ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 1 2016

УДК 517.956

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ПЕРЕГИБА ГРАНИЦЫ[1]

Е. Ф. Леликова

В работе исследуется асимптотическое поведение решения первой краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка в случае, когда малый параметр входит множителем только при одной из старших производных, а предельное уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением. Хотя порядок предельного уравнения тот же самый, что и у исходного уравнения, рассматриваемая задача является бисингулярной. В работе асимптотическое поведение решения этой задачи исследуется методом согласования асимптотических разложений.

E. F. Lelikova. On the asymptotics of a solution to an equation with a small parameter in a neighborhood of a point of inflexion.

We study the asymptotic behavior of the first boundary value problem for a second-order elliptic equation in the case where the small parameter is a factor at only one of the highest derivatives and the limit equation is an ordinary differential equation. Although the limit equation has the same order as the original equation, the problem under consideration is bisingular. We investigate the asymptotic behavior of this problem using the method of matched asymptotic expansions.

Введение

Исследуется поведение при $\varepsilon \to 0$ решения первой краевой задачи:

$$\begin{gathered} \mathrm{L}_\varepsilon u = \varepsilon u_{xx} + u_{yy} + b(x,y)u_y + a(x,y)u = f(x,y), \quad (x,y) \in D \in \mathbb{R}^2, \\ u(x,y) = h(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma, \end{gathered} \tag{0.1}$$

в ограниченной области D с границей Γ, которая имеет точку перегиба. Предполагается, что параметр $\varepsilon > 0$, коэффициенты и правая часть уравнения (0.1) — достаточно гладкие функции. Предполагается также, что существует ограниченное решение задачи (0.1), которое обозначается через $u_\varepsilon(x,y)$, и для этого решения справедлива оценка

$$|u_\varepsilon(x,y)| \leqslant M \left(\max_{(x,y)\in D} |f(x,y)| + \max_{(x,y)\in\Gamma} |h(x,y)| \right), \tag{0.2}$$

где постоянная M не зависит от ε. (Это условие выполнено, например, при $a(x,y) \leqslant \alpha < 0$.)

Сингулярные краевые задачи с малым параметром при старших производных изучались очень давно. При этом обычно порядок предельного уравнения был меньше порядка допредельного уравнения. Такие задачи подробно изучены в статьях [1; 2] и в монографиях [3–5].

Здесь рассматривается менее изученный случай, в котором малый параметр входит множителем только при одной из старших производных, так что порядок предельного уравнения тот же самый, как и исходного уравнения. Тем не менее исследуемая задача является сингулярно возмущенной. Коэффициенты стандартного внешнего разложения имеют особенности в точках некоторых "особых" подмножеств области D, и порядки этих особенностей растут вместе с

[1]Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ (проект 14-01-00322) и Программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

номером приближения. Задачи такого рода весьма сложны; в [5] они называются бисингулярными. Асимптотика решения имеет различный вид в разных подобластях рассматриваемой области. Одним из таких “особых"подмножеств является лежащий в области D отрезок прямой параллельной оси y, проходящей через точку перегиба границы Г.

Методом согласования асимптотических разложений [4; 5] строится асимптотическое разложение решения $u_\varepsilon(x, y)$ в окрестности описанного выше “особого” подмножества. Другие случаи, при которых порядок уравнения сохраняется, но асимптотика имеет бисингулярный характер, исследованы в [6; 7] (две независимые переменные), [8; 9] (три независимые переменные). Краткое изложение результатов данной статьи приведено в работе [10].

Метод согласования состоит из двух частей, не ависимых, вообще говоря, друг от друга. В первой части строятся формальные асимптотические решения (ФАР) исходной задачи в различных подобластях рассматриваемой области изменения независимых переменных, т. е. строятся согласованные между собой асимптотические ряды по некоторым последовательностям функций параметра ε, частичные суммы которых с достаточно высокой степенью точности (по ε) удовлетворяют исходному уравнению и граничному условию в этих подобластях. Далее из частичных сумм этих ФАР строится составное разложение, являющееся ФАР исходной задачи уже всюду в рассматриваемой области изменения переменных. Во второй части метода согласования проводится обоснование построенного разложения, т. е. доказательство того, что построенное ФАР является асимптотическим представлением решения $u_\varepsilon(x, y)$ при $\varepsilon \to 0$. Для задач, аналогичных рассматриваемой, в которых для обратного оператора исходной задачи справедлива соответствующая оценка (например, оценка (0.2)), обоснование построенного ФАР не вызывает трудностей и достаточно подробно описано в работе [5]. Поэтому основным содержанием данной работы является построение ФАР в окрестностях рассматриваемого особого множества.

Будем считать, что точка перегиба границы совпадает с началом координат, а граница Г области D в некоторой фиксированной окрестности начала координат

$$D_\delta = \{(x, y) \in D,\ \ -\delta \leqslant x \leqslant \delta,\ \ \delta > 0\}$$

совпадает с кривой $x = y^3$ и гладкой кривой $y = \gamma(x)$, лежащей в верхней полуплоскости. Кроме того, будем считать, что при $-\delta \leqslant x \leqslant \delta$ кривые $x = y^3$ и $y = \gamma(x)$ не пересекаются, т. е. $\gamma(x) > x^{1/3}$. Таким образом, $D_\delta = \{(x, y) \in D,\ \ -\delta \leqslant x \leqslant \delta,\ \ x^{1/3} < y < \gamma(x)\}$. Не ограничивая общности, будем предполагать, что граничная функция $h(x, y) \equiv 0$.

В данной работе строится асимптотическое разложение решения задачи (0.1) только в области D_δ. Для того чтобы построить асимптотическое разложение решения всюду в области D, надо воспользоваться проведенными ранее исследованиями поведения этого решения в окрестностях других возможных “особых” подмножеств (см. [6; 11] — внешнее касание границы, [7] — угловые точки на границе).

1. Внешнее разложение и его особенности

Внешнее разложение решения $u_\varepsilon(x, y)$ будем строить в виде

$$U(x, y, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x, y). \tag{1.1}$$

Подставляя ряд (1.1) в уравнение (0.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим систему рекуррентных соотношений

$$\mathrm{L}_0 u_0 = f(x, y), \quad \mathrm{L}_0 u_k = -\frac{\partial^2 u_{k-1}}{\partial x^2}, \quad k \geqslant 1, \tag{1.2}$$

где $\mathrm{L}_0 = \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + b(x, y)\dfrac{\partial}{\partial y} + a(x, y)$.

Кроме того, асимптотический ряд (1.1) должен обращаться в нуль ($h(x,y) = 0$) на той части границы области D_δ, которая совпадает с границей Γ исходной области D, т. е.

$$u_k(x,\gamma(x)) = 0, \quad u_k(x,x^{1/3}) = 0. \tag{1.3}$$

Соотношения (1.2) — это обыкновенные дифференциальные уравнения по переменной y, т. е. для того чтобы получить решения этих уравнений, надо проинтегрировать их вдоль отрезков прямых, параллельных оси y и лежащих в области D_δ, задав соответствующим образом граничные условия в точках пересечения этих прямых с границей Γ области D. Предполагается, что для решений краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений вида (1.2) справедливы оценки, аналогичные оценке (0.2).

Очевидно, что в силу условий (1.3) функции $u_k(x,y)$ зависят от границ $y = \gamma(x)$, $y = x^{1/3}$. Поскольку правые части рекуррентных соотношений (1.2) являются производными по переменной x от "предыдущих" функций $u_{k-1}(x,y)$, функции $u_k(x,y)$ имеют особенности на прямой, проходящей через точку перегиба, т. е. на оси y.

Теорема 1. *При $x \to 0$, $x^{1/3} \leqslant y \leqslant \gamma(x)$ функции $u_k(x,y)$ разлагаются в асимптотические ряды*

$$u_0(x,y) = \sum_{j=0}^{\infty} x^{j/3} u_{0j}(y), \quad u_k(x,y) = x^{(1-6k)/3} \sum_{j=0}^{\infty} x^{j/3} u_{kj}(y), \quad k \geqslant 1. \tag{1.4}$$

Ряды (1.4) *допускают почленное дифференцирование любого порядка.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $u_0(x,y)$. Эта функция является решением обыкновенного дифференциального уравнения (1.2) по переменной y: $\mathrm{L}_0 u_0 = f(x,y)$. Будем искать ее асимптотическое представление при $x \to 0$ в виде ряда (1.4). Подставляя этот ряд в первое из уравнений (1.2), разлагая коэффициенты $b(x,y)$, $a(x,y)$ и правую часть $f(x,y)$ в ряды Тейлора в окрестности прямой $x = 0$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему рекуррентных соотношений для определения функций $u_{0j}(y)$:

$$\begin{cases} \mathrm{L}_0^{(0)} u_{00} = f(0,y), \quad \mathrm{L}_0^{(0)} u_{01} = 0, \quad \mathrm{L}_0^{(0)} u_{02} = 0, \\ \mathrm{L}_0^{(0)} u_{0,3j+k} = -\displaystyle\sum_{i=1}^{j} \frac{1}{i!} \left[\frac{\partial^i b}{\partial x^i}(0,y) \frac{du_{0,3(j-i)+k}}{dy} - \frac{\partial^i a}{\partial x^i}(0,y) u_{0,3(j-i)+k} \right], \quad k = 1,2, \quad j \geqslant 1. \end{cases} \tag{1.5}$$

Здесь обозначено $\mathrm{L}_0^{(0)} = \dfrac{d^2}{dy^2} + b(0,y)\dfrac{d}{dy} + a(0,y)$.

Функция $u_0(x,y)$ по построению удовлетворяет краевым условиям (1.3), т. е. обращается в нуль при $y = x^{1/3}$ и $y = \gamma(x)$. Потребуем, чтобы асимптотический ряд (1.4) при $x \to 0$ также удовлетворял этим условиям.

Рассмотрим сначала границу $y = x^{1/3}$:

$$0 = \sum_{i=0}^{\infty} x^{i/3} u_{0i}(x^{1/3}) = \sum_{i=0}^{\infty} x^{i/3} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{d^l u_{0i}}{dy^l}(0) \frac{x^{l/3}}{l!}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} x^{m/3} \left[\sum_{j=0}^{m} \frac{d^{m-j} u_{0j}}{dy^{m-j}}(0) \frac{1}{(m-j)!} \right] \equiv \sum_{i=0}^{\infty} x^{i/3} B_i^{(0)}.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при $x^{i/3}$, получаем $B_i^{(0)} = 0$ или, что то же самое,

$$\begin{cases} u_{00}(0) = 0, \quad u_{01}(0) = -\dfrac{du_{00}}{dy}(0), \dots, \\ u_{0i}(0) = -\left[\dfrac{du_{0,i-1}}{dy}(0) + \dfrac{1}{2!} \dfrac{d^2 u_{0,i-2}}{dy^2}(0) + \dots + \dfrac{1}{i!} \dfrac{d^i u_{0,0}}{dy^i}(0) \right], \quad i \geqslant 2. \end{cases} \tag{1.6}$$

Поступим аналогичным образом и на второй границе $y = \gamma(x)$, т. е. потребуем, чтобы ряд (1.4) при $x \to 0$ обращался в нуль на этой границе:

$$0 = \sum_{i=0}^{\infty} x^{i/3} u_{0i}(\gamma(x)) = \sum_{i=0}^{\infty} x^{i/3} u_{0i}\Big(\gamma(0) + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j x^j\Big) = \sum_{i=0}^{\infty} x^{i/3} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j x^j\Big)^l \equiv \sum_{i=0}^{\infty} x^{i/3} A_i^{(0)}.$$

Здесь γ_j — коэффициенты Тейлора в разложении функции $\gamma(x)$ в окрестности начала координат. Приравнивая нулю коэффициенты при $x^{i/3}$ в получившемся соотношении, имеем $A_i^{(0)} = 0$ или, что то же самое,

$$\begin{cases} u_{00}(\gamma(0)) = 0, \quad u_{01}(\gamma(0)) = 0, \quad u_{02}(\gamma(0)) = 0, \quad u_{03}(\gamma(0)) = -\dfrac{du_{00}}{dy}(\gamma(0)), \\ u_{0q}(\gamma(0)) = \displaystyle\sum_{i=1}^{[i/3]} \alpha_i^{(q)} \frac{d^i u_{0,q-3i}}{dy^i}\big(\gamma(0)\big). \end{cases} \tag{1.7}$$

Здесь $\alpha_i^{(q)}$ — некоторые константы, рекуррентно зависящие от значений производных функции $\gamma(x)$ в точке $\gamma(0)$.

Итак, определим коэффициенты $u_{0j}(y)$ ряда (1.4) как решения уравнений (1.5) в области $0 < y < \gamma(0)$, удовлетворяющие краевым условиям (1.6), (1.7) при $y = 0$, $y = \gamma(0)$. Согласно предположению исходной задачи такие функции существуют и бесконечно дифференцируемы. Рассмотрим частичную сумму ряда (1.4): $S_N(x,y) = \sum_{j=0}^{3N} x^{j/3} u_{0j}(y)$, где N — достаточно большое натуральное число. По построению для разности $\sigma_N = u_0(x,y) - S_N(x,y)$ справедливы соотношения $\mathrm{L}_0 \sigma_N = O(x^{N+1/3})$, $x^{1/3} < y < \gamma(x)$, $\sigma_N(x,\gamma(x)) = O(x^{N+1/3})$, $\sigma_N(x, x^{1/3}) = O(x^{N+1/3})$. В силу оценки, аналогичной оценке (0.2), в области $x^{1/3} \leqslant y \leqslant \gamma(x)$ справедливо соотношение $u_0(x,y) - S_N(x,y) = O(x^{N+1/3})$, т. е. ряд (1.4), коэффициенты которого определены как решения задач (1.5)–(1.7), является асимптотическим разложением функции $u_0(x,y)$ при $x \to 0$. Можно доказать, что аналогичные оценки справедливы и для производных функции $\sigma_N(x,y)$. Для функции $u_0(x,y)$ утверждение теоремы доказано.

Для следующих функций $u_k(x,y)$, $k \geqslant 1$, справедливость асимптотического разложения (1.4) доказывается аналогично. При этом нетрудно проследить, что все следующие функции $u_k(x,y)$, $k \geqslant 1$, имеют особенности при $x \to 0$. Действительно, уже функция $u_1(x,y)$ имеет особенность порядка $x^{-5/3}$ при $x \to 0$, поскольку она является решением уравнения $\mathrm{L}_0 u_1 = -(u_0)_{xx}$, и согласно только что доказанному асимптотическое разложение при $x \to 0$ правой части этого уравнения начинается с члена, имеющего порядок $x^{-5/3}$. □

2. Внутреннее разложение в окрестности прямой $x = 0$

В окрестности оси $x = 0$ перейдем от переменной x к новой, внутренней, переменной $\zeta = x\varepsilon^{-1/2}$ и будем строить внутреннее асимптотическое разложение решения $u_\varepsilon(x,y)$ при $\varepsilon \to 0$ в виде

$$V(\zeta, y, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/6} v_k(\zeta, y). \tag{2.1}$$

Стандартным образом, т. е. переходя в исходном уравнении (0.1) к переменной ζ, разлагая коэффициенты $b(x,y)$, $a(x,y)$ и правую часть $f(x,y)$ в ряды Тейлора в окрестности прямой $x = 0$, заменяя в получившихся разложениях x на $\sqrt{\varepsilon}\zeta$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, приходим к системе рекуррентных соотношений

$$\begin{cases} \mathrm{L}_1 v_0 = f(0,y), \quad \mathrm{L}_1 v_1 = 0, \quad \mathrm{L}_1 v_2 = 0, \\ \mathrm{L}_1 v_{3j} = \dfrac{\zeta^j}{j!}\dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(0,y) - \displaystyle\sum_{i=1}^{j}\frac{\zeta^i}{i!}\Big[\frac{\partial^i b}{\partial x^i}(0,y)\frac{\partial v_{3j-3i}}{\partial y} + \frac{\partial^i a}{\partial x^i}(0,y)v_{3j-3i}\Big], \quad j \geqslant 1, \\ \mathrm{L}_1 v_{3j+m} = -\displaystyle\sum_{i=1}^{j}\frac{\zeta^i}{i!}\Big[\frac{\partial^i b}{\partial x^i}(0,y)\frac{\partial v_{3j+m-3i}}{\partial y} + \frac{\partial^i a}{\partial x^i}(0,y)v_{3j+m-3i}\Big], \quad m=1,2, \quad j \geqslant 1, \end{cases} \tag{2.2}$$

где обозначено $\mathrm{L}_1 = \Delta_{\zeta,y} + b(0,y)\dfrac{\partial}{\partial y} + a(0,y)$.

В переменных ζ, y уравнение нижней границы $y = x^{1/3}$ принимает вид $y = \varepsilon^{1/6}\zeta^{1/3}$, а уравнение верхней границы $y = \gamma(x)$ — $y = \gamma(0) + \sum_{i=1}^{\infty}\gamma_j\varepsilon^{i/2}\zeta^i$, и, таким образом, при $\varepsilon \to 0$ окрестность прямой $x = 0$ в переменных ζ, y переходит в бесконечную полосу

$$\Omega_0 = \{\zeta, y : 0 < y < \gamma(0)\}.$$

Потребовав, чтобы асимптотический ряд (2.1) формально удовлетворял граничному условию исходной задачи на кривой $y = \varepsilon^{1/6}\zeta^{1/3}$, имеем

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k/6}v_k(\zeta, \varepsilon^{1/6}\zeta^{1/3}) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k/6}\Big[\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\varepsilon^{i/6}\frac{\partial^i v_k}{\partial y^i}(\zeta,0)\varepsilon^{i/6}\zeta^{i/3}\Big].$$

Приравнивая нулю коэффициенты при степенях ε, получаем граничные условия на оси ζ:

$$v_0(\zeta,0) = 0, \quad v_1(\zeta,0) = -\frac{\partial v_0}{\partial y}(\zeta,0)\zeta^{1/3}, \quad v_k(\zeta,0) = -\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{l!}\frac{\partial^l v_{k-l}}{\partial y^l}(\zeta,0)\zeta^{1/3}. \tag{2.3}$$

Далее, потребовав, чтобы асимптотический ряд (2.1) формально удовлетворял граничному условию исходной задачи на границе $y = \gamma(x)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k/6}v_k(\zeta, \gamma(x)) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k/6}v_k\Big(\zeta, \gamma(0) + \sum_{i=1}^{\infty}\gamma_i\varepsilon^{i/2}\zeta^i\Big) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k/6}\Big(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\frac{\partial^m v_k}{\partial y^m}(\zeta,\gamma(0))\Big[\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\zeta^{i/2}\gamma_i\Big]^m\Big), \end{aligned}$$

получим граничные условия для коэффициентов $v_k(\zeta,y)$ на прямой $y = \gamma(0)$:

$$v_k(\zeta, \gamma(0)) = S_k(\zeta), \tag{2.4}$$

где граничная функция $S_k(\zeta)$ — полином от ζ степени $[k/3]$.

Итак, необходимо построить функции $v_k(\zeta,y)$ — решения эллиптических уравнений (2.2) в полосе Ω_0, удовлетворяющие на границах этой полосы условиям (2.3), (2.4).

Очевидно, что функция $v_0(\zeta,y)$ бесконечно дифференцируема. Граничная же функция для решения $v_1(\zeta,y)$ согласно соотношению (2.3) имеет вид $v_1(\zeta,0) = \phi(\zeta)\zeta^{1/3}$ и не является гладкой, ее производные становятся неограниченными в окрестности начала координат. Решение $v_2(\zeta,y)$ становится неограниченным в начале координат. Все следующие функции $v_k(\zeta,y)$ также имеют особенности в начале координат, причем нетрудно проследить, что с увеличением номера k порядок особенностей функций $v_k(\zeta,y)$ растет. Следовательно, асимптотическое разложение (2.1) становится непригодным в окрестности начала координат и там необходимо строить другое асимптотическое разложение. Кроме того, так же, как в аналогичных задачах (см. например, [5]), в классе неограниченных функций решения задач (2.2), (2.3), (2.4) определяются неединственным образом, и поэтому асимптотическое разложение (2.1) может быть построено только после исследования асимптотического поведения решения $u_\varepsilon(x,y)$ в окрестности начала координат.

3. Внутреннее асимптотическое разложение в окрестности начала координат

В окрестности начала координат перейдем от переменных x, y к новым внутренним переменным $\xi = x\varepsilon^{-3/4}$, $\eta = y\varepsilon^{-1/4}$ и будем строить еще одно внутреннее асимптотическое разложение решения $u_\varepsilon(x,y)$ при $\varepsilon \to 0$ в виде

$$W(\xi,\eta,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k/4} \sum_{j=0}^{k-1} (\ln\varepsilon)^j w_{kj}(\xi,\eta). \tag{3.1}$$

Заменяя коэффициенты $b(x,y)$, $a(x,y)$ и правую часть $f(x,y)$ рядами Тейлора в окрестности начала координат и переходя в этих представлениях от переменных x, y к внутренним переменным ξ, η, придем к представлениям

$$b(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k/4} B_k(\xi,\eta), \quad a(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k/4} A_k(\xi,\eta), \quad f(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k/4} F_k(\xi,\eta),$$

где $B_k(\xi,\eta)$, $A_k(\xi,\eta)$, $F_k(\xi,\eta)$ — полиномы вида $\sum_{j=0}^{[k/3]} \beta_j^{(k)} \eta^{k-3j}\xi^j$.

Стандартным образом, т. е. переходя в исходном уравнении (0.1) к внутренним переменным ξ, η, заменяя коэффициенты $b(x,y)$, $a(x,y)$ и правую часть $f(x,y)$ выписанными выше разложениями в окрестности начала координат и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим, что коэффициенты внутреннего разложения (3.1) должны удовлетворять в области Ω_1 системе рекуррентных соотношений

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta w_{1,0} = 0, \quad \Delta w_{2,0} = F_0 - B_0 \frac{\partial w_{1,0}}{\partial\eta}, \\ &\Delta w_{k,0} = F_{k-2} - \sum_{j=0}^{k-2} B_j \frac{\partial w_{k-1-j,0}}{\partial\eta} - \sum_{j=0}^{k-3} A_j w_{k-2-j,0}, \quad k \geqslant 3, \\ &\Delta w_{2m+1,m} = 0, \quad \Delta w_{2m+2,m} = -B_0 \frac{\partial w_{2m+1,m}}{\partial\eta}, \quad m > 0, \\ &\Delta w_{2m+s,m} = -\sum_{j=0}^{s-2} B_j \frac{\partial w_{2m+s-1-j,m}}{\partial\eta} - \sum_{j=0}^{s-3} A_j w_{2m+s-2-j,m}, \quad m > 0, \quad s \geqslant 3. \end{aligned}\right. \tag{3.2}$$

Кривая $y = x^{1/3}$ в новых переменных примет вид $\eta = \xi^{1/3}$, а область D_δ в окрестности начала координат перейдет в неограниченную область $\Omega_1 = \{\xi,\eta : \xi \in \mathbb{R}^1,\ \eta > \xi^{1/3}\}$.

Поскольку в предположениях задачи граничная функция $h(x,y) \equiv 0$, для функций $w_{k,j}$ при всех k,j на границе области Ω_1 должны быть выполнены соотношения

$$w_{k,j}(\xi,\xi^{1/3}) = 0. \tag{3.3}$$

Соотношениями (3.2), (3.3) функции $w_k(\xi,\eta)$ — решения задач в неограниченной области Ω_1, вообще говоря, не определяются однозначно. Необходимо задать еще некоторые дополнительные условия для этих функций при $\xi^2+\eta^2 \to \infty$, которые должны быть получены из условий согласования асимптотических разложений (1.1) и (3.1). Построение функций $w_k(\xi,\eta)$ и $v_k(\zeta,y)$ проводится одновременно. Эта ситуация типична для сингулярно возмущенных задач (см. [4; 5]).

4. Вспомогательные построения

Пусть r, θ — полярные координаты на плоскости ζ, y. Для целых k будем рассматривать функции

$$U_{k,0}^{(1)}(\zeta,y) = r^{k/3}\sin\frac{k\theta}{3}, \quad U_{k,0}^{(2)}(\zeta,y) = r^{k/3}\cos\frac{k\theta}{3}. \tag{4.1}$$

При $k = 3n$, $n \geqslant 0$, функции $U^{(j)}_{k,0}$ — это гармонические полиномы. Будем в дальнейшем использовать для них обозначения $P^{(j)}_n(\zeta, y)$, т. е.

$$P^{(1)}_n(\zeta, y) = U^{(1)}_{3n,0}(\zeta, y), \quad P^{(2)}_n(\zeta, y) = U^{(2)}_{3n,0}(\zeta, y), \quad n \geqslant 0.$$

Функции $U^{(j)}_k(\zeta, y)$ — сопряженные гармонические функции в плоскости (ζ, y) с разрезом вдоль положительной полуоси ζ:

$$\frac{\partial U^{(2)}_{k,0}}{\partial \zeta} = \frac{\partial U^{(1)}_{k,0}}{\partial y}, \quad \frac{\partial U^{(2)}_{k,0}}{\partial y} = -\frac{\partial U^{(1)}_{k,0}}{\partial \zeta}. \tag{4.2}$$

Из явных формул (4.1) легко получаются соотношения $\dfrac{\partial U^{(2)}_{k,0}}{\partial \zeta} = \dfrac{\partial U^{(1)}_{k,0}}{\partial y} = \dfrac{k}{3} U^{(2)}_{k-3,0}$, $-\dfrac{\partial U^{(2)}_{k,0}}{\partial y} = \dfrac{\partial U^{(1)}_{k,0}}{\partial \zeta} = \dfrac{k}{3} U^{(1)}_{k-3,0}$, а также соотношения

$$\begin{aligned} \zeta U^{(1)}_{k,0} &= \frac{1}{2} U^{(1)}_{k+3,0} + \frac{1}{2} r^2 U^{(1)}_{k-3,0}, \quad \zeta U^{(2)}_{k,0} = \frac{1}{2} U^{(2)}_{k+3,0} + \frac{1}{2} r^2 U^{(2)}_{k-3,0}, \\ y U^{(1)}_{k,0} &= \frac{1}{2} U^{(2)}_{k+3,0} + \frac{1}{2} r^2 U^{(2)}_{k-3,0}, \quad y U^{(2)}_{k,0} = \frac{1}{2} U^{(1)}_{k+3,0} - \frac{1}{2} r^2 U^{(1)}_{k-,03}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

которые в общем виде могут записаны следующим образом:

$$\zeta^m y^p U^{(j)}_k = \sum_{s=0}^{m+p} \alpha^{(m,p)}_s U^{(l_j)}_{k+3m+3p-6s,0} r^{2s}, \tag{4.4}$$

где $l_j = j$ при четном p, $l_j \neq j$ при нечетном p. При этом в случае, когда $U^{(j)}_k$ — гармонический полином, т. е. когда $k = 3n$, $n \geqslant 0$, те из коэффициентов $\alpha^{(m,p)}_s$ в соотношении (4.4), для которых $k + 3m + 3p - 6s < 0$, следует считать равными нулю.

Будем говорить, что функция $v(\zeta, y)$ вида $v(\zeta, y) = r^\alpha \Phi(\theta)$ имеет порядок α. Множество линейных комбинаций функций вида $v(\zeta, y) = \zeta^m y^p U^{(j)}_{k,0}$, где m, p — целые неотрицательные, будем обозначать через $\mathcal{W}^{(0)}$. Подмножество множества $\mathcal{W}^{(0)}$, все элементы которого имеют фиксированный порядок $s/3$, будем обозначать через $\mathcal{W}^{(0)}_s$. Поскольку $\zeta = U^{(2)}_{3,0}(\zeta, y)$, $y = U^{(1)}_{3,0}(\zeta, y)$, то в силу соотношений (4.4) любой многочлен $Q(\zeta, y) \in \mathcal{W}^{(0)}$, а любой однородный многочлен $Q_n(\zeta, y)$ степени n является элементом множества $\mathcal{W}^{(0)}_{3n}$.

Из соотношения (4.4) следует, что функция $v(\zeta, y)$, принадлежащая множеству $\mathcal{W}^{(0)}_q$, имеет вид $v(\zeta, y) = \sum_{m,k,j} \beta_{m,k,j} r^{2m} U^{(j)}_{k,0}$, где $m \geqslant 0$, $1 \leqslant j \leqslant 2$, $k + 6m = q$.

Далее, из соотношений (4.3), (4.4) следует, что если функция $v(\zeta, y) \in \mathcal{W}^{(0)}_q$, то $\dfrac{\partial v}{\partial \zeta} \in \mathcal{W}^{(0)}_{q-3}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} \in \mathcal{W}^{(0)}_{q-3}$, $\zeta^m y^p v(\zeta, y) \in \mathcal{W}^{(0)}_{q+3m+3p}$.

При $n \geqslant 1$ определим гармонические функции $U^{(j)}_{k,n}$ следующим образом:

$$U^{(j)}_{k,n} = \frac{\partial^n}{\partial k^n} U^{(j)}_{k,0}. \tag{4.5}$$

Воспользовавшись соотношениями (4.5), нетрудно получить рекуррентные соотношения для функций $U^{(j)}_{k,n}(\zeta, y)$ вида $U^{(1)}_{k,n} = (1/3)^k \big[\ln r \; U^{(1)}_{k,n-1} + \theta U^{(2)}_{k,n-1}\big]$, $U^{(2)}_{k,n} = (1/3)^k \big[\ln r \; U^{(2)}_{k,n-1} - \theta U^{(1)}_{k,n-1}\big]$.

Для этих функций справедливы соотношения, аналогичные соотношениям (4.2):

$$-\frac{\partial U^{(2)}_{k,n}}{\partial y}=\frac{\partial U^{(1)}_{k,n}}{\partial \zeta}=\frac{k}{3}U^{(1)}_{k-3,n}+nU^{(1)}_{k-3,n-1},\quad \frac{\partial U^{(2)}_{k,n}}{\partial \zeta}=\frac{\partial U^{(1)}_{k,n}}{\partial y}=\frac{k}{2}U^{(2)}_{k-3,n}+nU^{(2)}_{k-3,n-1},$$

и соотношения, аналогичные соотношениям (4.3):

$$\begin{aligned}\zeta U^{(1)}_{k,n}&=\frac{1}{2}U^{(1)}_{k+3,n}+\frac{1}{2}r^2U^{(1)}_{k-3,n},\quad \zeta U^{(2)}_{k,n}=\frac{1}{2}U^{(2)}_{k+3,n}+\frac{1}{2}r^2U^{(2)}_{k-3,n},\\ yU^{(1)}_{k,n}&=\frac{1}{2}U^{(2)}_{k+3,n}+\frac{1}{2}r^2U^{(2)}_{k-3,n},\quad yU^{(2)}_{k,n}=\frac{1}{2}U^{(1)}_{k+3,n}-\frac{1}{2}r^2U^{(1)}_{k-3,n}.\end{aligned}\tag{4.6}$$

Выпишем явные формулы для нескольких “первых” функций $U^{(j)}_{k,n}$ при $n\geqslant 1$:

$$U^{(1)}_{0,0}\equiv 0,\quad U^{(2)}_{0,0}\equiv 1,\quad U^{(1)}_{0,1}=\theta,\quad U^{(2)}_{0,1}=\ln r,\quad U^{(1)}_{0,2}=2\theta\ln r,\quad U^{(2)}_{0,2}=\ln^2 r-\theta^2\ln r,$$

$$U^{(1)}_{0,3}=3\theta\ln^2 r-\theta^3,\quad U^{(2)}_{0,3}=\ln^3 r-3\theta^2\ln r.$$

При $k\neq 0$ имеем

$$U^{(1)}_{k,0}=r^{k/3}\sin\frac{k\theta}{3},\quad U^{(2)}_{k,0}=r^{k/3}\cos\frac{k\theta}{3};$$

$$U^{(1)}_{k,1}=\frac{1}{3}r^{k/3}\Big[\ln r\sin\frac{k\theta}{3}+\theta\cos\frac{k\theta}{3}\Big],\quad U^{(2)}_{k,1}=\frac{1}{3}r^{k/3}\Big[\ln r\cos\frac{k\theta}{3}-\theta\sin\frac{k\theta}{3}\Big].$$

Нетрудно выписать и общий вид решений $U^{(j)}_{k,n}$ для всех k, n. При $k\neq 0$

$$U^{(1)}_{k,n}=r^{k/3}\Big(\sin\frac{k\theta}{3}\sum_{s=0}^{[n/2]}\gamma_s^{(k,n)}(\ln r)^{n-2s}\theta^{2s}+\theta\cos\frac{k\theta}{3}\sum_{s=0}^{[(n-1)/2]}\omega_s^{(k,n)}(\ln r)^{n-1-2s}\theta^{2s}\Big),\tag{4.7}$$

$$U^{(2)}_{k,n}=r^{k/3}\Big(\cos\frac{k\theta}{3}\sum_{s=0}^{[n/2]}\gamma_s^{(k,n)}(\ln r)^{n-2s}\theta^{2s}+\theta\sin\frac{k\theta}{3}\sum_{s=0}^{[(n-1)/2]}\omega_s^{(k,n)}(\ln r)^{n-1-2s}\theta^{2s}\Big),\tag{4.8}$$

где $\gamma_0^{(k,n)}=1$, $\omega_0^{(k,n)}=n$. При $k=0$

$$U^{(1)}_{0,n}=\theta\sum_{s=0}^{[(n-1)/2]}\gamma_s^{(0,n)}(\ln r)^{n-1-2s}\theta^{2s},\quad U^{(2)}_{0,n}=\sum_{s=0}^{[n/2]}\gamma_s^{(0,n)}(\ln r)^{n-2s}\theta^{2s}.\tag{4.9}$$

Для функции $u(\zeta,y)$ вида

$$U(\zeta,y)=r^{k/3}\sum_{i=0}^{m}(\ln r)^{m-i}\Phi_i(\theta)\tag{4.10}$$

число $k/3$ будем называть порядком этой функции, а число m — ее индексом.

Очевидно, что представления (4.7)–(4.9) могут быть записаны в виде, аналогичном (4.10):

$$U^{(j)}_{k,n}(\zeta,y)=r^{k/3}\sum_{i=0}^{n}(\ln r)^{n-i}\Phi^{(k,n)}_{ij}(\theta),\quad k\neq 0;\tag{4.11}$$

$$U^{(1)}_{0,n}(\zeta,y)=\sum_{i=0}^{n}(\ln r)^{n-1-i}\Phi^{(0,n)}_{i1}(\theta),\quad U^{(2)}_{0,n}(\zeta,y)=\sum_{i=0}^{n}(\ln r)^{n-i}\Phi^{(0,n)}_{i2}(\theta),\tag{4.12}$$

т. е. при $k \neq 0$ функции $U_{k,n}^{(j)}(\zeta, y)$ имеют порядок $k/3$ и индекс n; при $k = 0$ функции $U_{0,n}^{(j)}$ имеют нулевой порядок, индекс функции $U_{0,n}^{(2)}$ равен n, но индекс функции $U_{0,n}^{(1)}$ равен $n-1$.

Множество линейных комбинаций функций вида $w(\zeta, y) = \ln^s r\zeta^m y^p U_{k,n}^{(j)}$, где m, p, s — целые неотрицательные, n целое положительное, будем обозначать через $\mathcal{W}$. Подмножество множества $\mathcal{W}$, все элементы которого имеют фиксированный порядок k, будем обозначать через $\mathcal{W}_k$. Для фиксированного $m \geqslant 1$ подмножество множества $\mathcal{W}_k$, индекс которых не превосходит m $(q+n \leqslant m)$, будем обозначать через $\mathcal{W}_k^{(m)}$.

Из соотношения (4.4) следует, что функция $w(\zeta, y)$, принадлежащая множеству $\mathcal{W}_s^{(q)}$, имеет вид

$$w(\zeta, y) = \sum_{m,k,j,l} P_l^{m,k,j}(\ln r) r^{2m} U_{k,n}^{(j)},$$

где $m \geqslant 0$, $1 \leqslant j \leqslant 2$, $k + 6m = s$, $P_l(t)$ — полином от t степени не выше, чем q.

Далее, из соотношений (4.4), (4.6) следует, что если функция $w(\zeta, y) \in \mathcal{W}_q^{(n)}$, то

$$\frac{\partial r^2 w}{\partial \zeta} \in \mathcal{W}_{q+3}^{(n)}, \quad \frac{\partial r^2 w}{\partial y} \in \mathcal{W}_{q+3}^{(n)}, \quad \zeta^m y^p \ln^i r w(\zeta, y) \in \mathcal{W}_{q+3m+3p}^{(n+i)}.$$

В дальнейшем нам понадобится вид функций $U_{k,n}^{(j)}(\zeta, y)$ на оси y, который легко получается из соотношений (4.7)–(4.9). Рассмотрим сначала функции $U_{k,n}^{(1)}(\zeta, y)$. Прежде всего, отметим, что функции $U_{k,n}^{(1)}$ при всех (допустимых в их определении) значениях k, n обращаются в нуль на правой полуоси $U_{k,n}^{(1)}(\zeta, 0) = 0$, $\zeta > 0$, $(\theta = 0)$. Для $n = 0$ это следует из определения функций $U_{k,0}^{(1)}(\zeta, y)$ (см. (4.1)), а для $n \geqslant 1$ — из соотношения (4.7).

При $\zeta < 0$ $(\theta = \pi)$ соотношение (4.7) принимает вид

$$U_{k,n}^{(1)}(\zeta, 0) = |\zeta|^{k/3} \Big(\sin\frac{k\pi}{3} P_n^{(k,n;1)}(\ln|\zeta|) + \cos\frac{k\pi}{3} Q_{n-1}^{(k,n;1)}(\ln|\zeta|) \Big), \tag{4.13}$$

где $P_n^{(k,n;1)}(t)$ — полином степени n вида

$$P_n^{(k,n;1)}(t) = \sum_{q=0}^{[n/2]} \beta_q^{(k,n;1)} t^{n-2q}, \quad \beta_0^{(k,n;1)} = 1, \tag{4.14}$$

$Q_{n-1}^{(k,n;1)}(t)$ — полином степени $n-1$ вида

$$Q_{n-1}^{(k,n;1)}(t) = \sum_{q=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \gamma_q^{(k,n;1)} t^{n-2q}, \quad \gamma_0^{(k,n;1)} = n. \tag{4.15}$$

Заметим, что при $k = 3s$ первое слагаемое в соотношении (4.13) обращается в нуль, поскольку $\sin s\pi = 0$, и в дальнейшем будем записывать соотношение (4.13) в виде

$$\begin{aligned} U_{k,n}^{(1)}(\zeta, 0) &= R_n^{(k,n;1)}(\ln|\zeta|)\zeta^{k/3}, \quad k \neq 3s, \quad \zeta < 0; \\ U_{k,n}^{(1)}(\zeta, 0) &= \tilde{R}_{n-1}^{(k,n;1)}(\ln|\zeta|)\zeta^{k/3}, \quad k = 3s, \quad \zeta < 0, \end{aligned} \tag{4.16}$$

понимая под $R_n^{(k,n;1)}(t)$, $\tilde{R}_{n-1}^{(k,n;1)}(t)$ полиномы степеней n, $n-1$ соответственно с отличными от нуля старшими коэффициентами и структурой, определяемой соотношениями (4.14), (4.15).

Перейдем к функциям $U_{k,n}^{(2)}(\zeta, y)$. Из соотношения (4.8) получаем, что при всех k

$$\begin{gathered} U_{k,n}^{(2)}(\zeta, 0) = \zeta^{k/3} \ln^n \zeta, \quad \zeta > 0; \\ U_{k,n}^{(2)}(\zeta, 0) = \zeta^{k/3} \Big(\cos\frac{k\pi}{3} P_n^{(k,n;2)}(\ln|\zeta|) + \sin\frac{k\pi}{3} Q_{n-1}^{(k,n;2)}(\ln|\zeta|) \Big), \quad \zeta < 0, \end{gathered} \tag{4.17}$$

или, что то же самое, $U^{(2)}_{k,n}(\zeta,0)=\zeta^{k/3}S^{(k,n;2)}_n(\ln|\zeta|)$, $\zeta<0$, где $S^{(k,n;2)}_n(t)$ — полином степени n.

Лемма 1. *Для любого целого k и любого целого неотрицательного n существует гармоническая функция $u(\zeta,y)$, удовлетворяющая условиям*

$$u(\zeta,0)=0,\quad \zeta>0;\quad u(\zeta,0)=\zeta^{k/3}\ln^n|\zeta|,\quad \zeta<0.$$

Доказательство. Рассмотрим различные случаи.

Пусть сначала $k\neq 3s$, $n\neq 0$. Положим $u_0(\zeta,y)=\gamma_0U^{(1)}_{k,n}(\zeta,y)$. Эта функция удовлетворяет первому из условий (4.17), и согласно первому из соотношений (4.16) при $\zeta<0$ имеет место равенство $u_0(\zeta,0)=\gamma_0\zeta^{k/3}(\alpha_0\ln^n|\zeta|+\alpha_1\ln^{n-1}+\dots+\alpha_n)$. Выберем $\gamma_0\alpha_0=1$. На границе $y=0$, $\zeta<0$ останется невязка $\delta_{n-1}=\zeta^{k/3}(\gamma_0\alpha_1\ln^{n-1}|\zeta|+\gamma_0\alpha_2\ln^{n-2}|\zeta|+\dots+\gamma_0\alpha_n)$, которую мы последовательно уберем построением функций $u_m(\zeta,y)=\gamma_mU^{(1)}_{k,n-m}(\zeta,y)$. Для $k\neq 3s$ решение задачи построено, и оно имеет вид $u(\zeta,y)=\sum_{m=0}^n\gamma_mU^{(1)}_{k,n-m}(\zeta,y)$.

Пусть теперь $k=3s$. В соответствии со вторым из соотношений (4.16) положим $u_0(\zeta,y)=\gamma_0U^{(1)}_{3s,n+1}(\zeta,y)$ и проведем построение тем же способом, что и в предыдущем случае. Получим $u(\zeta,y)=\sum_{m=0}^n\gamma_mU^{(1)}_{3s,n+1-m}(\zeta,y)$.

Таким образом, для всех k и $n\geqslant 0$ построенное решение можно записать в виде $u(\zeta,y)=\sum_{m=0}^n\gamma_mU^{(1)}_{k,q-m}(\zeta,y)$, где $q=n$ при $k\neq 3s$, $q=n+1$ при $k=3s$. □

Лемма 2. *Для любого целого k и любого целого неотрицательного n существует гармоническая функция $u(\zeta,y)$, удовлетворяющая условиям*

$$u(\zeta,0)=\zeta^{k/3}\ln^n\zeta,\quad \zeta>0;\quad u(\zeta,0)=0,\quad \zeta<0.$$

Доказательство. Положим $u_0(\zeta,y)=U^{(2)}_{k,n}(\zeta,y)$. Согласно (4.17) функция $u_0(\zeta,y)$ удовлетворяет требуемому граничному условию на полуоси $\zeta>0$. Но в соответствии с соотношением (4.17) функция $u_0(\zeta,y)$ "образует" новую граничную функцию на полуоси $\zeta<0$: $u_0(\zeta,0)=\zeta^{r/3}S^{k,n,2}_n(\ln|\zeta|)$, $\zeta<0$, где $S^{k,n,2}_n$ — полином степени n от $\ln|\zeta|$). В лемме 1 для каждого члена этого полинома построена соответствующая гармоническая функция. Суммируя все эти гармонические функции, приходим к соотношению $u(\zeta,y)=U^{(2)}_{k,n}(\zeta,y)+\sum_{m=0}^n\tilde\gamma_lU^{(1)}_{k,m-l}(\zeta,y)$, где $m=n$ при $k\neq 3s$, $m=n+1$ при $k=3s$. □

Лемма 3. *Пусть m, k целые, $m\geqslant 0$, $k\neq -3(m+1)$. Существует функция $z(\zeta,y)\in\mathcal{W}^{(0)}_{k+6m+6}$, которая является решением уравнения*

$$\Delta z=r^{2m}U^{(j)}_{k,0}. \tag{4.18}$$

Доказательство. Для любого α и любой гармонической функции $v(\zeta,y)$ справедливо соотношение $\Delta(r^\alpha v)=\alpha^2r^{\alpha-2}v+2\alpha r^{\alpha-1}v\dfrac{\partial v}{\partial r}$. Положим в этом соотношении $v(\zeta,y)=U^{(j)}_{k,0}$. По определению (см. (4.1)) $\dfrac{\partial v}{\partial r}=\dfrac{k}{3}r^{-1}U^{(j)}_{k,0}$. Если выбрать теперь $\alpha=2m+2$, то

$$\Delta\big(r^{2m+2}U^{(j)}_{k,0}\big)=r^{2m}4(m+1)\Big(m+1+\frac{k}{3}\Big)U^{(j)}_{k,0}. \tag{4.19}$$

Очевидно, что при $m+1+k/3\neq 0$ или, что то же самое, при $k\neq-(3m+1)$ функция

$$z(\zeta,y)=\frac{1}{4(m+1)(m+1+k/3)}r^{2m+2}U^{(j)}_{k,0} \tag{4.20}$$

является решением неоднородного уравнения (4.18). □

Лемма 4. *Пусть m, k, q целые, $m \geqslant 0$, $q > 0$ и выполнено соотношение $k \neq -(3m+1)$. Существует функция $z(\zeta, y) \in \mathcal{W}^{(q)}_{k+6m+6}$, которая является решением уравнения*

$$\Delta z = r^{2m} \ln^q r\, U^{(j)}_{k,0} \tag{4.21}$$

и имеет вид

$$z = r^{2m+2} P_q(\ln r) U^{(j)}_{k,0}, \tag{4.22}$$

где $P_q(t)$ — полином степени q :

$$P_q(t) = \sum_{i=0}^{q} \gamma_i(p,q,m) t^{q-i}, \quad \gamma_0(p,q,m) = \frac{1}{4(m+1)(m+1+k/3)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства этой леммы используем соотношение, аналогичное соотношению (4.19), для гармонической функции $v(\zeta, y)$:

$$\Delta(\ln^n r\, r^\alpha v) = n(n-1)\ln^{n-2} r\, r^{\alpha-2} v + \ln^n r\Big(\alpha^2 r^{\alpha-2} + 2\alpha r^{\alpha-1}\frac{\partial v}{\partial r}\Big) + 2n \ln^{n-1} r(\alpha r^{\alpha-1} v + rv).$$

Полагая в этом соотношении $v(\zeta, y) = U^{(j)}_{k,0}$, получаем $\Delta(\ln^n r\, r^\alpha U^{(j)}_{k,0}) = r^{\alpha-2} U^{(j)}_{k,0})[\ln^n r(\alpha^2 + 2\alpha k/3) + 2n(\alpha + k/3)\ln^{n-1} r + n(n-1)\ln^{n-2} r]$. Наконец, полагая $\alpha = 2m+2$, приходим к соотношению

$$\Delta\big(\ln^n r\, r^{2m+2} U^{(j)}_{k,0}\big) = r^{2m} U^{(j)}_{k,0})\Big[\ln^n r\Gamma(m,k) + \ln^{n-1} r\, 2n\Big(2m+2+\frac{k}{3}\Big) + \ln^{n-2} r\, n(n-1)\Big], \tag{4.23}$$

где $\Gamma(m,k) = 4(m+1)(m+1+k/3)$.

Вернемся к уравнению (4.21). Будем строить его решение в виде суммы $z = \sum_{s=0}^{q} z_s(\zeta, y)$, где $z_s(\zeta, y) = A_s r^{2m+2} U^{(j)}_{k,0} \ln^{q-s} r$, $0 \leqslant s \leqslant q$. Согласно соотношению (4.23)

$$\begin{aligned}
\Delta(z) = r^{2m+2} U^{(j)}_{k,0}\Big(A_0\Big[\Gamma(m,k)\ln^q r + 2q\Big(2m+2+\frac{k}{3}\Big)\ln^{q-1} r + \ln^{q-2} r\, q(q-1)\Big] \\
+ A_1\Big[\Gamma(m,k)\ln^{q-1} r + 2(q-1)\Big(2m+2+\frac{k}{3}\Big)\ln^{q-2} r + \ln^{q-3} r\,(q-1)(q-2)\Big] \\
+ A_2\Big[\Gamma(m,k)\ln^{q-2} r + 2(q-2)\Big(2m+2+\frac{k}{3}\Big)\ln^{q-3} r + \ln^{q-4} r\,(q-2)(q-3)\Big] \\
+ \cdots + A_{q-1}\Big[\Gamma(m,k)\ln r + 2\Big(2m+2+\frac{k}{3}\Big)\Big] + A_q\Gamma(m,k)\Big).
\end{aligned}$$

По предположению задачи $\Gamma(m,k) \neq 0$ ($k \neq -(3m+1)$), поэтому константы A_s могут быть последовательно определены так, чтобы построенная функция являлась решением неоднородного уравнения (4.21). Достаточно положить $A_0\Gamma(m,k) = 1$, $A_1\Gamma(m,k) + 2q(2m+2+k/3)A_0 = 0$, $A_2\Gamma(m,k) + 2(q-1)(2m+2+k/3)A_1 + A_0 q(q-1) = 0$, $A_s\Gamma(m,k) + 2(q-s+1)(2m+2+k/3)A_{s-1} + A_{s-2}(q-s+2)(q-s+1) = 0$. Решение уравнения (4.21) построено. □

Лемма 5. *Пусть m, k, q целые, $m \geqslant 0$, $q > 0$ и выполнено соотношение $k = -(3m+1)$ ($\Gamma(m,k) = 0$). Существует функция $z(\zeta, y) \in \mathcal{W}^{(q+1)}_{k+6m+6}$, которая является решением уравнения (4.21) и имеет вид*

$$z = r^{2m+2} U^{(j)}_{k,0} \ln r\, S_q(\ln r) \tag{4.24}$$

где $S_q(t)$ — полином степени q: $S_q(t) = \sum_{i=0}^{q} \tilde\gamma_i(p,q,m) t^{q-i}$, $\tilde\gamma_0(p,q,m) = -3/(2qk)$.

Доказательство. Вернемся к соотношению (4.23), справедливому для любых $n \geqslant 0$, $m \geqslant 0$ и любых целых k. Согласно предположению леммы $\Gamma(m,k) = 0$, потому что $k = -(3m+1)$. Тогда коэффициент во втором слагаемом соотношения (4.23) принимает вид $2n(2m+2+k/3) = 2n(m+1)$ и не обращается в нуль. Соотношение (4.23) следует переписать в виде $\Delta(\ln^n r\, r^{2m+2}U_{k,0}^{(j)}) = r^{2m}U_{k,0}^{(j)}\big[\ln^{n-1} r\, 2n(m+1) + \ln^{n-2} r\, n(n-1)\big]$.

Используя это соотношение, так же, как и в предыдущей лемме 4, построим решение уравнения (4.21) в виде суммы $z = r^{2m+2}U_{k,0}^{(j)}(A_0 \ln^{q+1} r + A_1 \ln^q r + A_2 \ln^{q-1} r + \dots + A_q \ln r)$. Легко видеть, что $A_0 = -3/(2qk)$ и $z \in \mathcal{W}_{k+6m+6}^{(q+1)}$. □

Лемма 6. *Пусть m, k, n целые, $m \geqslant 0$, $n > 0$, $k \neq -(3m+1)$, $(\Gamma(m,k) \neq 0)$. Существует функция $w(\zeta, y) \in \mathcal{W}_{k+6m+6}^{(n)}$, которая является решением неоднородного уравнения*

$$\Delta w = r^{2m}U_{k,n}^{(j)}. \tag{4.25}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $z(\zeta, y)$, построенную в лемме 3. Легко видеть, что функция

$$w(\zeta, y) = \frac{\partial^n z}{\partial k^n} \tag{4.26}$$

является решением уравнения (4.25). Используя явный вид (4.20) функции $z(\zeta, y)$, функцию $w(\zeta, y)$ можно выписать явно:

$$w(\zeta, y) = \frac{r^{2m+2}}{4(m+1)} \frac{\partial^n \left[(m+1+k/3)^{-1}\, U_{k,0}^{(j)}\right]}{\partial k^n}.$$

Например, при $n = 1$ формула (4.26) принимает вид

$$w(\zeta, y) = \frac{r^{2m+2}}{4(m+1)}\Big[(m+1+k/3)^{-1}U_{k,1}^{(j)} - 3^{-1}(m+1+k/3)^{-2}U_{k,0}^{(j)}\Big].$$

В общем случае из соотношения (4.26) следует, что построенное решение $w(\zeta, y)$ может быть записано в виде

$$w(\zeta, y) = r^{2m+2}\sum_{s=0}^{n} \omega_s(m,k) U_{k,n-s}^{(j)}(\zeta, y).$$

Очевидно, что $w(\zeta, y) \in \mathcal{W}_{k+6m+6}^{(n)}$. □

Лемма 7. *Пусть m, k, q, n целые, $m \geqslant 0$, $n > 0$, $q > 0$ и выполнено соотношение $k \neq -(3m+1)$. Существует функция $w(\zeta, y) \in \mathcal{W}_{k+6m+6}^{(q+n)}$, которая является решением неоднородного уравнения*

$$\Delta w = r^{2m} \ln^q r\, U_{k,n}^{(j)} \tag{4.27}$$

и имеет вид

$$w(\zeta, y) = r^{2m+2}\sum_{s=0}^{n} P_q^s(\ln r) U_{k,n-s}^{(j)}(\zeta, y),$$

где $P_q^s(t)$ — полиномы от t степени q.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 6. Нужно взять решение $z(\zeta, y)$ уравнения (4.21), построенное в лемме 4 (см. (4.22)), и продифференцировать его n раз по индексу k: $w(\zeta, y) = \dfrac{\partial^n z}{\partial k^n} = r^{2m+2}\dfrac{\partial^n \big[P_q(\ln r) U_{k,0}^{(j)}\big]}{\partial k^n}$. □

Лемма 8. *Пусть m, k, q, n целые, $m \geqslant 0$, $n > 0$, $q \geqslant 0$ и выполнено соотношение $k = -(3m+1)$. Существует функция $w(\zeta, y) \in \mathcal{W}^{(q+n+1)}_{k+6m+6}$, которая является решением неоднородного уравнения (4.27) и имеет вид*

$$w(\zeta, y) = r^{2m+2} \ln r \sum_{s=0}^{n} \tilde{P}^s_q(\ln r) U^{(j)}_{k,n-s}(\zeta, y),$$

где $\tilde{P}^s_q(t)$ — полиномы от t степени q.

Д о к а з а т е л ь с т в о этой леммы аналогично доказательству лемм 6, 7. Нужно взять решение $z(\zeta, y)$ уравнения (4.21), построенное в лемме 5 (см. (4.24)), и продифференцировать его n раз по индексу k: $w(\zeta, y) = \dfrac{\partial^n z}{\partial k^n} = r^{2m+2} \ln r \, \dfrac{\partial^n \big[S_q(\ln r) U^{(j)}_{k,0}\big]}{\partial k^n}$. □

Теорема 2. *Пусть m, k, q, n целые, $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, $j = 1, 2$. Существует функция $w(\zeta, y) \in \mathcal{W}^{(l(k,m))}_{k+6m+6}$, которая является решением краевой задачи*

$$\Delta w = r^{2m} \ln^q r \, U^{(j)}_{k,n}, \quad y > 0; \quad w(0, y) = 0. \tag{4.28}$$

Здесь $l(k, m) = q + n$ при $k \neq -(3m+1)$, $l(k, m) = q + n + 1$ при $k = -(3m+1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы при различных комбинациях показателей m, k, q, n вытекает из лемм 1–8. □

Следствие. *Для любой функции $u(\zeta, y) \in \mathcal{W}^{(q)}_k$ существует функция $w(\zeta, y) \in \mathcal{W}^{(l)}_{k+6}$, $l \leq q + 1$, которая является решением краевой задачи $\Delta w = u$, $y > 0$; $w(0, y) = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о этого утверждения очевидно. □

5. Построение ФАР для внутренних разложений

Как уже было отмечено во введении, целью настоящей работы является построение формальных асимптотических решений (ФАР) внутренних краевых задач (3.2), (3.3) при $\xi^2 + \eta^2 \to \infty$. Для этого в предыдущем разделе были введены некоторые специальные функции и изучены их различные свойства. Существвование ФАР позволит построить "настоящие" решения задач (3.2), (3.3) и одновременно с этим построить и решения задач (2.2), (2.3) таким образом, что асимптотические разложения (2.1) и (3.1) будут согласованы в соответствующих областях. Для задач, аналогичных рассматриваемой, такая процедура разработана в монографии [5] и в частности для другой задачи с малым параметром при одной из старших производных очень подробно описана в работе [12].

Процедура построения ФАР в настоящей работе несколько отличается от аналогичных процедур в рассматриваемых ранее задачах (см., например, ([7; 9; 12]). Сначала с помощью доказанных в предыдущем параграфе лемм строятся ФАР при $\zeta^2 + y^2 \to 0$ задач (2.2), (2.3), что оказывается относительно просто и наглядно, а затем проводится стандартная процедура: берется ряд (2.1), функции $v_k(\zeta, y)$ заменяются на их ФАР при $\zeta^2 + y^2 \to 0$, получившееся представление переписывается в переменных ξ, η и в результате получаются некоторые ряды, которые являются ФАР задач (3.2), (3.3) при $\xi^2 + \eta^2 \to \infty$.

Перейдем к реализации этого плана. Прежде всего отметим, что $\zeta = \xi \varepsilon^{1/4}$, $y = \xi \varepsilon^{1/4}$, $r = \rho \varepsilon^{1/4}$. Полярный угол θ в переменных ξ, η не меняется. Для того, чтобы различать какой из пар внутренних переменных (ζ, y или ξ, η) мы будем пользоваться, будем эти переменные использовать и в обозначении классов функций, введенных и исследованных в предыдущем параграфе, т. е. использовать обозначения $\mathcal{W}^{(q)}_k(\zeta, y)$ или $\mathcal{W}^{(q)}_k(\xi, \eta)$.

Отметим далее, что для любой функции $z(\zeta, y) \in \mathcal{W}_k^{(n)}$ справедливо соотношение

$$z(\zeta, y) = \varepsilon^{k/(12)} \sum_{l=0}^{n} \left[\ln^l \varepsilon z_{n-l}^{(k)}(\xi, \eta) \right], \tag{5.1}$$

где $z_{n-l}^{(k)}(\xi, \eta) \in \mathcal{W}_k^{(n-l)}(\xi, \eta)$.

В справедливости представления (5.1) нетрудно убедиться, если учесть, что для функции $z(\zeta, y) \in \mathcal{W}_k^{(n)}$ имеет место представление

$$z(\zeta, y) = r^{r/3} \sum_{l=0}^{n} \ln^{n-l} r \, \Phi_l(\theta).$$

Теорема 3. *Существуют асимптотические ряды*

$$X_{kj} = \sum_{l=0}^{\infty} \omega_l^{(k)}, \quad \omega_l^{(k)} \in \mathcal{W}_{3k-2l}^{(l-1)}(\xi, \eta), \tag{5.2}$$

которые при $\xi^2 + \eta^2 \to \infty$ *являются* ФАР *задач* (3.2), (3.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию $v_0(\zeta, y)$. Она является решением первой из задач (2.2): $\mathrm{L}_1 v_0 = \Big[\Delta_{\zeta,y} + b(0, y)\dfrac{\partial}{\partial y} + a(0, y)\Big] v_0 = f(0, y)$, $v_0(\zeta, 0) = 0$. Функция $v_0(\zeta, y)$ — гладкая и при $r \to 0$ разлагается в ряд Тейлора $v_0 = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(\zeta, y)$, где $P_k(\zeta, y)$ — однородный полином степени k, $P_k(\zeta, y) \in \mathcal{W}_{3k}^{(0)}$.

Перейдем к функции $v_1(\zeta, y)$. Она должна являться решением задачи

$$\mathrm{L}_1 v_1 = 0, \quad v_1(\zeta, 0) = -\frac{\partial v_0}{\partial y}(\zeta, 0)\zeta^{1/3} = \phi(\zeta). \tag{5.3}$$

Очевидно, что для граничной функции $\phi(\zeta)$ при $\zeta \to 0$ справедливо представление $\phi(\zeta) = \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_s \zeta^{s+1/3}$. Будем строить ФАР задачи для функции $v_1(\zeta, y)$ в виде $v_1(\zeta, y) = \sum_{j=0}^{\infty} w_j^{(1)}(\zeta, y)$. Для определения функций $w_l^{(1)}(\zeta, y)$ разложим в операторе L_1 коэффициенты $b(0, y)$, $a(0, y)$ в ряды Тейлора и приравняем нулю слагаемые, имеющие один порядок. Можно проверить, что соотношения для определения функций $w_l^{(1)}(\zeta, y)$ примут вид

$$\begin{cases} \Delta_{\zeta,y} w_0^{(1)} = 0, \quad w_0^{(1)}(\zeta, 0) = \alpha_0 \zeta^{1/3}, \quad \Delta_{\zeta,y} w_1^{(1)} = -b(0,0)\dfrac{\partial w_0^{(1)}}{\partial y}, \quad w_1^{(1)}(\zeta, 0) = \alpha_1 \zeta^{4/3}, \\ \Delta_{\zeta,y} w_j^{(1)} = -\displaystyle\sum_{i=1}^{j} \frac{y^i}{i!} \Big[\frac{\partial^i b}{\partial y^i}(0,0)\frac{\partial w_{j-1-i}}{\partial y} + \frac{\partial^i a}{\partial y^i}(0,0) w_{j-2-i}\Big], \quad w_j^{(1)}(\zeta, 0) = \alpha_j \zeta^{(3j+1)/3}. \end{cases}$$

Положим $w_0^{(1)}(\zeta, y) = A_0 U_1^{(1)}(\zeta, y) + B_0 U_1^{(2)}(\zeta, y)$, где константы A_0 и B_0 определим так, чтобы было выполнено граничное условие при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Таким образом, функция $w_0^{(1)}(\zeta, y) \in \mathcal{W}_1^{(0)}(\zeta, y)$. Функцию $w_1^{(1)}(\zeta, y)$ построим в соответствии с леммой 8. Функция $w_1^{(1)}(\zeta, y)$ имеет порядок 4/3 и в соответствии с леммой 8 (см. следствие) индекс ее не превосходит единицы, поэтому можно считать, что $w_1^{(1)}(\zeta, y) \in \mathcal{W}_4^{(1)}(\zeta, y)$. Продолжая этот процесс дальше, построим функции $w_l^{(1)}(\zeta, y) \in \mathcal{W}_{1+3l}^{(l)}(\zeta, y)$. Аналогичным образом может быть построено ФАР при $r \to 0$ для любого s и можно проверить, что

$$w_s(\zeta, y) = \sum_{l=0}^{\infty} w_l^{(s)}(\zeta, y), \quad w_l^{(s)}(\zeta, y) \in \mathcal{W}_{3-2s+3l}^{(l)}(\zeta, y). \tag{5.4}$$

Отметим, что согласно соотношению (5.1)

$$w_l^{(s)}(\zeta, y) = \varepsilon^{-\frac{s}{6}+\frac{1}{4}+\frac{l}{4}} \sum_{l=0}^{s} \ln^l \varepsilon\, z_l^{(3-2s+3l)}(\xi, \eta), \quad z_l^{(3-2s+3l)} \in \mathcal{W}_{3-2s+3l}^{(s-l)}(\xi, \eta). \tag{5.5}$$

В соответствии с методом согласования [5] для того, чтобы получить ФАР при $\xi^2+\eta^2 \to \infty$ задач (3.2), (3.3), рассмотрим ряд $V(\zeta, y)$ (см. (2.1), заменим в нем функции $v_j(\zeta, y)$ их ФАР (5.4) при $\zeta^2+y^2 \to 0$ и перейдем в получившемся соотношении от переменных ζ, y к переменным ξ, η. Воспользовавшись равенствами (5.1) и (5.5), получим

$$V(\zeta, y) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{(l+1)/4} \sum_{j=0}^{l} \ln^{l-j} \varepsilon \sum_{s=0}^{\infty} z_j^{(3l-2s)}(\xi, \eta),$$

и тем самым $X_{lj} = \sum_{s=0}^{\infty} z_j^{(3l-2s)}(\xi, \eta)$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вишик М.И., Люстерник Л.А.** Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, № 5. С. 3–122.
2. **Треногин В.А.** Развитие и приложение асимптотического метода Люстерника — Вишика // Успехи мат. наук. 1970. Т. 25. № 4(154). С. 123–156.
3. **Найфэ А.** Метод возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
4. **Ван-Дайк М.** Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
5. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
6. **Леликова Е.Ф.** Об асимптотике решения одного уравнения с малым параметром // Докл. РАН. 2009. Т. 428, № 4. С. 447–450.
7. **Леликова Е.Ф.** Об асимптотике решения уравнения с малым параметром в области с угловыми точками // Матем. сб. 2010. Т. 201, № 10. С. 93–108.
8. **Ильин А.М., Леликова Е.Ф.** Об асимптотике решения одного уравнения с малым параметром // Алгебра и анализ. 2010. Т. 22, № 6. С. 109–126.
9. **Леликова Е.Ф.** Об асимптотике решения уравнения с малым параметром в области с конической точкой на границе // Докл. РАН. 2012. Т. 442, № 2. С. 166–172.
10. **Леликова Е.Ф.** Об асимптотике решения уравнения с малым параметром в окрестности точки перегиба границы // Докл. РАН. 2012. Т. 447, № 2. С. 136–139.
11. **Леликова Е.Ф.** Об асимптотике решения эллиптического уравнения второго порядка с малым параметром при одной из старших производных // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2003. Т. 9, № 1. С. 107–119.
12. **Леликова Е.Ф.** Об асимптотике решения эллиптического уравнения второго порядка с малым параметром при одной из старших производных. // Тр. Моск. мат. об-ва. 2009. Т. 71. С. 187–232.

Леликова Елена Федоровна

д-р физ.-мат. наук

ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,

профессор

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: lef@imm.uran.ru

Поступила 28.08.15