ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 1 2016

УДК 512.542

КРИТЕРИЙ ПРОНОРМАЛЬНОСТИ ДОБАВЛЕНИЙ К АБЕЛЕВЫМ НОРМАЛЬНЫМ ПОДГРУППАМ[1]

А. С. Кондратьев, Н. В. Маслова, Д. О. Ревин

Подгруппа H группы G называется пронормальной, если для любого элемента $g \in G$ подгруппы H и H^g сопряжены в подгруппе $\langle H, H^g \rangle$. В данной работе доказано, что если группа G обладает нормальной абелевой подгруппой V и подгруппой H такими, что $G = HV$, то H пронормальна в G если и только если $U = N_U(H)[H, U]$ для любой H-инвариантной подгруппы U группы V. Основываясь на этом замечании, мы доказываем, что при $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ простая симплектическая группа $\mathrm{PSp}_{6n}(q)$ содержит непронормальную подгруппу нечетного индекса. Тем самым опровергнута гипотеза о пронормальности подгрупп нечетных индексов в конечных простых группах, высказанная в 2012 г. в работе Е. П. Вдовина и Д. О. Ревина и подтвержденная авторами в работе 2015 г. для большого массива конечных простых групп.

Ключевые слова: пронормальная подгруппа, дополнение к подгруппе, добавление к подгруппе, конечная простая группа, подгруппа нечетного индекса.

A. S. Kondrat'ev, N. V. Maslova, D. O. Revin. A pronormality criterion for supplements to abelian normal subgroups.

A subgroup H of a group G is called pronormal if, for any element $g \in G$, the subgroups H and H^g are conjugate in the subgroup $\langle H, H^g \rangle$. We prove that, if a group G has a normal abelian subgroup V and a subgroup H such that $G = HV$, then H is pronormal in G if and only if $U = N_U(H)[H, U]$ for any H-invariant subgroup U of the group V. Using this fact, we prove that the simple symplectic group $\mathrm{PSp}_{6n}(q)$ with $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ contains a nonpronormal subgroup of odd index. Hence, we disprove the conjecture on the pronormality of subgroups of odd indices in finite simple groups, which was formulated in 2012 by E.P. Vdovin and D.O. Revin and verified by the authors in 2015 for many families of simple finite groups.

Keywords: pronormal subgroup, complement of a subgroup, supplement of a subgroup, finite simple group, subgroup of odd index.

1. Введение

В соответствии с определением Ф. Холла подгруппа H группы G называется *пронормальной*, если для любого элемента $g \in G$ подгруппы H и H^g сопряжены в подгруппе $\langle H, H^g \rangle$. В работе [1] было доказано, что холловы подгруппы в конечных простых группах пронормальны, и на основе анализа доказательства была высказана следующая

Гипотеза [1, гипотеза 1]. *В конечных простых группах подгруппы нечетного индекса пронормальны.*

Недавно эта гипотеза была подтверждена авторами для всех конечных простых групп, за исключением $A_n(q)$, ${}^2A_n(q)$, $C_n(q)$, $E_6(q)$ и ${}^2E_6(q)$, где q во всех случаях нечетно [2, теорема]. Цель данной статьи — построить серию примеров, опровергающих гипотезу. Для построения такой серии мы установим ряд фактов, представляющих, на наш взгляд, самостоятельный интерес.

Известная теорема Шура — Цассенхауза [3, теоремы 3.8 и 3.12] утверждает, что если порядок и индекс нормальной подгруппы V в конечной группе G взаимно просты, то

(1) G содержит *дополнение* к V, т. е. такую подгруппу H, что $G = HV$ и $H \cap V = 1$, и

(2) любые два дополнения к V в G сопряжены.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 14-21-00065). Второй автор является победителем конкурса молодых математиков 2013 г. Фонда Д. Зимина "Династия".

Как следствие, любое дополнение к V пронормально в G.

Другим следствием теоремы Шура — Цассенхауза является следующее утверждение, часто используемое при изучении конечных групп.

Предложение 1 [3, гл. 4, лемма 4.28]. *Если V — нормальная подгруппа и H — подгруппа конечной группы G такие, что $(|H|,|V|)=1$, то для любой H-инвариантной подгруппы U группы V справедливо равенство*

$$U = C_U(H)[H,U]. \tag{1.1}$$

Несложно показать (см. разд. 3), что справедливо следующее, более общее, утверждение, в котором не требуется даже конечность группы G.

Предложение 2. *Если V — нормальная и H — пронормальная подгруппы группы G, то для любой H-инвариантной подгруппы U группы V справедливо равенство*

$$U = N_U(H)[H,U]. \tag{1.2}$$

Понятно, что в случае, когда подгруппы H и V в предложении 2 не пересекаются, выполнено равенство $N_U(H)=C_U(H)$ для любой H-инвариантной подгруппы U группы V. Поэтому предложение 1 является частным случаем предложения 2. Мы покажем, что в ситуации, когда $G=HV$ (в таких случаях подгруппу H принято называть *добавлением* к подгруппе V в G) и группа V абелева, справедливо обратное утверждение к предложению 2.

Теорема 1. *Пусть H и V — подгруппы группы G такие, что V — абелева нормальная подгруппа в G и $G=HV$. Тогда следующие утверждения равносильны*:

(1) *подгруппа H пронормальна в G*;

(2) $U = N_U(H)[H,U]$ *для любой H-инвариантной подгруппы U группы V.*

Для построения контрпримеров к гипотезе нам понадобится вытекающее из теоремы 1

Следствие. *Пусть $G = A \wr S_n = HV$ — естественное подстановочное сплетение конечной абелевой группы A и симметрической группы $H=S_n$, где через V обозначена база сплетения. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(1) *подгруппа H пронормальна в G*;

(2) $(|A|,n)=1$.

Наконец, с помощью следствия мы докажем следующее утверждение, опровергающее гипотезу.

Теорема 2. *Простая конечная группа* $\mathrm{PSp}_{6n}(q)$ *для любого* $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ *содержит непронормальную подгруппу нечетного индекса.*

Таким образом, интересной представляется следующая открытая

Проблема. Классифицировать конечные неабелевы простые группы, в которых все подгруппы нечетного индекса пронормальны.

2. Предварительные результаты

Тот факт, что подгруппа H группы G пронормальна, мы будем обозначать как $H \operatorname{prn} G$.

Нам понадобятся следующие три легко доказываемые леммы.

Лемма 1. *Пусть H — пронормальная подгруппа группы G. Тогда $H \operatorname{prn} M$ для любой подгруппы M такой, что $H \le M \le G$.*

Лемма 2. *Пусть H — подгруппа и N — нормальная подгруппа группы G. Обозначим чертой естественный эпиморфизм $G \to G/N$. Справедливы следующие утверждения*:

(1) *если H prn G, то $\overline{H}$ prn $\overline{G}$*;

(2) *если $N \leq H$ и $\overline{H}$ prn $\overline{G}$, то H prn G.*

В частности, подгруппа нечетного индекса пронормальна в G тогда и только тогда, когда ее образ пронормален в $G/O_2(G)$.

Лемма 3. *Пусть H — транзитивная группа подстановок степени n и A — группа. Определим действие группы H на группе $V = A^n$ по правилу*

$$(x_1, \ldots, x_n)^\pi = (x_{1\pi^{-1}}, \ldots, x_{n\pi^{-1}}) \text{ для любых } (x_1, \ldots, x_n) \in V \text{ и } \pi \in H.$$

Тогда

$$C_V(H) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in V \mid x_1 = \cdots = x_n\} \cong A.$$

Лемма 4. *Пусть H и V — подгруппы группы G такие, что $H \leq N_G(V)$. Справедливы следующие утверждения*:

(1) $[H, V] \trianglelefteq HV$;

(2) $H^g \leq H[H, V]$ *для любого $g \in V$.*

Доказательство. Утверждение (1) хорошо известно [3, лемма 4.1]. В частности, из (1) вытекает, что $H[H, V]$ — подгруппа в G. Если $g \in V$, то для любого $h \in H$ имеем $h^g = h[h, g] \in H[H, V]$, откуда получаем (2). $\square$

Лемма 5. *Пусть H — подгруппа и v — элемент группы G такие, что подгруппа $V = \langle v^H \rangle$ абелева. Тогда*

$$\langle H, H^v \rangle \cap V = (H \cap V)[H, V].$$

Доказательство. Заметим, что $H \leq N_G(V)$. Поэтому, не уменьшая общности, можно считать, что $G = HV$ и $V \trianglelefteq G$. Положим $X = \langle H, H^v \rangle$ и $U = X \cap V$. Требуется показать, что $U = (H \cap V)[H, V]$. Ясно, что $H \cap V \leq X \cap V = U$. По лемме 4 имеем также $X \leq H[H, V]$, откуда

$$U = X \cap V \leq (H[H, V]) \cap V = (H \cap V)[H, V].$$

Таким образом, если мы установим включение $[H, V] \leq U$, требуемое равенство будет доказано. Достаточно показать, что для любых заданных $x \in H$ и $w \in V$ выполнено включение $[x, w] \in X$, поскольку $[x, w] \in V$ ввиду нормальности подгруппы V. Так как $V = \langle v^H \rangle$, найдутся элементы $h_1, \ldots, h_m \in H$ такие, что

$$w = (v^{\varepsilon_1})^{h_1} \ldots (v^{\varepsilon_m})^{h_m}, \tag{2.3}$$

где $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \in \{1, -1\}$. Пусть для данного элемента $w \in V$ его представление (2.3) выбрано так, что число $m = m(w)$ является наименьшим. Включение $[x, w] \in X$ будем доказывать индукцией по m.

Допустим, что $m = 1$, т. е. $w = v^h$ или $w = (v^{-1})^h$ для некоторого $h \in H$. В первом случае имеем

$$[x, w] = x^{-1}w^{-1}xw = x^{-1}h^{-1}v^{-1}hxh^{-1}vh = (hx)^{-1}(hxh^{-1})^v h \in \langle H, H^v \rangle = X.$$

Во втором случае с учетом нормальности и абелевости подгруппы V имеем

$$[x, w] = (w^{-1})^x w = w(w^{-1})^x = h^{-1}v^{-1}hx^{-1}h^{-1}vhx = h^{-1}(hx^{-1}h^{-1})^v hx \in \langle H, H^v \rangle = X.$$

Допустим теперь, что $m > 1$. Положим для краткости $v_i = (v^{\varepsilon_i})^{h_i}$ для всех $i = 1, \dots, m$. Тогда

$$[x, w] = x^{-1}x^{v_1\dots v_m} = (x^{-1}x^{v_m})(x^{-1}x^{v_1\dots v_{m-1}})^{v_m} = u_1 u_2^{v_m},$$

где $u_1 = x^{-1}x^{v_m} = [x, v_m] \in X$ ввиду доказанного, и

$$u_2 = x^{-1}x^{v_1\dots v_{m-1}} = [x, v_1 \dots v_{m-1}] \in X \cap V = U$$

по предположению индукции. Теперь, поскольку группа V по условию абелева, $U \trianglelefteq V$ и $u_2^{v_m} \in U \leq X$. Тем самым

$$[x, w] = u_1 u_2^{v_m} \in X. \qquad \square$$

Лемма 6. *Пусть H и V — подгруппы группы G такие, что $V \trianglelefteq G$ и H prn G. Тогда*

$$V = [H, V]N_V(H).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что $V \supseteq [H, V]N_V(H)$.

Докажем обратное включение. Пусть $v \in V$. Поскольку H prn G, существует $g \in \langle H, H^v\rangle$ такой, что

$$H^v = H^g.$$

Ввиду леммы 4 имеем $\langle H, H^v\rangle \leq H[H, V]$, откуда $g = hx$, где $h \in H$ и $x \in [H, V]$. Поэтому

$$H^v = H^g = H^{hx} = H^x,$$

следовательно, $x^{-1}v \in N_G(H) \cap V = N_V(H)$. Поэтому

$$V \subseteq [H, V]N_V(H). \qquad \square$$

Лемма 7. *Пусть k — конечное поле простой характеристики p и $V = k^{np}$ — естественный подстановочный модуль для группы $H = S_{np}$ (т. е. определено действие группы H на V по правилу*

$$(x_{1\pi}, \dots, x_{(np)\pi})^\pi = (x_1, \dots, x_{np})$$

для любых $(x_1, \dots, x_{np}) \in V$ и $\pi \in H$). Пусть $G = VH$ — естественное полупрямое произведение группы V на H. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) *$G \cong K \wr S_{np}$, где K — аддитивная группа поля k*;

(2) *подгруппа H не является пронормальной в G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение (1) очевидно.

Докажем (2). Предположим, что H prn G. Тогда по лемме 6 выполнено равенство

$$V = [H, V]N_V(H). \tag{2.4}$$

Пусть

$$U = \{(x_1, \dots, x_{np}) \in V \mid x_1 + \dots + x_{np} = 0\}.$$

Тогда $U < V$ и для любых $v = (x_1, \dots, x_{np}) \in V$ и $\pi \in H$ имеем $[\pi, v] = v^\pi - v \in U$, и поэтому $[H, V] \leq U$.

Далее, если $u \in N_V(H)$, то для любого $\pi \in H$ коммутатор $[\pi, u]$ лежит одновременно и в H (так как u нормализует H), и в V (так как H нормализует V). Поскольку пересечение H и V тривиально, $[\pi, u] = 0$ и $u \in C_V(H)$. Таким образом, $N_V(H) = C_V(H)$. По лемме 3

$$C_V(H) = \{(x_1, \dots, x_{np}) \in V \mid x_1 = \dots = x_{np}\}.$$

Поскольку k — поле характеристики p, для любого $u = (x_1, \dots, x_{np}) \in C_V(H)$ имеем

$$x_1 + \dots + x_{np} = 0 \quad \text{и} \quad u \in U.$$

Теперь с учетом (2.4) получаем

$$V = [H, V]N_V(H) = [H, V]C_V(H) \leq U < V.$$

Противоречие. $\square$

Лемма 8. *Пусть H — группа подстановок степени n и A — конечная группа. Определим действие группы H на группе $V = A^n$ по правилу*

$$(x_1, \dots, x_n)^\pi = (x_{1\pi^{-1}}, \dots, x_{n\pi^{-1}}) \text{ для любых } (x_1, \dots, x_n) \in V \text{ и } \pi \in H.$$

Предположим, что H содержит транзитивную подгруппу K такую, что $(|A|, |K|) = 1$. Тогда для любой H-инвариантной подгруппы U группы V выполнено равенство

$$U = C_U(H)[H, U].$$

Доказательство. Прежде всего, в силу предложения 1 имеем $U = C_U(K)[K, U] \leq C_U(K)[H, U]$. Таким образом, достаточно показать, что $C_U(H) = C_U(K)$. Это так, поскольку из леммы 3 следует, что $C_V(H) = C_V(K)$ и

$$C_U(H) = U \cap C_V(H) = U \cap C_V(K) = C_U(K). \qquad \square$$

3. Доказательство основных результатов

Доказательство предложения 2. Рассмотрим группу $G_1 = UH$. Ввиду лемм 4 и 6 имеем $U = N_U(H)[H, U]$. $\square$

Доказательство теоремы 1. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) вытекает из предложения 2.

Докажем (2) $\Rightarrow$ (1). Ввиду равенства $G = HV$ достаточно для произвольно выбранного $v \in V$ доказать, что существует элемент $u \in \langle H, H^v \rangle$ такой, что $H^u = H^v$. Ввиду условия (2) мы, не уменьшая общности, можем считать, что $G = \langle H, v \rangle$ и $V = \langle v^H \rangle$. Применяя лемму 5, заключаем, что

$$\langle H, H^v \rangle \cap V = (H \cap V)[H, V].$$

По условию (2) имеем $v = wu$, где $w \in N_V(H)$, а $u \in [H, V]$. Теперь

$$H^v = H^{wu} = H^u,$$

причем

$$u \in [H, V] \leq (H \cap V)[H, V] = \langle H, H^v \rangle.$$

Тем самым доказано, что $H \operatorname{prn} G$. $\square$

Доказательство следствия. Допустим, что утверждение (1) следствия верно, а (2) — неверно. Пусть p — общий простой делитель чисел $|A|$ и n. Группа V содержит нормальную в G подгруппу U такую, что $G/U \cong \mathbb{Z}_p \wr S_n$, и образ подгруппы H в G/U не пронормален по лемме 7. Но тогда и H не пронормальна в G по лемме 2. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) доказана.

Докажем обратную импликацию. Поскольку подгруппа V группы G абелева, по теореме 1 достаточно показать, что

$$U = C_U(H)[H, U]$$

для любой H-инвариантной подгруппы U группы V. Это так ввиду леммы 8 и того, что $H = S_n$ содержит транзитивную подгруппу $\langle (1, \dots, n) \rangle$ порядка n, взаимно простого с $|A|$. $\square$

Доказательство теоремы 2. Пусть q — степень простого числа такая, что $q \equiv \pm 3 \pmod 8$. Хорошо известно (и это вытекает, например, из [4, следствие теорем 1–3]), что силовская 2-подгруппа группы $\mathrm{Sp}_2(q) = \mathrm{SL}_2(q)$ изоморфна группе кватернионов Q_8 и ее нормализатор в $\mathrm{SL}_2(q)$ изоморфен $\mathrm{SL}_2(3)$. Пусть n — натуральное число. Имеет место следующая цепочка вложений (см., например, [5]):

$$H = Q_8 \wr S_{3n} \hookrightarrow X = \mathrm{SL}_2(3) \wr S_{3n} \hookrightarrow Y = \mathrm{Sp}_2(q) \wr S_{3n} \hookrightarrow G = \mathrm{Sp}_{6n}(q).$$

Мы покажем, что если $\bar{\ } : G \to G/Z(G)$ — естественный эпиморфизм, то

(1) индекс $|\overline{G} : \overline{H}|$ нечетен;

(2) подгруппа $\overline{H}$ не пронормальна в $\overline{G} = \mathrm{PSp}_{6n}(q)$.

Поскольку Q_8 — силовская 2-подгруппа в $\mathrm{Sp}_2(q)$, индекс $|Y : H| = |\,\mathrm{Sp}_2(q) : Q_8|^{3n}$ нечетен. Поэтому индекс $|\overline{Y} : \overline{H}|$ также нечетен. Индекс $|\overline{G} : \overline{Y}|$ нечетен в силу [6, теорема 1(8)]. Отсюда получаем утверждение (1), поскольку $|\overline{G} : \overline{H}| = |\overline{G} : \overline{Y}||\overline{Y} : \overline{H}|$.

Заметим, что $Z(G)$ — 2-группа и $Z(G) = O_2(G)$, так как $|Z(G)| = (2, q-1) = 2$ и группа $\overline{G}$ проста. Поскольку ясно, что $Z(G) \leq H$, подгруппы Y и H имеют нечетные индексы в G и в соответствии с леммой 2 для доказательства утверждения (2) достаточно показать, что подгруппа H не является пронормальной в G.

Допустим, что это не так и H prn G. Тогда по лемме 1 имеем H prn X. Рассмотрим естественный эпиморфизм $^* : X \to X/O_2(X) \cong K \wr S_{3n}$, где K — циклическая группа порядка 3. Тогда $H^* \cong S_{3n}$ и действие группы H^* на базе сплетения $K \wr S_{3n}$ эквивалентно естественному действию группы S_{3n} на подстановочном модуле над полем из трех элементов. По теореме 1 подгруппа H^* не является пронормальной в X^*, вопреки лемме 2 и тому, что H prn X. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вдовин Е.П., Ревин Д.О.** Пронормальность холловых подгрупп в конечных простых группах // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 3. С. 527–542.
2. **Кондратьев А.С., Маслова Н.В., Ревин Д.О.** О пронормальности подгрупп нечетного индекса в конечных простых группах // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1375–1383.
3. **Isaacs M. I.** Finite group theory. Providence: Amer. Math. Soc., 2008. 365 p.
4. **Кондратьев А.С.** Нормализаторы силовских 2-подгрупп в конечных простых группах // Мат. заметки. 2005. Т. 78, № 3. С. 368–376.
5. **Kleidman P., Liebeck M.,** The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. 303 p.
6. **Маслова Н.В.** Классификация максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных простых классических группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 4. С. 100–118.

Поступила 31.12.2015

Кондратьев Анатолий Семенович
д-р физ.-мат. наук
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
профессор
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: a.s.kondratiev@imm.uran.ru

Маслова Наталья Владимировна
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
доцент
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: butterson@mail.ru

Ревин Данила Олегович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
доцент
Новосибирский государственный университет
e-mail: revin@math.nsc.ru