m \leqslant 5$. Далее, $\chi_2(g) = (20m - \alpha_1(g))/40 + 5$ делится на 5 и $\alpha_1(g) = 200s + 20m$.

Пусть $[a] \subset \Omega$. Тогда любая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с 60 вершинами из Ω, поэтому $a^\perp = \Omega$, $\alpha_0(g) = 205$ и $\alpha_1(g) = 0$. Теперь $\chi_2(g) = 820/40 + 5$, противоречие. Лемма доказана.

Ввиду леммы 1.3 можно считать, что Ω содержит геодезический 2-путь и ввиду предложения 1 имеем $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 17\}$.

Лемма 1.4. *Пусть* Ω *содержит геодезический* 2*-путь* b, a, c. *Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) $p = 3$, Ω *является объединением* $3m + 1$ *полных многодольных графов* $K_{4\times 2}$, $m \leqslant 5$ *и* $\alpha_1(g) = 96m + 120t + 72$;

(2) $p = 2$, $|\Omega| \leqslant 240$, $\lambda_\Omega = 0, 2, \ldots, 26$, *и степени вершин в* Ω *равны* $0, 2, \ldots, 34$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Ω содержит геодезический 2-путь b, a, c. Если $p = 17$, то по предложению 1 граф Ω является одновершинным, противоречие с предположением.

Если $p = 5, 7$, то по предложению 1 граф Ω является объединением изолированных клик, противоречие с предположением.

Если $p = 3$, то согласно предложению 1 граф Ω является объединением $3m+1$ изолированных подграфов $K_{4\times 2}$. Ввиду леммы 1.1 имеем $m \leqslant 5$. Далее, $\chi_2(g) = (32(3m+1) - \alpha_1(g))/40 + 5$ и $\alpha_1(g) = 96m + 120t + 72$.

Если $p = 2$, то $|\Omega| = 2l \leqslant 240$, $\lambda_\Omega = 0, 2, \ldots, 26$, и степени вершин в Ω равны $0, 2, \ldots, 34$. Далее, число $\chi_2(g) = (8l - \alpha_1(g))/40 + 5$ нечетно и $\alpha_1(g) = 80t + 8l$.

Лемма и теорема 1 доказаны.

2. Сильно регулярный граф с параметрами (800,204,28,60) не является реберно симметричным

Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами (800,204,28,60), группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ, $|G|$ делится на 17, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $|G : G_a| = 800$ и по теореме 1 $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 17\}$.

Лемма 2.1. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *если f — элемент из G порядка 17, g — элемент из $C_G(f)$ порядка $p < 17$, то либо Ω является l-кокликой, $p = 3$, $l = 35, 86$ или $p = 2$, $l = 18, 52, 86$, либо $p = 2$, $|\Omega| = 52, 86, 120, 154, 188, 222$ и $|\Omega(a)| = 34$;*

(2) $S(G) = O_2(G)$;

(3) *цоколь $\bar{T}$ группы $\bar{G} = G/O_2(G)$ изоморен $L_2(16)$, $L_2(17)$, $Sp_4(4)$, $\Omega_8^-(2)$, $L_4(4)$, $Sp_8(2)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть f — элемент из G порядка 17, g — элемент из $C_G(f)$ порядка $p < 17$. Тогда $\mathrm{Fix}(f) = \{a\}$ — одновершинный граф. Из действия f на Ω следует, что $|\Omega| - 1$ делится на 17. Ввиду теоремы 1 либо Ω является l-кокликой, $p = 3$, $l = 35, 86$ или $p = 2$, $l = 18, 52, 86$, либо Ω содержит геодезический 2-путь, $p = 2$, $|\Omega| = 52, 86, 120, 154, 188, 222$ и $|\Omega(a)| = 34$.

Так как $v = 800$, то $S(G)$ является $\{2, 5\}$-группой. Пусть P — силовская 5-подгруппа из $S(G)$. Тогда $|P : P_a|$ делит 25. По лемме 8 из [3] имеем $S(G_a) = O_2(G_a)$, поэтому $|P_a| = 1$. Из действия элемента порядка 17 группы G на P следует, что $|P| = 1$.

Ввиду [7, табл. 1] цоколь $\bar{T}$ группы $\bar{G} = G/O_2(G)$ изоморен $L_2(16)$, $L_2(17)$, $Sp_4(4)$, $\Omega_8^-(2)$, $L_4(4)$, $Sp_8(2)$.

Лемма доказана.

Так как $\bar{T}$ не содержит собственных подгрупп индекса, делящегося на 25 и делящего 800, то имеем противоречие, доказывающее следствие 1.

3. Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$ и спектром $204^1, 34^{480}, 4^{714}, -6^{2720}, -36^{85}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$.

Лемма 3.1. *Пусть χ_1 — характер, полученный при проектировании $\psi(G)$ на подпространство размерности 480, и χ_4 — характер, полученный при проектировании $\psi(G)$ на подпространство размерности 85. Тогда $\chi_1(g) = (24\alpha_0(g) + 4\alpha_1(g) - \alpha_3(g) - 6\alpha_4(g))/200$ и $\chi_4(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_2(g) + 5\alpha_4(g))/200 - 15$. Далее, $\chi_1(g) - 210$, и $\chi_4(g) - 85$ делятся на p.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 480 & 80 & 0 & -20 & -120 \\ 714 & 14 & -6 & 14 & 714 \\ 2720 & -80 & 0 & 20 & -680 \\ 85 & -15 & 5 & -15 & 85 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_1(g) = (24\alpha_0(g) + 4\alpha_1(g) - \alpha_3(g) - 6\alpha_4(g))/200$.

Аналогично $\chi_4(g) = (17\alpha_0(g) - 3\alpha_1(g) + \alpha_2(g) - 3\alpha_3(g) + 17\alpha_4(g))/800$. Подставляя в эту формулу значение $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_2(g) - \alpha_4(g)$, получим $\chi_4(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_2(g) + 5\alpha_4(g))/200 - 15$.

Последнее утверждение леммы следует из [6, лемма 1].

Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Если g индуцирует тривиальный автоморфизм антиподального частного $\bar{\Gamma}$, то $p = 5$ и $\alpha_4(g) = v$. Более того, порядок подгруппы из G, индуцирующей тривиальные автоморфизмы $\bar{\Gamma}$, делит 5.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию $\alpha_i(g)$ не равно 0, быть может, только для $i = 0, 4$. Если $u = u^g$, то $[u]$ состоит из неподвижных относительно g вершин. Поэтому g оставляет неподвижной каждую вершину из Γ, противоречие. Значит, $\alpha_4(g) = v$. Так как $r = 5$, то порядок подгруппы из G, индуцирующей тривиальные автоморфизмы $\bar{\Gamma}$, делит 5.

Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Если g индуцирует нетривиальный автоморфизм графа $\bar{\Gamma}$, то выполняется одно из утверждений*:

(1) Ω — *пустой граф*, $p = 5$, $\alpha_4(g) = 0$, $\alpha_2(g) = 1000m$, $\alpha_1(g) = 200n + 800 - 200m$, $\alpha_3(g) = -200n + 3200 - 800m$ *или* $p = 2$, $\alpha_4(g) = 0$, $\alpha_2(g) = 400m$, $\alpha_1(g) = 80n + 800 - 80m$, $\alpha_3(g) = 3200 - 80n - 320m$;

(2) Ω — *антиподальный класс*, $p = 17$, $\alpha_1(g) = 340 + 680e$, $\alpha_2(g) = 2975$, $\alpha_3(g) = 680(1 - e)$;

(3) Ω — *объединение двух антиподальных классов, содержащее ребро*, $p = 7$, $\alpha_2(g) = 350l$, $\alpha_1(g) = 280m + 910 - 70l$, $\alpha_3(g) = 3080 - 280l - 280n$, $l = 1, 5, 9$;

(4) $|\Omega| = 25$, $p = 5$, $\alpha_4(g) = 0$, $\alpha_2(g) = 1000l - 125$, $\alpha_1(g) = 200n + 700$, $\alpha_3(g) = 3400 - 1000l - 200n$;

(5) Ω — *коклика, либо* $p = 3$, $|\Omega| = 5(3m + 2) - \alpha_4(g)$, $m \leqslant 39$, $\alpha_4(g) = 60m + 120n - 120e - 720 + 6l$, $\alpha_1(g) = 6l$, $\alpha_2(g) = 600n - 75m + 150$ *и* $\alpha_3(g) = 3840 + 60m - 600n - 6l$, *либо* $p = 2$, $|\Omega| = 10l - \alpha_4(g)$, $\alpha_4(g) = (20l - 400 + 40(n - e) - 2m)/3$, $\alpha_1(g) = 4m$, $\alpha_2(g) = 400n - 50l$ *и* $\alpha_3(g) = 4000 + 40l - 400n - 4m$;

(6) $|\Omega| = 25m - \alpha_4(g)$, $p = 5$, $m \leqslant 5$, $\alpha_4(g) = 25t$, $\alpha_1(g) = -100m + 800 + 200(e - n) + 25t$, $\alpha_2(g) = 1000n - 125m$ *и* $\alpha_3(g) = 3200 - 800n - 200e + 200m - 25t$;

(7) $|\Omega| = 40(3m+1) - \alpha_4(g)$, $p = 3$, $m \leqslant 5$, $\alpha_4(g) = 24t$, $\alpha_1(g) = -480m + 600 + 120(e - n) + 144t$, $\alpha_2(g) = 600(n - m)$ *и* $\alpha_3(g) = 3360 - 480n + 960m - 120e - 144t$;

(8) $|\Omega| = 10l - \alpha_4(g)$, $p = 2$, $l \leqslant 120$, $\alpha_4(g) = (20l + 2m - 400 + 40n - 200e)/3$, $\alpha_1(g) = 4m$, $\alpha_2(g) = 400n - 50l$ *и* $\alpha_3(g) = 4000 - 400n + 40l - 4m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что $\bar{\Omega}$ — один из графов в заключении теоремы 1.

Если $\bar{\Omega}$ — пустой граф, то и Ω — пустой граф. В случае $p = 5$ имеем $\alpha_4(g) = 0$, по лемме 3.1 число $\chi_4(g) = \alpha_2(g)/200 - 15$ делится на 5, поэтому $\alpha_2(g) = 1000m$. Далее, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 4000 - 1000m$, число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 800 + 200m)/40$ делится на 5, поэтому $\alpha_1(g) = 200n + 800 - 200m$, $\alpha_3(g) = -200n + 3200 - 800m$.

В случае $p = 2$ имеем $\alpha_4(g) = 0$, число $\chi_4(g) = \alpha_2(g)/200 - 15$ нечетно, поэтому $\alpha_2(g) = 400m$. Далее, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 4000 - 400m$, число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 800 + 80m)/40$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 80n + 800 - 80m$, $\alpha_3(g) = 3200 - 80n - 320m$.

Пусть $\bar{\Omega}$ является n-кликой. Если $p = 17$, то $\alpha_4(g) = 0$, $\chi_1(g) = (120 + 4\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/200$, $\chi_4(g) = (25+\alpha_2(g))/200-15$, поэтому $\alpha_2(g) = 25\cdot 17l$ и $17l+1$ делится на 8. С другой стороны, ввиду теоремы 1 имеем $\alpha_2(g)/5 = 595$, поэтому $l = 7$. Теперь $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 85 \cdot 12 = 1020$ и $4\alpha_1(g) - \alpha_3(g) = 200m - 120$ делится на 17. Отсюда $m = 17e + 4$, $\alpha_1(g) = 680e + 340$, $\alpha_3(g) = 680 - 680e$.

Если $p = 7$, то $\alpha_4(g) = 0$, $\chi_1(g) = (240 + 4\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/200$, $\chi_4(g) = (50 + \alpha_2(g))/200 - 15$, поэтому $\alpha_2(g) = 50 \cdot 7l$ и $7l + 1$ делится на 4. С другой стороны, ввиду теоремы 1 имеем $\alpha_2(g)/5 = 630 - 280t = 70l$ и $l = 9 - 4t = 1, 5, 9$. Теперь $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 70(57 - 5l)$ $\chi_1(g) = (48+\alpha_1(g)-14(57-5l)/40$ и $\alpha_1(g) = 280m+112+14(57-5l)$. Отсюда $\alpha_1(g) = 280m+910-70l$, $\alpha_3(g) = 3080 - 280l - 280n$.

Если $p = 5$, то $|\Omega| = 25 - \alpha_4(g)$. Заметим, что либо $\alpha_4(g) = 0$, либо $|\Omega| = 0$. Теперь число $\chi_4(g) = (125 + \alpha_2(g))/200 - 15$ делится на 5, поэтому $\alpha_2(g) = 1000l - 125$. С другой стороны, ввиду теоремы 1 имеем $\alpha_2(g)/5 = 775 - 200s = 200l - 25$ и $s + l = 4$. Теперь $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 4100 - 1000l$, число $\chi_1(g) = (24 \cdot 25 + 5\alpha_1(g) - 4100 + 1000l)/200$ делится на 5, поэтому $-700 + \alpha_1(g) = 200n$, $\alpha_1(g) = 200n + 700$, $\alpha_3(g) = 3400 - 1000l - 200n$.

Если $\bar{\Omega}$ — коклика, то и Ω — коклика. Пусть $p = 3$, $|\Omega| = 5(3m + 2) - \alpha_4(g)$. Тогда число $\chi_4(g) = (25(3m+2)+\alpha_2(g))/200-15$ сравнимо с 1 по модулю 3, поэтому $\alpha_2(g) = 600n-75m+150$. Далее, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 3840 + 60m - 600n$, число $\chi_1(g) = (24(5(3m + 2) - \alpha_4(g)) + 4\alpha_1(g) - \alpha_3(g)-6\alpha_4(g))/200$ делится на 3, поэтому $60m-6\alpha_4(g))+\alpha_1(g)-720+120n = 120e$, $\alpha_1(g) = 6l$, $\alpha_4(g) = 60m + 120n - 120e - 720 + 6l$ и $\alpha_3(g) = 3840 + 60m - 600n - 6l$.

Пусть $p = 2$, $|\Omega| = 10l - \alpha_4(g)$. Тогда число $\chi_4(g) = (50l + \alpha_2(g))/200 - 15$ нечетно, поэтому $\alpha_2(g) = 400n - 50l$. Далее, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 4000 + 40l - 400n$, число $\chi_1(g) = (240l - 30\alpha_4(g) + 5\alpha_1(g) - (4000 + 40l - 400n))/200$ четно, поэтому $40l - 6\alpha_4(g)) + \alpha_1(g) - 800 + 80n = 80e$, $\alpha_1(g) = 4m$, $\alpha_4(g) = (20l - 400 + 40(n - e) - 2m)/3$ и $\alpha_3(g) = 4000 + 40l - 400n - 4m$.

Пусть $\bar{\Omega}$ является объединением m изолированных 5-клик, $p = 5$, $2 \leqslant m \leqslant 5$, Тогда $|\Omega| = 25m - \alpha_4(g)$, причем $\alpha_4(g) = 25t$. Далее, число $\chi_4(g) = (125m + \alpha_2(g))/200 - 15$ делится на 5, поэтому $\alpha_2(g) = 1000n - 125m$. Теперь $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 4000 - 1000n + 100m$, число $\chi_1(g) = (120m + \alpha_1(g) - (800 - 200n + 20m) - 25t)/40$ делится на 5. Отсюда $\alpha_1(g) = -100m + 800 + 200(e - n) + 25t$ и $\alpha_3(g) = 3200 - 800n - 200e + 200m - 25t$.

Пусть $p = 3$, $\bar{\Omega}$ — объединение $3m+1$ изолированных $K_{4\times 2}$-подграфов. Тогда $|\Omega| = 40(3m+1) - \alpha_4(g)$, причем $\alpha_4(g) = 24t$. Далее, число $\chi_4(g) = (200(3m + 1) + \alpha_2(g))/200 - 15$ сравнимо с 1 по модулю 3, поэтому $\alpha_2(g) = 600(n - m)$. Теперь $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 3960 - 600n + 480m$, число $\chi_1(g) = (192(3m + 1) + \alpha_1(g) - (792 - 120n + 96m) - 144t)/40$ делится на 3. Отсюда $\alpha_1(g) = -480m + 600 + 120(e - n) + 144t$ и $\alpha_3(g) = 3360 - 480n + 960m - 120e - 144t$.

Пусть $p = 2$, $|\Omega| = 10l-\alpha_4(g)$ и $l \leqslant 120$. Тогда число $\chi_4(g) = (50l+\alpha_2(g))/200-15$, нечетно, поэтому $\alpha_2(g) = 400n - 50l$. Далее, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 4000 - 400n + 40l$, число $\chi_1(g) = (240l + 5\alpha_1(g)-(4000-400n+40l)-30\alpha_4(g))/200$ четно. Отсюда $40l+\alpha_1(g)-800+80n-6\alpha_4(g) = 400e$, $\alpha_1(g) = 4m$ и $\alpha_4(g) = (20l + 2m - 400 + 40n - 200e)/3$. Наконец, $\alpha_3(g) = 4000 - 400n + 40l - 4m$. Лемма доказана.

Из лемм 3.2, 3.3 следует терема 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin etc: Springer-Verlag, 1989. 495 p.
2. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** О сильно регулярных графах с собственным значением μ и их расширениях // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, №3. С. 207–214.
3. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** Об автоморфизмах сильно регулярных графов с параметрами (204,28,2,4) и (595,144,18,40) // Дискретная математика, алгебра и их приложения : тез. докл. Междунар. науч. конф. (Минск, 14–18 сентября 2015 г.). Минск, 2015. С. 119–120.
4. **Cameron P.J.** Permutation groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. 220 p. (London Math. Soc. Student Texts № 45.)

5. **Brouwer A.E., Haemers W.H.** The Gewirtz graph: an exercise in the theory of graph spectra // Europ. J. Comb. 1993. Vol. 14. P. 397–407.
6. **Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.** Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ // Докл. АН. 2010. Т. 432, № 5. С. 512–515.
7. **Zavarnitsine A.V.** Finite simple groups with narrow prime spectrum // Sib. Elektron. Mat. Izv. 2009. Vol. 6. P. 1–12.

Махнев Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Поступила 27.08.2015

Нирова Марина Сефовна
д-р физ.-мат. наук
доцент
Кабардино-Балкарский госуниверситет,
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

Падучих Дмитрий Викторович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: dpaduchikh@gmail.com