ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 1 2016

УДК 517.956.226

О ДВОЙНОМ ПОГРАНСЛОЕ В НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ[1]

С. А. Кордюкова, Л. А. Калякин

Рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка с малым параметром при производных в случае, когда предельное алгебраическое уравнение имеет кратный корень. С использованием метода согласования построено асимптотическое разложение решения краевой задачи. Для описания асимптотики решения вблизи границы используются две погранслойные переменные с разными масштабами.

Ключевые слова: нелинейное уравнение, малый параметр, асимптотика, погранслой, метод согласования.

S. A. Kordyukova, L. A. Kalyakin. On a double boundary layer in a nonlinear boundary value problem.

A nonlinear second order differential equation with a small parameter at derivatives is considered in the case when the limiting algebraic equation has a multiple root. The matching method is applied to construct an asymptotic expansion for the solution of the boundary value problem. Two boundary layer variables with different scale are used to describe the asymptotic solution near the boundary.

Keywords: nonlinear equation, small parameter, asymptotics, boundary layer, matching method.

1. Введение. Постановка задачи

Исследование математических моделей, которые описывают явление погранслоя в разных по происхождению задачах, составляет одно из важных и интересных направлений теории возмущений. Асимптотические разложения по малому параметру позволяют в таких задачах дать эффективные приближенные формулы и выявить структуру решения. Характерной чертой этого направления является использование многих масштабов. Для описания асимптотики в разных подобластях используются независимые переменные, которые по-разному масштабированы малым параметром. В частности, асимптотика решения вблизи границы описывается с использованием так называемых погранслойных (растянутых) переменных [1–3]. В краевых задачах для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений обычно возникает одна погранслойная переменная. Для нелинейных уравнений ситуация оказывается сложнее. Описание асимптотики вблизи границы иногда требует использования нескольких, по-разному растянутых, переменных. В этом смысле мы используем термин "двойной погранслой". В постановке задачи Коши такие ситуации не редкость и исследовались давно. Простейший пример приведен в [2, с. 64], более сложные анализировались в [4; 5]. Однако краевые задачи имеют свою специфику, и результаты, известные для начальных задач, сюда не переносятся.

В данной работе исходным объектом является нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка с малым параметром при производных

$$\varepsilon^2 u_{xx} = u^2 + \mu\big[K(x,\mu)u + F(u,\varepsilon u_x,x,\mu)\big], \quad 0<x<L, \quad 0<\varepsilon\ll 1 \tag{1.1}$$

(при $\mu=\varepsilon^{1/2}$ либо $\mu=\varepsilon$) с краевыми условиями

$$u(0)=\alpha(\mu), \quad u(L)=\beta(\mu). \tag{1.2}$$

Функции $K(x,\mu)$, $F(u,z,x,\mu)$, а также $\alpha(\mu)$ и $\beta(\mu)$ предполагаются гладкими по всем переменным при $u^2+z^2\le M<\infty$, $x\in[0,L]$, $\mu\in[0,\mu_0]$, $(M,\mu_0=\mathrm{const}>0)$. Под гладкостью всюду

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 14-11-00078).

понимается бесконечная дифференцируемость. Основные ограничения на исходные данные состоят в следующем:

$$K(x,0) > 0; \quad \forall\, N > 0\colon F(0,0,x,\mu), F_u(0,0,x,\mu) = \mathcal{O}(\mu^N), \quad \mu \to 0; \quad \forall\, x \in [0,L]. \tag{1.3}$$

Целью работы является исследование асимптотики решения $u(x,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ вблизи границы. Имея в виду известные результаты по обоснованию [6; 7], мы ограничимся построением формального (асимптотического) решения. Под асимптотическим решением понимается ряд по степеням малого параметра, достаточно длинный отрезок которого дает при подстановке в уравнения невязку заданного порядка $\mathcal{O}(\varepsilon^N)$.

В этом направлении обычно рассматриваются уравнения более общего вида

$$\varepsilon^2 u_{xx} = \mathcal{F}(u, \varepsilon u_x, x, \varepsilon), \quad 0 < x < L, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \tag{1.4}$$

либо системы уравнений [3; 8; 9]. Задачи погранслойного типа выделяются тем, что решение имеет гладкий предел при $\varepsilon \to 0$, равномерно на любом компакте вне границ[2]. В случае уравнения (1.4) такой предел совпадают с корнем предельного (алгебраического) уравнения $\mathcal{F}(u,0,x,0) = 0$. В автономном случае это будет положение равновесия (неподвижная точка). Корней может быть много, и не каждый корень соответствует решению погранслойного типа. Более того, может случиться, что ни один корень не подходит. Например, для модельного уравнения $\varepsilon^2 u_{xx} = u$ решения с нулевым пределом $u(x,\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ существуют, а для уравнения $\varepsilon^2 u_{xx} = -u$ таких (погранслойных) решений не бывает. Появление погранслоя связано с наличием неустойчивых (седловых) точек равновесия в динамике системы вблизи границы. Для уравнений типа (1.4) имеются исчерпывающие результаты о погранслойных решениях, которые соответствуют простому корню [3]. Основные идеи можно усмотреть на примере уравнения, близкого к модельному: $\varepsilon^2 u_{xx} = u + \varepsilon f(u,\varepsilon)$. Ситуация здесь мало отличается от линейных задач; в частности, наличие погранслойного решения не зависит от структуры возмущения $f(u,\varepsilon)$.

Специфика рассматриваемой нами задачи (1.1), (1.2) обусловлена кратностью корня предельного уравнения $u = 0$. Подобные задачи рассматривались в ряде работ [7–9], где были обнаружены отличия от случая простого корня. Прежде всего, наличие погранслоя теперь зависит от структуры возмущения. Так, для примера $\varepsilon^2 u_{xx} = u^2 + \varepsilon$ $(0 < \varepsilon \ll 1)$ справедлива тривиальная оценка $u_{xx}(x) \geq 1/\varepsilon$, которая показывает, что вторая производная любого решения в любой внутренней точке x не имеет предела при $\varepsilon \to +0$. Следовательно, погранслойных решений для этого уравнения не существует. Иная ситуация складывается в примере $\varepsilon^2 u_{xx} = u^2 - \varepsilon$ $(0 < \varepsilon \ll 1)$. Здесь предельное уравнение (при $\varepsilon = 0$) имеет тот же кратный корень $u = 0$. При учете возмущения ε обнаруживается расщепление этого корня $u_\pm = \pm\sqrt{\varepsilon}$. Корень u_+ соответствует седловой неподвижной точке возмущенного уравнения, и именно он представляет асимптотику решения вне погранслоя $u(x,\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon^n)\ \forall\, n$.

Второе принципиальное отличие задач с кратным корнем обнаруживается в структуре асимптотики решения в погранслое. Наиболее продвинутые результаты получены в работе [7], где было выявлено наличие нескольких масштабов внутри погранслоя. Предлагаемый там подход представляет собой обобщение метода погранслойных функций. Асимптотические формулы предъявляются в терминах решений модельного уравнения $\varepsilon^2 u_{xx} = u^2 + \sqrt{\varepsilon} u$. Получаемые в этом подходе функции помимо одной выделенной погранслойной переменной содержат явную зависимость от малого параметра ε. Из-за этой зависимости возникает еще один погранслойный масштаб. Однако, асимптотика решения всей задачи (и даже модельного уравнения) не была вскрыта так, как это принято в теории возмущений. Более детальный анализ этого простейшего уравнения показывает, что задача оказывается с бисингулярным возмущением и для ее исследования более подходит метод согласования [2].

[2]Задачи с внутренними переходными слоями здесь не обсуждаются.

К уравнению (1.1) редуцируется более общая задача с кратным корнем предельного уравнения. Редукция описана в разд. 7, и она приводит к специфической структуре функций K, F. Для уравнения в общей форме (1.1) такая специфика закладывается в виде условий (1.3). Ограничения (1.3) не обременительны и означают, что в уравнении (1.1) линейная при $u \to 0$ часть возмущения выделена и имеет знакоопределенный коэффициент $K \neq 0$. Положительность K не принципиальна ввиду возможной замены искомой функции u на $u - \mu K$, после которой коэффициент при u меняет знак. Произвольность числа N означает, что тождественный нуль $u(x) \equiv 0$ является асимптотическим решением уравнения (1.1) с любой степенью точности. Этого можно добиться, выделяя в исходном уравнении внешнее (вне погранслоев) асимптотическое решение в виде ряда; детали этой конструкции приведены в разд. 7.

Поскольку исходные функции гладкие, то они разлагаются в асимптотические ряды

$$K(x,\mu) = K_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n K_n(x), \quad \mu \to 0, \quad F(u,z,x,\mu) = F_0(u,z,x) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n F_n(u,z,x), \quad \mu \to 0. \tag{1.5}$$

Условия (1.3) эквивалентны следующим:

$$K_0(x) > 0, \quad F_n(0,0,x) = 0, \quad \partial_u F_n(0,0,x) = 0 \ \ \forall\, x \in [0,L], \ \ \forall\, n. \tag{1.6}$$

При таких ограничениях задачу надо решать только в погранслоях. Задачи у разных частей границы оказываются схожими и ввиду быстрого убывания погранслойных функций не связаны между собой. Поэтому детально рассматривается ситуация только вблизи $x = 0$. Без ограничения общности можно считать, что коэффициент $K(x,\mu)$ обладает свойством $K(0,0) = 1$, что влечет $K_0(0) = 1$. Этого всегда можно добиться подходящей нормировкой переменных, заменив u на $u \cdot K(0,0)$ и x на $x \cdot \sqrt{K(0,0)}$.

2. Анализ модельного уравнения

Чтобы прояснить структуру асимптотики в погранслое, полезно проанализировать пример, в котором можно выписать точное решение. Рассматривается задача, соответствующая (1.1), (1.2) с $\mu = \varepsilon^{1/2}$ и $F \equiv 0$:

$$\varepsilon^2 u_{xx} = u^2 + \sqrt{\varepsilon}\, u, \quad 0 < x < L; \quad u|_{x=0} = \alpha, \quad u|_{x=L} = \beta, \quad \alpha, \beta = \mathrm{const} > 0.$$

Легко видеть, что масштабным преобразованием $\zeta = \varepsilon^{-3/4} x$, $u(x,\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}\, v(\zeta,\varepsilon)$ можно убрать малый параметр из дифференциального уравнения, переведя его в краевое условие.

На этом пути приходим к задаче в погранслое

$$v_{\zeta\zeta} = v^2 + v, \quad 0 < \zeta < \infty; \quad v|_{\zeta=0} = \alpha/\sqrt{\varepsilon}, \quad v|_{\zeta\to\infty} = 0. \tag{2.1}$$

Характерной чертой погранслойной задачи является требование стремления к нулю по растянутой переменной на бесконечности. Решение такого типа существует. Более того, ввиду автономности уравнения решение содержит произвольный сдвиг ζ_0 по независимой переменной, и его можно записывать в разной форме:

$$v(\zeta) = 6\frac{\exp(\zeta+\zeta_0)}{[\exp(\zeta+\zeta_0)-1]^2} = 6\frac{B}{(B-e^{-\zeta})^2}\, e^{-\zeta} = 6\big[e^{\zeta/2}\sqrt{B} - e^{-\zeta/2}/\sqrt{B}\big]^{-2} \quad \forall\, B = \mathrm{const} > 0. \tag{2.2}$$

Для выделения решения, гладкого на полуоси $\zeta > 0$, константа обязана удовлетворять требованию $B > 1$. Из краевого условия $v(0) = \alpha/\sqrt{\varepsilon}$ такая константа определяется однозначно:

$$B(\varepsilon) = 1 + \varepsilon^{1/4}\sqrt{\frac{9}{\alpha^2}\sqrt{\varepsilon} + \frac{6}{\alpha}} + \frac{3}{\alpha}\sqrt{\varepsilon}.$$

Запишем ее в виде $B(\varepsilon) = 1 + b(\varepsilon)$, выделив часть, малую при $\varepsilon \to 0$:

$$b(\varepsilon) = \varepsilon^{1/4}\sqrt{\frac{9}{\alpha^2}\sqrt{\varepsilon} + \frac{6}{\alpha}} + \frac{3}{\alpha}\sqrt{\varepsilon} = \varepsilon^{1/4}b_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^{3/4}), \quad b_0 = \sqrt{\frac{6}{\alpha}}.$$

Таким образом, точное решение задачи в погранслое (2.1) определяется формулой

$$v(\zeta, \varepsilon) = 6\frac{1 + b(\varepsilon)}{[1 - e^{-\zeta} + b(\varepsilon)]^2}e^{-\zeta}. \tag{2.3}$$

Поскольку фигурирующая здесь функция $b(\varepsilon)$ будет гладкой относительно $\varepsilon^{1/4}$, то решение можно разложить в ряд по степеням, кратным $1/4$:

$$\sqrt{\varepsilon}\, v(\zeta, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n/4} v_n(\zeta), \quad \varepsilon \to 0 \quad (\zeta = x/\varepsilon^{3/4}). \tag{2.4}$$

Коэффициенты будут бесконечно дифференцируемыми при $\zeta > 0$ и быстро убывающими на бесконечности $v_n(\zeta) = \mathcal{O}(e^{-\zeta})$, $\zeta \to \infty$. Однако из-за того, что $b(0) = 0$, все коэффициенты имеют особенности при $\zeta \to 0$, порядок которых нарастает с номером: $v_n(\zeta) = \mathcal{O}(\zeta^{-2-n})$, и этот порядок особенности точный. В частности, $v_0(\zeta) = 6\dfrac{e^{-\zeta}}{[1 - e^{-\zeta}]^2} = 6\zeta^{-2}[1 + \mathcal{O}(\zeta^2)]$, $\zeta \to 0$. По этой причине полученный ряд является асимптотическим при $\varepsilon \to 0$ в области, отделенной от нуля $\zeta \gg \varepsilon^{1/4}$, что соответствует $x \gg \varepsilon$.

При малых ζ асимптотическое разложение строится в другой форме с использованием другой растянутой переменной $\xi = \zeta/\varepsilon^{1/4} = x/\varepsilon$. Для этого решение (2.3) переписывается в виде функции, зависящей от ξ:

$$w(\xi, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} v(\varepsilon^{1/4}\xi, \varepsilon) = 6\sqrt{\varepsilon}\frac{1 + b(\varepsilon)}{[1 - e^{-\varepsilon^{1/4}\xi} + b(\varepsilon)]^2}e^{-\varepsilon^{1/4}\xi}. \tag{2.5}$$

Обратим внимание, что выражение в знаменателе мало́ при $\varepsilon \to 0$ и имеет асимптотику $1 - e^{-\varepsilon^{1/4}\xi} + b(\varepsilon) = \varepsilon^{1/4}(\xi + b_0) + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}(\xi + b_0)^2)$. Поэтому из соотношения (2.5) получается разложение

$$\sqrt{\varepsilon}\, v(\zeta, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n/4} w_n(\xi), \quad \varepsilon \to 0 \quad (\xi = x/\varepsilon). \tag{2.6}$$

Главный член асимптотики определяется формулой

$$w_0(\xi) = 6\frac{1}{(\xi + b_0)^2}, \quad b_0 = \sqrt{6/\alpha}.$$

В этой конструкции используется разложение экспоненты $\exp(-\varepsilon^{1/4}\xi)$ при $\varepsilon \to 0$. Поэтому каждый коэффициент $w_n(\xi)$ содержит слагаемое в виде полинома $P_n(\xi)$ степени n с множителем $(\xi + b_0)^{-2}$. Можно проверить, что порядок роста $(n - 2)$ указан точно. Следовательно, коэффициенты растут на бесконечности $w_n(\xi) = \mathcal{O}(\xi^{n-2})$, $\xi \to \infty$. По этой причине построенный ряд будет асимптотическим на промежутке, не слишком большом $0 \le \xi \ll \varepsilon^{-1/4}$, что соответствует $x \ll \varepsilon^{3/4}$. Нетрудно проверить, что функция $w(\xi, \varepsilon)$ является четной относительно $\varepsilon^{1/4}$. Поэтому в разложении (2.6) присутствуют лишь степени, кратные $1/2$: $w_n(\xi) \equiv 0$, $n = 4m \pm 1$, $m = 0, 1, \dots$.

Таким образом, функция $\sqrt{\varepsilon}\, v(\zeta, \varepsilon)$, представляющая точное решение задачи в погранслое (2.1) вблизи $x = 0$, имеет асимптотические разложения, различные в разных подобластях. Эти разложения (2.4) и (2.6) асимптотически совпадают в области перекрытия: $\varepsilon \ll x \ll \varepsilon^{3/4}$. Аналогично строится асимптотика вблизи другого края $x = L$. Наличие особенностей в коэффициентах асимптотики связывается с термином *бисингулярное возмущение* [2].

Относительно более общих задач никаких формул для точного решения нет. Поэтому асимптотические ряды строятся формально из уравнений, и затем приводится обоснование асимптотики с доказательством существования решения. При этом на этапе формальных конструкций возможны разные подходы. Для рассматриваемого здесь класса задач была предложена идея использовать в конструкциях решение $v(\zeta,\varepsilon)$ модельной задачи (2.1), не вдаваясь в детали асимптотики этой функции по малому параметру [7]. В результате получается разложение в виде ряда

$$u(x,\varepsilon)=\sqrt{\varepsilon}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{n/4}v_n(\zeta,\varepsilon).$$

Для коэффициентов $v_n(\zeta,\varepsilon)$ структура асимптотик при $\varepsilon\to 0$ оставалась не вскрытой. Такую асимптотику можно находить из явных формул, как это показано выше, и на этом пути обнаружить разложения в форме рядов (2.4) и (2.6) с коэффициентами, которые не содержат явной зависимости от ε. Но такие выкладки не проделывались даже для первых поправок.

Другой подход состоит в том, чтобы сразу конструировать разложения вида (2.4) и (2.6), исходя из уравнений. Дополнительное требование асимптотического согласования рядов позволяет однозначно определить коэффициенты. Этот способ излагается в следующих разделах. Преимущество его — в простоте задач для коэффициентов асимптотики, которые получаются банальным приравниванием выражений при одинаковых степенях ε. Здесь не нужны искусственные построения, приводимые в [7].

3. Первый (внутренний) погранслой

Вводится растянутая переменная $\xi=x/\varepsilon$, делается замена функции $u(x,\varepsilon)=w(\xi,\varepsilon)$, и задача переписывается в новых переменных на бесконечном промежутке. Уравнения выпишем в случае $\mu=\sqrt{\varepsilon}$ (в этой конструкции содержится и случай $\mu=\varepsilon$):

$$w_{\xi\xi}=w^2+\sqrt{\varepsilon}\big[K(\varepsilon\xi,\sqrt{\varepsilon})w+F(w,w_\xi,\varepsilon\xi,\sqrt{\varepsilon})\big],\quad 0<\xi<\infty, \tag{3.1}$$

$$w|_{\xi=0}=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{n/2}\alpha_n,\quad \varepsilon\to 0,\quad \alpha_0>0. \tag{3.2}$$

Исходные данные в этих уравнениях имеют разложение

$$K=1+\sqrt{\varepsilon}p_1+\varepsilon p_2(\xi)+\sum_{n=3}^{\infty}\varepsilon^{n/2}p_n(\xi),\quad \varepsilon\to 0,$$

$$F=\Phi_0(w,w_\xi)+\sqrt{\varepsilon}\Phi_1(w,w_\xi)+\varepsilon\Phi_2(w,w_\xi,\xi)+\sum_{n=3}^{\infty}\varepsilon^{n/2}\Phi_n(w,w_\xi,\xi),\quad \varepsilon\to 0.$$

Здесь $p_n(\xi),\Phi_n(w,w_\xi,\xi)$ — полиномы по ξ степени не выше $[n/2]$. Они получаются из (1.5) путем разложения функций по Тейлору при $x\to 0$. Например, $p_1=K_1(0)$, $p_2(\xi)=K_2(0)+K_0'(0)\xi$, $\Phi_0=F_0(w,w_\xi,0)$, $\Phi_1=F_1(w,w_\xi,0)$, $\Phi_2=F_2(w,w_\xi,0)+\partial_xF_0(w,w_\xi,0)\xi$.

Асимптотическое решение в первых членах строится по степеням, кратным 1/2, а в старших поправках могут появиться степени, кратные 1/4, и логарифмы:

$$W(\xi,\varepsilon)=W_0(\xi)+\varepsilon^{1/2}W_1(\xi)+\varepsilon W_2(\xi)+\varepsilon^{3/2}W_3(\xi)+\varepsilon^{3/2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{0\le m\le n}\varepsilon^{n/4}\ln^m\varepsilon\,W_{n,m}(\xi). \tag{3.3}$$

Коэффициенты определяются из рекуррентной системы задач, которая получается из (3.1), (3.2). Нелинейности встречаются только на первом шаге

$$\frac{d^2W_0}{d\xi^2}=W_0^2,\quad \xi>0,\qquad W_0(0)=\alpha_0\,;$$

$$\frac{d^2W_n}{d\xi^2} - 2W_0W_n = G_n(\xi), \quad W_n(0) = \alpha_n \quad W_{2q,0} \equiv W_n, \quad n = q+3 \geq 4;$$

$$\frac{d^2W_{n,m}}{d\xi^2} - 2W_0W_{n,m} = G_{n,m}(\xi), \quad W_{n,m}(0) = 0, \quad n \neq 2q \cup m \neq 0.$$

Логарифмы и степени, кратные 1/4, возникают только из-за согласования со следующим масштабом. На соответствующие коэффициенты в младших порядках появляются однородные дифференциальные уравнения и неоднородные условия на бесконечности. Это приводит к ненулевым решениям. Правые части определяются через предыдущие приближения. Например, с учетом $K(0,0) = 1$ получаем

$$G_1 = W_0(\xi) + \Phi_0(W_0, \partial_\xi W_0), \quad G_{1,1} = 0,$$

$$G_2 = W_1^2(\xi) + W_1(\xi) + P_1W_0(\xi) + \Phi_1(W_0, \partial_\xi W_0) + \big[W_1\partial_W + \partial_\xi W_1 \partial_{W_\xi}\big]\Phi_0(W_0, \partial_\xi W_0),$$

$$\begin{aligned} G_3 = {} & 2W_1(\xi)W_2(\xi) + W_2(\xi) + p_1W_1(\xi) + p_2(\xi)W_0(\xi) + \Phi_2(W_0, \partial_\xi W_0, \xi) \\ & + \big[W_2\partial_W + \partial_\xi W_2 \partial_{W_\xi}\big]\Phi_0(W_0, \partial_\xi W_0) + \big[W_1\partial_W + \partial_\xi W_1 \partial_{W_\xi}\big]\Phi_1(W_0, \partial_\xi W_0) \\ & + \frac{1}{2}\big[W_1\partial_W + \partial_\xi W_1 \partial_{W_\xi}\big]^2\Phi_0(W_0, \partial_\xi W_0). \end{aligned}$$

3.1. Решение рекуррентной системы

Для нелинейного уравнения $w'' = w^2$ двухпараметрическое (общее) решение $w = w(\xi+c, E)$ выписывается через интеграл

$$\int\limits_{w_0}^{w} \frac{d\eta}{\sqrt{2\eta^3/3 - E}} = \xi + c \quad \forall E, \quad c = \mathrm{const}, \quad w_0 = \mathrm{const} \geq (3E/2)^{1/3}.$$

Поскольку при $E \neq 0$ интеграл ограничен равномерно по $w > w_0$, то отсюда следует, что любое решение стремится к бесконечности $w = w(\xi + c, E) \to \infty$ при $\xi \to \hat\xi$ в конечной точке $\hat\xi = \xi(E, c) = \int_{w_0}^{\infty} \frac{d\eta}{\sqrt{2\eta^3/3 - E}} - c$. Такие функции не будут гладкими на полуоси $\xi > 0$ и поэтому не подходят для описания погранслоя. Остается однопараметрическое семейство решений $w = 6/(\xi + c)^2$ с аргументом $\xi + c > 0$, соответствующее $E = 0$. При подходящем выборе константы c оно дает решение краевой задачи на исходном шаге:

$$W_0(\xi) = \frac{6}{(\xi + c)^2}, \quad c = \sqrt{6/\alpha_0}.$$

На последующих шагах решаются задачи для линеаризованного уравнения. Соответствующее однородное уравнение $\frac{d^2w}{d\xi^2} - 2W_0w = 0$ имеет пару решений: $W^-(\xi) = (\xi+c)^{-3}$, $W^+(\xi) = (\xi+c)^4$. Частное решение неоднородного уравнения на n-м шаге выписывается через интеграл, который удобно записать в виде

$$\tilde W_n(\xi) = \frac{1}{7}\int\limits_0^{\xi} \big[W^+(\xi)W^-(\eta) - W^-(\xi)W^+(\eta)\big]G_n(\eta)\,d\eta.$$

Общее решение содержит пару констант интегрирования:

$$W_n(\xi) = A_n^- W^-(\xi) + A_n^+ W^+(\xi) + \tilde W_n(\xi), \quad A_n^{\pm} = \mathrm{const}. \tag{3.4}$$

Для их нахождения используется краевое условие, которое приводит к соотношению $A_n^- c^{-3} + A_n^+ c^4 = \alpha_n$, а также условия согласования, которые обсуждаются ниже. На первых шагах константы A_n^+ при растущей функции $W^+(\xi)$ оказываются нулями. В старших приближениях эти константы будут ненулевыми, что наблюдается в простейшем примере. Кроме того, требование согласования со следующим погранслойным масштабом приводит к выявлению в асимптотике логарифмов и степеней, кратных 1/4. Формулы для коэффициентов $W_{n,m}(\xi)$ выписываются аналогично. Появление логарифмов бывает обязано неавтономности исходного уравнения. В приведенном выше автономном примере их нет.

Асимптотическую структуру коэффициентов удобно отслеживать, используя подходящие классы функций.

О п р е д е л е н е 1. Обозначим через $\mathcal{M}_{p,q}$ множество бесконечно дифференцируемых функций $W(\xi)$ на полуоси $\xi \geq 0$, которые на бесконечности имеют степенную асимптотику (с логарифмами):

$$W(\xi) = \sum_{n=-p}^{\infty} \sum_{0 \leq m \leq q} w_{n,m} \xi^{-n} \ln^m \xi, \quad \xi \to \infty, \quad w_{n,m} = \text{const}.$$

Этот класс состоит из функций, которые на бесконечности имеют ограниченную степень роста p и разлагаются в асимптотический ряд по отрицательным степеням. При интегрировании таких функций может повышаться как степень роста p, так и степень логарифма.

Лемма 1. *Пусть правая часть принадлежит классу $\mathcal{M}_{p,q}$. Тогда любое решение линеаризованного уравнения $W(\xi) \in \mathcal{M}_{r,q+1}, r = \max\{4, p+2\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из формулы для решения (3.4) с учетом интегрируемости степенной асимптотики. Четверка ($r \geq 4$) возникает из-за решения W^+ однородного уравнения.

3.2. Первые приближения

Выписанные выше формулы дают явные представления для коэффициентов асимптотического решения. Эти коэффициенты на каждом шаге содержат две неопределенные константы $A^\pm$, для которых краевое условие при $\xi = 0$ дает одно соотношение. Второе соотношение получается из условий на бесконечности при $\xi \to \infty$. В общем случае оно извлекается из соображений согласования со вторым погранслоем. На первых шагах такое требование сводится к ограничению на рост в бесконечности.

При согласовании используется асимптотика коэффициентов при $\xi \to \infty$. Общую структуру асимптотики удобно отслеживать в терминах классов функций $\mathcal{M}_{p,q}$. Показатель p указывает на степень роста функции на бесконечности. Показатель q указывает на наличие степеней логарифмов. Следует отметить, что результаты по распределению степеней логарифмов в асимптотическом разложениях коэффициентов $W_{n,m}(\xi)$ являются довольно грубыми. Их уточнение возможно, но в общем случае приводит к громоздким формулам, не имеющим принципиального значения. Между тем главный результат состоит в ограниченности степеней логарифма на каждом шаге, так что получаемые асимптотики носят степенной характер.

Исходными объектами являются формулы для нулевого приближения $W_0 = 6(\xi + c)^{-2}$ и для производной $W_0' = -12(\xi + c)^{-3}$. Ввиду их убывания по ξ любая гладкая функция двух переменных $\Phi(W_0, W_0')$, рассматриваемая как сложная функция от ξ, раскладывается в асимптотический ряд по обратным степеням ξ^{-j}. Причем если $\Phi(0,0) = 0$, то разложение начинается с отрицательной степени $j \geq 1$. В таком подходе вычисление асимптотики функций $W_n(\xi)$ сводится к перемножению степеней ξ^i и вычислению интегралов от них. При этом могут появиться логарифмы $\ln \xi$, а на последующих шагах их степени. Ниже приведены результаты вычислений для первых трех поправок.

На исходном шаге $n=0$ решение определяется однозначно $W_0(\xi)\in\mathcal{M}_{-2,0}$. На первом шаге $n=1$ правая часть принадлежит тому же классу $G_1(\xi)\in\mathcal{M}_{-2,0}$. При этом надо учесть, что функция возмущения $\Phi_0(W_0,\partial_\xi W_0)=\mathcal{O}\big((W_0)^2+|\partial_\xi W_0|\big)$ разлагается в асимптотический ряд Тейлора при $W_0,\partial_\xi W_0\to 0$ и поэтому сложная функция имеет разложение на бесконечности

$$\Phi_0(W_0(\xi),\partial_\xi W_0(\xi))=\sum_{n=3}^{\infty}a_n\xi^{-n},\quad \xi\to\infty,\quad a_n=\mathrm{const}.$$

Коэффициенты a_n вычисляются через коэффициенты Тейлора для Φ_0 и коэффициенты асимптотики $W_0(\xi)$ на бесконечности.

Выделим в интеграле $\tilde{W}_1(\xi)$, который определяет первую поправку, главный растущий член асимптотики в виде $\tilde{A}_1W^+(\xi)$, где множитель определяется через сходящийся интеграл:

$$\tilde{A}_1=\frac{1}{7}\int_0^\infty W^-(\eta)G_1(\eta)\,d\eta.$$

В таком случае оставшийся интеграл в $\tilde{W}_1(\xi)$ принадлежит классу $\mathcal{M}_{0,1}$. Если теперь выбрать константу A_1^+ из условия $A_1^+ + \tilde{A}_1=0$, то с учетом краевого условия $A_1^+c^{-4}+A_1^-c^3=\alpha_1$ первая поправка $W_1(\xi)=A_1^-W^-(\xi)+A_1^+W^+(\xi)+\tilde{W}_1(\xi)$ определяется однозначно в классе $\mathcal{M}_{0,1}$. Нетрудно выделить главный член асимптотики: $W_1(\xi)=-1/2+\mathcal{O}(\xi^{-1})$, $\xi\to\infty$. В асимптотике этой функции может появиться слагаемое с логарифмом вида $-(a_5/7)(\xi+c)^{-3}\ln(\xi+c)$, если $a_5\neq 0$. Таким образом, $W_1(\xi)\in\mathcal{M}_{0,1}$.

На последующих шагах наблюдается повышение степени роста $W_n(\xi)\in\mathcal{M}_{2n,n+1}$. При этом первые поправки ($n<4$) в таких классах определяются однозначно, а последующие ($n\geq 4$) содержат произвол ввиду неопределенности в множителе A_n^+ при растущей функции $W^+(\xi)$.

В описанной процедуре не видно необходимости использования $\ln\varepsilon$ в асимптотическом решении. Такие члены возникают в процессе согласования. Формально их источником являются логагифмы в асимптотике на бесконечности $\ln\xi$, которые в новых переменных, например, $\zeta=\varepsilon^{1/4}\xi$ порождают $\ln\varepsilon$. Конечно, логарифмы возникают не всегда. Их нет в приведенном выше модельном примере, когда $K=\mathrm{const}$, $F\equiv 0$. Однако уже в простейшем неавтономном уравнении с $K=1+x$, $F\equiv 0$ логарифмы обнаруживаются в старших поправках $W_n(\xi)$, $n>5$.

4. Второй (промежуточный) погранслой

Асимптотическое решение в первом погранслое позволяет удовлетворить краевым условиям, но оно не согласуется с асимптотическим решением (нулем) во внешней области. В частности, отсутствует экспоненциальное убывание главного члена асимптотики $W_0(\xi)=6(\xi+c)^{-2}$, а поправки растут при $\xi\to\infty$. Поэтому в промежуточной области строится асимптотика решения с использованием другой растянутой переменной. Масштабные преобразования здесь приводят к уравнению $v''=v^2+v$, которое имеет экспоненциально убывающие решения.

Выбор масштабов зависит от коэффициента μ при выделенной линейной части возмущения. Если $\mu=\sqrt{\varepsilon}$, то вводится растянутая переменная $\zeta=x/\varepsilon^{3/4}=\varepsilon^{1/4}\xi$ и делается замена функции $u(x,\varepsilon)=\sqrt{\varepsilon}v(\zeta,\varepsilon)$. Задача переписывается в новых переменных на бесконечном промежутке:

$$v_{\zeta\zeta}=v^2+K(\varepsilon^{3/4}\zeta,\sqrt{\varepsilon})v+\varepsilon^{-1/2}F(\sqrt{\varepsilon}v,\varepsilon^{3/4}v_\zeta,\varepsilon^{3/4}\zeta,\sqrt{\varepsilon}),\quad 0<\zeta<\infty. \tag{4.1}$$

Если $\mu=\varepsilon$, то надо вводить переменную $\zeta=x/\sqrt{\varepsilon}=\xi\varepsilon^{1/2}$ и делать замену функции $u(x,\varepsilon)=\varepsilon v(\zeta,\varepsilon)$. Уравнение приобретает похожий вид. Принципиальных отличий не возникает, поэтому мы сконцентрируем внимание на уравнении (4.1), т. е. на случае $\mu=\sqrt{\varepsilon}$.

Асимптотика исходных функций в (4.1) определяется разложениями Тейлора и имеет вид

$$K = 1 + \varepsilon^{1/2}\kappa_2 + \varepsilon^{3/4}\kappa_3\zeta + \sum_{n=4}^{\infty}\varepsilon^{n/4}P_n(\zeta), \quad \varepsilon \to 0,$$

$$\varepsilon^{-1/2}F = \varepsilon^{1/4}\phi_1 v_\zeta + \varepsilon^{1/2}\phi_2 v^2 + \varepsilon^{3/4}\phi_3 v\, v_\zeta + \sum_{n=4}^{\infty}\varepsilon^{n/4}Q_n(v, v_\zeta, \zeta), \quad \varepsilon \to 0.$$

В отличие от внутреннего слоя коэффициенты этих рядов являются полиномами от всех трех переменных v, v_ζ, ζ. Коэффициенты полиномов вычисляются через производные исходных функций $K(x,\mu)$, $F(u,z,x,\mu)$. В частности, с учетом (1.6) получаем $\kappa_2 = K_\mu(0,0)$, $\kappa_3 = K_x(0,0)$, $\phi_1 = F_z(0,0,0,0)$, $\phi_2 = \frac{1}{2}F_{uu}(0,0,0,0)$, $\phi_3 = F_{u,z}(0,0,0,0)$.

Асимптотическое решение строится в виде ряда по степеням, кратным $1/4$, с возможными добавками логарифмов:

$$V(\zeta,\varepsilon) = V_0(\zeta) + \varepsilon^{1/4}V_1(\zeta) + \varepsilon^{1/2}V_2(\zeta) + \varepsilon^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{0\le m\le n}\varepsilon^{n/4}\ln^m\varepsilon\, V_{n,m}(\zeta). \tag{4.2}$$

Коэффициенты определяются из рекуррентной системы задач. Нелинейности встречаются только на исходном шаге:

$$\frac{d^2V_0}{d\zeta^2} = V_0^2 + V_0, \quad \frac{d^2V_n}{d\zeta^2} - 2V_0V_n - V_n = H_n(\zeta), \quad n < 4,$$

$$\frac{d^2V_{n,m}}{d\zeta^2} - 2V_0V_{n,m} - V_{n,m} = H_{n,m}(\zeta), \quad n \ge 1, \quad m \ge 0.$$

Правые части определяются через предыдущие приближения. Например,

$$H_1 = \phi_1 V_0'(\zeta), \quad H_2 = V_1^2 + \kappa_2 V_0 + \phi_1 V_1'(\zeta) + \phi_2 V_0^2(\zeta),$$

$$H_3 = 2V_1V_2 + \kappa_2 V_1 + \kappa_3\zeta V_0 + \phi_1 V_2'(\zeta) + \phi_2 V_0 V_1(\zeta) + \phi_3 V_0 V_0'(\zeta), \quad H_{1,1} = 0.$$

4.1. Решение рекуррентной системы уравнений

Для нелинейного уравнения $v_{\zeta\zeta} = v^2 + v$ можно выписать общее решение, однако убывающим при $\zeta \to \infty$ будет только однопараметрическое решение (2.2) с произвольной константой B. В качестве главного члена асимптотики берется решение с $B = 1$:

$$V_0(\zeta) = 6\frac{e^{-\zeta}}{(1-e^{-\zeta})^2}.$$

Константа $B = 1$ выбрана здесь из согласования с асимптотикой в первом погранслое.

Для линеаризованного однородного уравнения $v_{\zeta\zeta} - 2V_0(\zeta)v - v = 0$, $\zeta > 0$, легко выписывается пара решений. Одно из них соответствует производной от V_0 и будет экспоненциально убывать, другое выписывается через интеграл и будет экспоненциально расти:

$$V^-(\zeta) = \frac{1+e^{-\zeta}}{(1-e^{-\zeta})^3}e^{-\zeta} = e^{-\zeta}[1 + \mathcal{O}(e^{-\zeta})], \quad V^+(\zeta) = V^-(\zeta)\int_0^\zeta \frac{d\eta}{(V^-(\eta))^2} = \mathcal{O}(e^{\zeta}), \quad \zeta \to \infty.$$

Вроскиан на этой паре решений $W(V^-, V^+) = 1$. Заметим, что при $\zeta \to 0$ первая функция имеет особенность, а вторая будет гладкой:

$$V^-(\zeta) = \zeta^{-3}[1 + \mathcal{O}(\zeta)], \quad V^+(\zeta) = \frac{1}{7}\zeta^4[1 + \mathcal{O}(\zeta)], \quad \zeta \to 0.$$

Частное решение линеаризованного неоднородного уравнения $V_{\zeta\zeta} - 2V_0(\zeta)V - V = H_n(\zeta)$, $\zeta > 0$, выписывается через интегралы, которые сходятся ввиду экспоненциального стремления к нулю функции $V^-(\eta)$ на бесконечности:

$$\tilde{V}_n(\zeta) = -V^-(\zeta)\int\limits_1^\zeta V^+(\eta)H_n(\eta)\,d\eta - V^+(\zeta)\int\limits_\zeta^\infty V^-(\eta)H_n(\eta)\,d\eta.$$

Общее решение в классе убывающих функций определяется с точностью до константы и используется для решения рекуррентной системы:

$$V_n(\zeta) = B_n V^-(\zeta) + \tilde{V}_n(\zeta) \quad \forall\, B_n = \mathrm{const}. \tag{4.3}$$

О п р е д е л е н е 2. Обозначим через $\mathcal{N}_{p,q}$ множество бесконечно дифференцируемых функций $V(\zeta)$ на полуоси $\zeta > 0$, которые на бесконечности имеют экспоненциальную оценку

$$\forall\, V(\zeta) \;\; \exists\, \nu, M \geq 0\colon |V(\zeta)| \leq M\zeta^\nu e^{-\zeta} \;\; \forall \zeta > 1,$$

а в нуле — степенную асимптотику с особенностью конечного порядка

$$V(\zeta) = \sum_{n=-p}^{\infty}\sum_{0\leq m\leq q} v_{n,m}\zeta^n \ln^m\zeta, \quad \zeta \to 0, \quad v_{n,m} = \mathrm{const}.$$

При интегрировании таких функций порядок особенности будет уменьшаться, а степень логарифма может увеличиваться.

Лемма 2. *Пусть правая часть принадлежит классу $\mathcal{N}_{p,q}$. Тогда любое убывающее решение линеаризованного уравнения $V(\zeta) \in \mathcal{N}_{r,q+1}$, $r = \max\{3, p-2\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из формулы (4.3) с учетом интегрируемости степенной асимптотики и экспоненциального стремления к нулю функции $V^-(\eta)$ на бесконечности.

4.2. Первые приближения

Представленные выше формулы определяют коэффициенты $V_n(\zeta)$ асимптотического решения с точностью до констант B_n — множителей при решении однородного уравнения $V^-(\zeta)$. Эти константы будут определяться из требования согласования с внутренним погранслоем. При этом потребуется асимптотика функций $V_n(\zeta)$ в нуле при $\zeta \to 0$. Эту асимптотику можно отслеживать посредством введенных классов $\mathcal{N}_{p,q}$. Показатель p здесь — порядок особенности при $\zeta \to 0$, значение q соответствует степени логарифмов.

На исходном шаге $V_0 \in \mathcal{N}_{2,0}$. На следующем шаге правая часть H_1 получается дифференцированием и поэтому $H_1 \in \mathcal{N}_{3,0}$. Интеграл, который определяет первую поправку, будет более гладкой функцией из класса $\tilde{V}_1 \in \mathcal{N}_{1,1}$. Здесь в асимптотике обнаруживается логарифм в виде: $V^+(\zeta)\ln(\zeta)$. Общее решение задачи содержит решение однородного уравнения $V^- \in \mathcal{N}_{3,0}$, поэтому первая поправка $V_1 \in \mathcal{N}_{3,1}$. Из лемм 1, 2 вытекает, что на каждом шаге порядок особенности в нуле повышается на единицу и увеличивается степень логарифмов $V_n \in \mathcal{N}_{n+2,n}$.

5. Согласование

Вычисление коэффициентов асимптотического решения в каждом погранслое выглядит просто и алгоритмизуемо. Цель данного раздела — указать способ нахождения констант интегрирования $A_n^\pm$, B_n.

В процедуре согласования асимптотики можно выделить два этапа. На первом выписывается асимптотика двух построенных асимптотических решений $W(\xi,\varepsilon)$ при $\xi\to\infty$ и $\sqrt{\varepsilon}V(\zeta,\varepsilon)$ при $\zeta\to 0$. В результате получаются ряды по степеням и логарифмам параметра ε, которые переписываются в одной переменной, например в ζ. При этом используется связь переменных $\zeta=\varepsilon^{1/4}\xi$. На втором этапе эти ряды сравниваются между собой, и из требования их совпадения находятся неопределенные константы. Впрочем, полные разложения можно не выписывать, достаточно сравнивать слагаемые, содержащие неопределенности. Такие слагаемые с ξ^{-3} и ξ^4 содержатся в асимптотике $W(\xi,\varepsilon)$, а с ζ^{-3} — в асимптотике $V(\zeta,\varepsilon)$. На этапе сравнения удобно использовать таблицы [2, с. 48], но на первых шагах можно обойтись без них. Как это обычно бывает, оставшиеся слагаемые (которые не содержат произволов) совпадают автоматически (см. [2, с. 46]).

Главный член асимптотики во внутреннем слое определяется однозначно и имеет асимптотику на бесконечности, которая переписывается в переменной ζ:

$$W_0(\xi)=\frac{6}{\xi^2(1+c/\xi)^2}=\sqrt{\varepsilon}\frac{6}{\zeta^2}+\varepsilon^{3/4}w_3^0\zeta^{-3}+\varepsilon w_4^0\zeta^{-4}+\varepsilon^{5/4}w_5^0\zeta^{-5}+\mathcal{O}(\varepsilon^{6/4}\zeta^{-6}),\quad w_3^0=-12\,c.$$

Главный член асимптотики в промежуточном слое содержит неопределенную константу B, и для него выписывается асимптотика в нуле:

$$\sqrt{\varepsilon}V_0(\zeta)=\sqrt{\varepsilon}\frac{6B}{(B-e^{-\zeta})^2}\,e^{-\zeta}=\sqrt{\varepsilon}\frac{6B}{(B-1+\zeta+\mathcal{O}(\zeta^2))^2}\big[1+\mathcal{O}(\zeta)\big],\quad \zeta\to 0.$$

Из требования совпадения этих разложений (в главном) определяется константа $B=1$. После этого в промежуточном слое главный член полностью определен и для него можно выписать асимптотику в нуле:

$$\sqrt{\varepsilon}V_0(\zeta)=\sqrt{\varepsilon}\sum_{n=-2}^{\infty}v_n^0\zeta^n,\quad \zeta\to 0,\quad v_n^0=\mathrm{const}.$$

В частности, здесь присутствует слагаемое $\varepsilon^{1/2}v_4^0\zeta^4$ с коэффициентом $v_4^0=-1/1008\neq 0$. Заметим, что в следующих поправках $\varepsilon^{1/2+p/4}V_p(\zeta)$ подобные слагаемые входят с более высокими степенями параметра: $\varepsilon^{1/2+p/4}\zeta^4,\ p>1$.

Первая поправка во внутреннем слое $\sqrt{\varepsilon}W_1(\xi)$ содержит растущее слагаемое

$$(A_1^+ +\tilde{A}_1)\sqrt{\varepsilon}W^+(\xi)=\mathcal{O}(\xi^4)$$

с неопределенной константой A_1^+. Поскольку подобного члена $\sqrt{\varepsilon}\xi^4=\varepsilon^{-1/2}\zeta^4$ нет в промежуточном слое, то должно выполняться соотношение $A_1^+ +\tilde{A}_1=0$, из которого находится неопределенная константа A_1^+. После этого первая поправка во внутреннем слое определяется однозначно и для нее выписывается разложение на бесконечности $\sqrt{\varepsilon}W_1(\xi)=\sqrt{\varepsilon}\big[w_0^1+w_1^1\xi^{-1}+w_2^1\xi^{-2}+\xi^{-3}[w_3^1+w_{3,1}^1\ln\xi]+\mathcal{O}(\xi^{-4})\big]$ с вполне определенными коэффициентами w_j^1 и $w_{3,1}^1$.

Аналогично в следующей поправке $\varepsilon W_2(\xi)$ для растущего слагаемого вида $\varepsilon\xi^4=\zeta^4$ нет похожего в промежуточном слое. Поэтому $A_2^+ +\tilde{A}_2=0$ и вторая поправка определяется однозначно. Асимптотика для нее содержит растущие члены:

$$\varepsilon W_2(\xi)=\varepsilon\big[w_{-2}^2\xi^2+w_{-1}^2\xi+w_0^2+w_1^2\xi^{-1}+w_2^2\xi^{-2}+\xi^{-3}[w_3^2+w_{3,1}^2\ln\xi+w_{3,2}^2\ln^2\xi]+\mathcal{O}(\xi^{-4})\big].$$

Следующие поправки содержат похожие слагаемые с более высокими степенями ε. В них обнаруживается влияние промежуточного разложения. Первый раз это случается для W_3 при определении константы $A_3^+=-\tilde{A}_3+v_4^0$. Как видим, главный член промежуточного разложения определяет третью поправку внутреннего разложения.

С другой стороны, внутреннее разложение определяет промежуточное с похожим сдвигом по номерам приближений. Принципиальную роль при этом играют слагаемые с множителем ξ^{-3}. В промежуточном слое они определяют множители B_3, $B_{3,m}$ при $V^-(\zeta)\approx\zeta^{-3}$. Для этого во внутреннем разложении после перехода к ζ выделим члены при ζ^{-3}. Из первых членов $W_0(\xi)+\sqrt{\varepsilon}W_1(\xi)+\varepsilon W_2(\xi))+\mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}\ln\varepsilon)$, таким образом, выделяется выражение

$$\zeta^{-3}\Big(\varepsilon^{3/4}w_3^0+\varepsilon^{5/4}w_3^1-\varepsilon^{5/4}w_{3,1}^1\frac{1}{4}\ln\varepsilon+\varepsilon^{7/4}w_3^2-\varepsilon^{7/4}w_{3,1}^2\frac{1}{4}\ln\varepsilon-\varepsilon^{7/4}w_{3,2}^1\frac{1}{16}\ln^2\varepsilon\Big). \qquad (5.1)$$

Последующие поправки дают слагаемые с более высокими степенями ε.

Полученное выражение надо сравнить с похожим членом в промежуточном разложении. Проанализируем там структуру первых приближений. В уравнении для первой поправки правая часть $H_1(\zeta)=\mathcal{O}(\zeta^{-3}),\ \zeta\to 0$. Поэтому сингулярная часть в асимптотике первой поправки выделяется в форме

$$V_1(\zeta)=(B_1+\tilde B_1)V^-(\zeta)+\mathcal{O}(1),\quad \tilde B_1=\int\limits_0^1 V^+(\eta)H_1(\eta)\,d\eta.$$

Имея в виду асимптотику для $V^-(\zeta)$, это соотношение можно переписать в виде

$$V_1(\zeta)=(B_1+\tilde B_1)\zeta^{-3}+\mathcal{O}(\zeta^{-2}),\quad \zeta\to 0.$$

На каждом последующем шаге n добавляется решение однородного уравнения $B_nV^-(\zeta)$ с неопределенной константой B_n. Поэтому в асимптотике каждой поправки содержится слагаемое с такой константой в форме $(B_n+\tilde B_n)\zeta^{-3}$ при том, что $\tilde B_n$ вычисляется через предыдущие приближения и известно настолько, насколько известны $B_m,\ m<n$. Помимо того, в (5.1) содержатся логарифмы $\ln\varepsilon$. Поэтому логарифмы приходится вводить в промежуточном разложении. Структура слагаемого с ζ^{-3} в разложении $\sqrt{\varepsilon}V(\zeta,\varepsilon)$ имеет вид

$$\zeta^{-3}\varepsilon^{1/2}\Big(\varepsilon^{1/4}(B_1+\tilde B_1)+\varepsilon^{2/4}(B_2+\tilde B_2)+\varepsilon^{3/4}(B_3+\tilde B_3)+\varepsilon^{3/4}B_{3,1}\ln\varepsilon+\varepsilon^{4/4}(B_4+\tilde B_4)$$

$$+\varepsilon^{5/4}(B_5+\tilde B_5)+\varepsilon^{5/4}[B_{5,1}+\tilde B_{5,1}]\ln\varepsilon+\varepsilon^{5/4}B_{5,2}\ln^2\varepsilon\Big).$$

Из сравнения с (5.1) получаются соотношения $B_1+\tilde B_1=w_3^0,\ B_2+\tilde B_2=0,\dots,B_3+\tilde B_3=w_3^1,\dots,\ B_{3,1}=w_{3,1}^1,\ B_4+\tilde B_4=0,\dots,$ из которых однозначно находятся константы промежуточного разложения на первых шагах $n\le 5$.

Для построения более старших членов асимптотики надо определить константу A_p^+ в очередном члене внутреннего разложения $p>3$, используя построенное внешнее приближение. После этого можно выписать продолжение формулы (5.1) на старшие степени ε и использовать ее для определения констант $B_{n,m}$ на очередном шаге.

Нетрудно понять, что появление логарифмов $\ln\varepsilon$ в промежуточном слое инициирует в дальнейшем их появление во внутреннем с членов порядка $\varepsilon^{9/4}\ln\varepsilon$. Однако $\ln\varepsilon$ и степени $\varepsilon^{n/4}$, кратные $1/4$, появляются во внутреннем слое вследствие согласования на более ранних этапах. Этот эффект аналогичен рассмотренному выше. Как видно из формулы для частного решения, в асимптотике первой поправки $V_1(\zeta)$ содержатся слагаемые вида $\zeta^4\big[v_0+v_1\ln\zeta\big],\ v_0,v_1=\mathrm{const}\ne 0$. В асимптотическом решении $\varepsilon^{1/2}V(\zeta,\varepsilon)$ эти слагаемые дают $\varepsilon^{1/2}\varepsilon^{1/4}\zeta^4[v_0+v_1\ln\zeta]=\varepsilon^{7/4}\xi^4\Big[v_0+v_1\frac{1}{4}\ln\varepsilon+v_1\ln\xi\Big]$. Сравнение с разложением во внутреннем слое приводит к включению слагаемого

$$\varepsilon^{7/4}\Big[v_0+v_1\frac{1}{4}\ln\varepsilon\Big]W^+(\xi).$$

На последующих шагах рекуррентные формулы для $W_{n,m}(\xi)$ и для $V_{n,m}(\zeta)$ приводят к дополнительному появлению логарифмов, а также их степеней. В силу структуры рекуррентных формул повышение степеней логарифмов на каждом шаге ограничено единицей.

После того как слагаемые с произвольными константами согласованы и эти константы определены, асимптотические решения совпадают в области перекрытия [2]. На этом конструирование асимптотического решения заканчивается.

6. Результат

Итогом выполненных построений является следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть функции* $K(x,\mu)$ *и* $F(u,z,x,\mu)$ *— гладкие и удовлетворяют условиям* (1.3); $\alpha(\mu),\beta(\mu)>0$ *при* $0<\mu<\mu_0$. *Тогда для краевой задачи* (1.1), (1.2) *с* $\mu=\varepsilon^{1/2}$ *(либо с* $\mu=\varepsilon$*) асимптотическое решение при* $\varepsilon\to 0$ *строится в виде погранслойных разложений*

$$u(x,\varepsilon)=\left\{\begin{array}{c} W(\xi,\varepsilon),\ 0\le x\ll \varepsilon\mu^{-1/2} \\ V(\zeta,\varepsilon),\ x\gg\varepsilon \end{array}\right\}+\left\{\begin{array}{c} \tilde W(\xi,\varepsilon),\ 0\le L-x\ll \varepsilon\mu^{-1/2} \\ \tilde U(\zeta,\varepsilon),\ L-x\gg\varepsilon \end{array}\right\}.$$

Коэффициенты погранслойных рядов W,V *из* (3.3), (4.2) *(и похожих рядов* $\tilde W,\tilde V$*) зависят от соответствующих растянутых переменных* $\xi=x/\varepsilon,\ \zeta=x/\varepsilon\mu^{-1/2}$ *(соответственно* $\tilde\xi=(L-x)/\varepsilon,\ \tilde\zeta=(L-x)/\varepsilon\mu^{-1/2}$*) и определяются однозначно из стандартных дифференциальных уравнений с краевыми условиями и с условиями согласования.*

Обоснование асимптотики приведено в [7]. Отметим, что обоснование асимптотики для рассмотренного класса задач возможно не всегда, контрпримеры приведены в [10]. В частности, для примера с постоянными коэффициентами, приведенного в разд. 2, возможно построение формальной асимптотики, которая не соответствует никакому точному решению. Понятно, что такая конструкция отличается от представленной в разд. 2, где асимптотическое разложение извлекается из явной формулы для точного решения.

7. Происхождение исходной задачи

Хотя исходное уравнение (1.1) с множителем $\mu=\varepsilon^{1/2}$ либо $\mu=\varepsilon$ выглядит специфическим, к нему сводится более общая задача. В этом разделе показана возможность редукции к (1.1) и появления разных множителей μ в связи с задачей о двойном погранслое.

7.1. Редукция к уравнению (1.1)

Чтобы сконцентрировать внимание на методике, мы ограничимся в качестве исходного уравнением, которое обычно изучается в этом круге задач:

$$\varepsilon^2\tilde v_{yy}=h(y)[\tilde v-\varphi(y)]^2+\varepsilon\tilde g(\tilde v,\varepsilon\tilde v_y,y,\varepsilon),\quad 0<y<l,\quad 0<\varepsilon\ll 1. \tag{7.1}$$

Здесь выделено слагаемое, ответственное за кратный корень предельного уравнения. Существенным ограничением является требование глобальности кратного корня, что содержится в дополнительном условии $h(y)\ne 0\ \ \forall\, y\in[0,l]$. Ввиду возможной замены $\tilde u\Rightarrow-\tilde u$ можно считать, что $h(y)>0$.

Переход к (1.1) выполняется в два этапа. На первом делается замена переменных

$$\tilde v(y)-\varphi(y)=v(x),\quad x=\int\limits_0^y\sqrt{h(\zeta)}\,d\zeta\ \Leftrightarrow\ y=y(x).$$

В итоге получается уравнение типа (1.1)

$$\varepsilon^2 v_{xx}=v^2-\varepsilon g(v,\varepsilon v_x,x,\varepsilon),\quad 0<x<L=\int\limits_0^l\sqrt{h(\zeta)}\,d\zeta \tag{7.2}$$

с гладкой функцией возмущения

$$g(v,\varepsilon v_x,x,\varepsilon)=\frac{1}{h(y)}\tilde g\big(v+\varphi(y),\varepsilon v_x\sqrt{h(y)}+\varepsilon\varphi'(y),y,\varepsilon\big)-\varepsilon v_x\frac{h'(y)}{2\sqrt{h(y)}}-\varepsilon\varphi''(y)\Big|_{y=y(x)}.$$

На втором этапе уточняются условия, при которых задача будет погранслойной. В отличие от случая простого корня структура уравнения (7.2) не гарантирует существования погранслойного решения при произвольном возмущении εg; это показано на примере $\varepsilon^2 u_{xx} = u^2 + \varepsilon$. Существование таких решений возможно лишь при дополнительных ограничениях на возмущение $g(v, z, x, \varepsilon)$.

Из уравнения (7.2) видно, что погранслойное решение, если существует, обязано стремиться к нулю: $v(x, \varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ в любой фиксированной точке $x \in (0, L)$. Скорость этого стремления по порядку малого параметра оценивается величиной $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$. Можно догадаться, что влияние возмущения определяется главным членом асимптотики функции $g(v, 0, x, \varepsilon)$ при $v, \varepsilon \to 0$. Формулируемые ниже условия в автономном случае соответствуют требованию существования седловой неподвижной точки у линеаризованного (при $v \to 0$) уравнения.

Линеаризованная часть функции g определяется выражением $g(0, 0, x, \varepsilon) + v\, g_v(0, 0, x, \varepsilon) + \varepsilon v_x g_z(0, 0, x, \varepsilon)$. Рассмотрим соответствующее алгебраическое уравнение (без учета производной εv_x)

$$v^2 - v\,\varepsilon g_v(0, 0, x, \varepsilon) - \varepsilon g(0, 0, x, \varepsilon) = 0.$$

Его корни даются формулами

$$v_{\pm}(x, \varepsilon) = \frac{1}{2}\Big[\varepsilon g_v(0, 0, x, \varepsilon) \pm \sqrt{\varepsilon^2\big(g_v(0, 0, x, \varepsilon)\big)^2 + 4\varepsilon g(0, 0, x, \varepsilon)}\,\Big].$$

Корни должны быть действительные при всех малых ε и $x \in [0, L]$. Более того, требуется, чтобы корни были различные, т. е. накладывается условие

$$\varepsilon\big(g_v(0, 0, x, \varepsilon)\big)^2 + 4g(0, 0, x, \varepsilon) > 0, \quad x \in [0, L]. \tag{7.3}$$

Наличие двух корней позволяет сделать замену функций $v - v_+(x, \varepsilon) = u$, и с учетом тождества $v^2 - v\,\varepsilon g_v(0, 0, x, \varepsilon) - \varepsilon g(0, 0, x, \varepsilon) \equiv (v - v_+)(v - v_-)$ свести уравнение к форме, похожей на (1.1):

$$\varepsilon^2 u_{xx} = u^2 + \big[k(x, \varepsilon)u + \varepsilon f(u, \varepsilon u_x, x, \varepsilon)\big], \quad 0 < x < L. \tag{7.4}$$

Коэффициент k определяется формулой

$$k(x, \varepsilon) = v_+ - v_- = \sqrt{\varepsilon^2\big(g_v(0, 0, x, \varepsilon)\big)^2 + 4\varepsilon g(0, 0, x, \varepsilon)}. \tag{7.5}$$

Для оставшейся части возмущения получается выражение

$$f(u, \varepsilon\, u_x, x, \varepsilon) = \big[g(v, \varepsilon\, v_x, x, \varepsilon) - v\, g_v(0, 0, x, \varepsilon) - g(0, 0, x, \varepsilon)\big]\big|_{v = v_+(x,\varepsilon) + u}.$$

Если исходное возмущение гладкое при $\varepsilon \to 0$ и разлагается в асимптотический ряд Тейлора, в частности

$$g(0, 0, x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n g_n(x), \quad \varepsilon \to 0, \quad g_0(x) = g(0, 0, x, 0),$$

то функции k, f могут иметь разложение либо по целым, либо по полуцелым степеням параметра ε. Структура асимптотики зависит от возмущения в главном члене $g_0(x)$. В ситуации общего положения $g_0(x) = g(0, 0, x, 0) \neq 0$. Тогда имеет место

Лемма 3. *Пусть в уравнении* (7.1) $h(y) > 0$ *и возмущение* $\tilde{g}$ *на корне* $\varphi(y)$ *предельного уравнения не обращается в нуль*: $\tilde{g}(\varphi(y), 0, y, 0) > 0$. *Тогда* (7.1) *редуцируется к уравнению* (1.1) *с* $\mu = \varepsilon^{1/2}$, $K = \varepsilon^{-1/2}k$, $F = \sqrt{\varepsilon} f$ *и со свойством*

$$K(x, 0) > 0, \quad F(0, 0, x, 0) \equiv F_u(0, 0, x, 0) \equiv F_\mu(0, 0, x, 0) \equiv 0 \quad \forall\, x \in [0, L]. \tag{7.6}$$

Доказательство. При условиях леммы $g_0(x) = g(0,0,x,0) = \tilde{g}(\varphi(y),0,y,0) \neq 0$. В подкоренном выражении (7.5) главным членом асимптотики при $\varepsilon \to 0$ будет $4\varepsilon g(0,0,x,0)$. Тогда при малых ε условие (7.3) редуцируется к требованию на главный член асимптотики: $g(0,0,x,0) > 0,\ x \in [0,L]$. Формулу (7.5) можно переписать в виде

$$k(x,\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon\big(g_u(0,0,x,\varepsilon)\big)^2 + 4g_0 + 4[f(0,0,x,\varepsilon) - g(0,0,x,0)]} \equiv \sqrt{\varepsilon}K(x,\varepsilon).$$

Для определенной таким образом функции $K(x,\varepsilon)$ получается разложение, указанное в (1.5):

$$K(x,\varepsilon) = K_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n K_n(x), \quad \varepsilon \to 0, \quad K_0(x) = 2\sqrt{g_0} = 2\sqrt{g(0,0,x,0)}.$$

Таким образом, в случае $g(0,0,x,0) > 0$ функции $k(x,\varepsilon)$ разлагаются по полуцелым степеням, а разложение для функции $u_+(x,\varepsilon) = 1/2\,[\varepsilon g_u(0,0,x,\varepsilon) + k(x,\varepsilon)]$ содержит как целые, так и полуцелые степени. Тогда для f получается разложение вида

$$f(u,z,x,\varepsilon) = f_0(u,x) + \sqrt{\varepsilon}\, f_1(u,x) + \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^{n/2} f_n(u,z,x), \quad \varepsilon \to 0. \tag{7.7}$$

Очевидно, эта функция является гладкой по параметру $\sqrt{\varepsilon} = \mu$ при $\mu \to 0$. Поэтому уравнение (7.4) переписывается в форме (1.1) с функцией $F(u,z,x,\mu) = \mu f(u,z,x,\mu^2)$.

Нетрудно выявить структуру первых коэффициентов разложения для F. Она извлекается из формулы (7.7) с учетом $F(u,z,x,\mu) = \mu f_0(u,x) + \mathcal{O}(\mu^2)$. Главный член этого разложения имеет асимптотику $f_0(u,x) = \mathcal{O}(u^2),\ u \to 0$; отсюда следует выполнение свойств (7.6). Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть в уравнении* (7.1) $h(y) > 0$ *и возмущение* $\tilde{g}$ *на корне* $\varphi(y)$ *предельного уравнения обращается в нуль:* $\tilde{g}(\varphi(y),0,y,0) = 0$. *Если* $\big(\tilde{g}_u(\varphi(y),0,y,0)\big)^2 + 4\tilde{g}_\varepsilon(\varphi(y),0,y,0) > 0$, *то* (7.1) *редуцируется к уравнению* (1.1) *с* $\mu = \varepsilon,\ K = \varepsilon^{-1}k,\ F = f$ *и со свойством* (7.6).

Доказательство. В этом случае $f_0 = f(0,0,x,0) = 0$. Подкоренное выражение в (7.5) имеет порядок не ниже $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$. При этом если отличен от нуля следующий член в разложении: $f_1 = f_\varepsilon(0,0,x,0) \neq 0$ либо $f_u(0,0,x,0) \neq 0$, то условие (7.3) для малых ε редуцируется так: $\big(f_u(0,0,x,0)\big)^2 + 4f_\varepsilon(0,0,x,0) > 0$. Это требование эквивалентно условию леммы.

Формулу (7.5) можно переписать в виде

$$k(x,\varepsilon) = \varepsilon\sqrt{\big(f_u(0,0,x,\varepsilon)\big)^2 + 4f_1(x) + 4\varepsilon^{-1}[f(0,0,x,\varepsilon) - \varepsilon f_1(x)]}.$$

Поскольку в разложении для f отсутствует главный член: $f_0 = 0$, то $\varepsilon^{-1}[f(0,0,x,\varepsilon) - \varepsilon f_1(x)] = \mathcal{O}(\varepsilon)$. Теперь разложение для функции k получается по целым степеням:

$$k(x,\varepsilon) = \varepsilon\Big[k_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n k_n(x)\Big], \quad \varepsilon \to 0, \quad k_0(x) = \sqrt{\big(f_u(0,0,x,0)\big)^2 + 4f_1(x)}.$$

Соответственно выписывается разложение для $F = f$ в виде

$$F(u,\varepsilon u_x,x,\varepsilon) = F_0(u,x) + \varepsilon\, F_2(u,u_x,x) + \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^n F_{2n}(u,u_x,x).$$

Структура первых коэффициентов извлекается из разложения для f: $F_0(u,x) = F(u,0,x,0) = \mathcal{O}(u^2),\ u \to 0$, $F_1(u,u_x,x) = \mathcal{O}(u) + \mathcal{O}(u_x),\ u,u_x \to 0$. Следовательно, свойство (7.6) выполнено. Лемма доказана.

7.2. Внешнее разложение

Итак, при наличии кратного корня уравнение (7.1) можно преобразовать к виду (1.1) со свойством (7.6). Покажем, что возможно преобразование к уравнению с более жесткими ограничениями на возмущение в форме (1.3).

Теорема 2. *Пусть для уравнения* (7.1) *выполнены условия либо леммы* 3, *либо леммы* 4. *Тогда краевая задача для уравнения* (7.1) *сводится к задаче* (1.1), (1.2) *с условиями* (1.3).

Доказательство состоит в выделении из решения так называемого внешнего разложения (асимптотики вне погранслоев). По сути дела, это будет продолжение той конструкции, которая выполнялась выше и привела к уравнению со свойством (7.6).

Структура внешнего разложения определяется функциями K, F. Для них имеет место разложение в асимптотические ряды Тейлора (1.5) с той разницей, что с учетом (7.6) свойство (1.6) для коэффициентов F_n выполняется лишь в первых членах асимптотики

$$F_0(0,0,x)=0, \quad \partial_u F_0(0,0,x)=0, \quad F_1(0,0,x)=0.$$

В зависимости от того, $\mu=\varepsilon^{1/2}$ или $\mu=\varepsilon$, внешнее разложение строится по дробным либо целым степеням параметра ε. В любом случае его можно искать в виде асимптотического ряда

$$U(x,\varepsilon)=\varepsilon\, U_2(x)+\varepsilon^{3/2}U_3(x)+\sum_{n=4}^{\infty}\varepsilon^{n/2}U_n(x), \quad \varepsilon\to 0.$$

Коэффициенты вычисляются по рекуррентным формулам. В частности, в случае $\mu=\varepsilon^{1/2}$

$$U_2=-\frac{F_2(0,0,x)}{K_0(x)}, \quad U_3=-\frac{1}{K_0(x)}\big[U_2^2(x)+K_1(x)U_2+\partial_u F_1(0,0,x)U_2+F_3(0,0,x)\big].$$

В случае $\mu=\varepsilon$ дробные степени отсутствуют и рекуррентные формулы немного меняются.

Поскольку $U(x,\varepsilon)$ — асимптотическое решение уравнения, то после замены $u=U(x,\varepsilon)+\tilde u$ тождественный нуль $\tilde u\equiv 0$ является асимптотическим решением редуцированного уравнения для $\tilde u$ с любой степенью точности, например $\mathcal{O}(\varepsilon^{2N+1})$. В таком случае в уравнении для $\tilde u$ функция возмущения $\tilde F(\tilde u,\varepsilon\tilde u_x,x,\mu)=\mathcal{O}(\mu^N)$, $\mu=\sqrt{\varepsilon}$, т. е. обладает свойствами (1.3). Теорема доказана.

Построенное внешнее разложение $U(x,\varepsilon)$ асимптотически удовлетворяет дифференциальному уравнению, но не краевым условиям. Вблизи границы асимптотика решения дополняется рядами с коэффициентами, зависящими от растянутых переменных. При этом вне погранслоя эта часть решения должна быстро стремиться к нулю. Как раз такие погранслойные асимптотики построены в основной части данной работы.

Замечание. В качестве исходной задачи с кратным корнем предельного уравнения можно рассмотреть общее уравнение (1.4) вместо (7.1). При построении асимптотики отличия возникают лишь во внутреннем слое с характерной переменной $\xi=x/\varepsilon$. Здесь на исходном шаге для $w_0(\xi)$ надо решать автономное уравнение $w_{\xi\xi}=\mathcal{F}(w,w_\xi,0,0)$, которое может оказаться неинтегрируемым из-за наличия первой производной. Впрочем, и в интегрируемом случае решения редко выписываются в элементарных функциях. Это обстоятельство не является преградой для конструирования асимптотики по малому параметру методом согласования. Для реализации этого метода нужны лишь асимптотики на бесконечности при $\xi\to\infty$, а не явные формулы для $w_0(\xi)$. Поэтому описанный выше подход годится для широкого класса уравнений (1.4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вишик М.И., Люстерник Л.А.** Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, вып. 5 (77). С. 3–122.
2. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
3. **Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.** Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. шк., 1990. 208 с.
4. **Ильин А.М., Леонычев Ю.А., Хачай О.Ю.** Асимптотика решения системы дифференциальных уравнений с малым параметром и с особой начальной точкой // Мат. сб. 2010. Т. 201, № 1. С. 81–102.
5. **Ильин А.М., Хачай О.Ю.** Структура пограничных слоев в сингулярных задачах // Докл. АН. 2012. Т. 445, № 3. С. 256–258.
6. **Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н.** Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах // Фундамент. и прикл. математика. 1998. Т. 4, № 3. С. 799–851.
7. **Бутузов В.Ф.** Об особенностях пограничного слоя в сингулярно возмущенных задачах с кратным корнем вырожденного уравнения // Мат. заметки. 2013. Т. 94, вып 1. С. 68–80.
8. **Васильева А.Б., Пилюгин В.С.** Сингулярно возмущенные краевые задачи с пограничным слоем степенного типа // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 43, № 3. С. 314–324.
9. **Васильева А.Б.** Двухточечная краевая задача для сингулярно возмущенного уравнения при наличии кратных корней вырожденного уравнения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 6. С. 1067–1079.
10. **Калякин Л.А.** Фиктивные асимптотические решения // Уфим. мат. журн. 2014 Т. 6, № 2. С. 45–66.

Кордюкова Светлана Алексеевна
канд. физ.-мат. наук
доцент
Уфимский государственный университет экономики и сервиса
e-mail: sveta.kor05@mail.ru

Поступила 16.11.2015

Калякин Леонид Анатольевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
гл. научн. сотрудник
Институт математики с ВЦ РАН
e-mail: klenru@mail.ru