ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 1 2016

УДК 517.977

ОЦЕНИВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ СЛУЧАЙНОГО МНОЖЕСТВА

Б. И. Ананьев

Рассмотрена задача об оценивании случайного множества, представляющего собой область достижимости дифференциального уравнения (ДУ) Ито по начальным данным. Доказано марковское свойство области достижимости в пространстве замкнутых множеств. Для приближенных вычислений случайное начальное множество ДУ аппроксимируется конечным множеством на целочисленной многомерной сетке, а ДУ заменяется многошаговой цепью Маркова. Рассмотрены примеры.

Ключевые слова: стохастическое дифференциальное уравнение, цепь Маркова, случайное множество.

B. I. Anan'ev. Estimation of the evolution of a random set.

An estimation problem for a random set that is a reachability domain of the Ito differential equation with respect to its initial data is considered. The Markov property of the reachability set in the space of closed sets is proved. For the purposes of numerical solution, a random initial set of the differential equation is approximated by a finite set on an integer multidimensional grid, and the differential equation is replaced by a multistep Markov chain. Examples are considered.

Keywords: stochastic differential equation, Markov chain, random set.

Введение

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ задана фильтрация $\mathcal{A}_t$, $t \in [0,T]$, удовлетворяющая обычным условиям: $\mathcal{A}_t \subset \mathcal{A}_s \subset \mathcal{A}$ при $t \leqslant s$, $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_{t+}$, σ-алгебра $\mathcal{A}_0$ пополнена пренебрежимыми множествами. На указанном вероятностном пространстве с фильтрацией рассматривается стохастическое n-векторное дифференциальное уравнение (СДУ) Ито

$$dx_t = b(t, x_t)dt + \sigma(t, x_t)dw_t, \quad t \in [0,T], \tag{0.1}$$

где w_t — стандартный винеровский m-мерный процесс, согласованный с $\mathcal{A}_t$. Предполагаем, что вектор-функция $b(t,x)$ и матричная функция $\sigma(t,x)$ в уравнении (0.1) являются борелевскими отображениями по обеим переменным, удовлетворяющими условиям Липшица и подлинейного роста:

$$\begin{gathered} |b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leqslant c|x-y| \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}^n, \\ |b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leqslant c^2(1+|x|^2), \end{gathered} \tag{0.2}$$

где символом $|G|$ обозначается величина $\sqrt{\mathrm{tr} GG'}$ для матриц G произвольной размерности, $c > 1$. При этих условиях для всякого случайного начального $\mathcal{A}_0$-измеримого вектора ξ, $\mathrm{E}|\xi|^2 < \infty$, существует единственный n-векторный процесс x_t с почти наверное (п.н.) непрерывными траекториями, согласованный с $\mathcal{A}_t$, удовлетворяющий уравнению (0.1) в интегральном смысле и такой, что $x_0 = \xi$ п.н. Данный процесс называется *сильным решением* (см. [1, теорема 6.2.2] или [2, теорема 5.2.1]) уравнения (0.1).

Предположим, что начальный случайный вектор ξ неизвестен и задано лишь включение

$$\xi(\omega) \in S(\omega) \text{ п.н.} \tag{0.3}$$

где S — *случайное замкнутое множество* (СЗМ). Напомним [3–5], что отображение $S : \Omega \to \mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ — совокупность замкнутых подмножеств в $\mathbb{R}^n$, во включении (0.3) называется СЗМ, если множество $\{S \cap K \neq \varnothing\} \in \mathcal{A}_0$ для всякого множества $K \in \mathcal{K}$. Здесь и далее $\mathcal{K}$ — совокупность компактных подмножеств в $\mathbb{R}^n$. В приведенном определении использована измеримость относительно начальной σ-алгебры $\mathcal{A}_0$, в связи с чем СЗМ в (0.3) далее часто обозначается как S_0.

В процессе эволюции системы (0.1) начальное СЗМ S_0 преобразуется в случайное множество S_t. Целью настоящей статьи является точное определение множества S_t как СЗМ и исследование некоторых способов его аппроксимации. В детерминированном случае ($\sigma = 0$) задача сводится к построению *области достижимости* по начальным данным для соответствующего уравнения. Последняя задача интенсивно исследуется многими авторами как при наличии неопределенного управления в системе, так и без него. Отметим книгу [6], где, в частности, рассматриваются вопросы внешней и внутренней аппроксимации областей достижимости детерминированных систем при наличии неопределенного управления. В стохастическом случае рассмотрение осложняется вопросами измеримости получаемых множеств. В случае неполной информации о фазовом состоянии и возмущениях в системе методы оценивания изложены в работах [7;8]. Нам потребуются некоторые неравенства для моментов решений уравнения (0.1). В книге [1, разд. 7.1] установлены неравенства

$$\mathrm{E}|x_t|^{2p} \leqslant (1 + \mathrm{E}|\xi|^{2p})e^{kt}, \quad \mathrm{E}|x_t - \xi|^{2p} \leqslant d(1 + \mathrm{E}|\xi|^{2p})t^p e^{kt}, \tag{0.4}$$

где $p \in \mathbb{N}$, $k = 2p(2p+1)c^2$ и d — константы, зависящие только от числа p, величины c в (0.2) и длины T временного интервала. Здесь и далее $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, E — математическое ожидание. Из неравенств (0.4) с использованием марковского свойства решений получается оценка

$$\mathrm{E}|x_t - x_s|^{2p} \leqslant c_1|t-s|^p \quad \forall t, s \in [0, T], \tag{0.5}$$

где константа c_1 зависит только от p, c, T и $\mathrm{E}|\xi|^{2p}$. Неравенства (0.4) и (0.5) используем ниже для установления п.н. непрерывности решений уравнения (0.1) по начальным данным. Среднеквадратичная непрерывность и непрерывность по вероятности относительно начальных данных для решений стохастических уравнений подробно исследованы в монографии [9]. Однако мы будем использовать более сильное условие п.н. непрерывности.

1. Постановка задачи

Установим вначале требуемое свойство непрерывности решений по начальным данным. Пусть x_t и $\hat{x}_t$ — решения уравнения (0.1) с начальными данными ξ и η соответственно, причем $\mathrm{E}|\xi|^{2p} \leqslant \infty$, $\mathrm{E}|\eta|^{2p} \leqslant \infty$. Положим $g_t = x_t - \hat{x}_t$, $a(t,\omega) = b(t, x_t) - b(t, \hat{x}_t)$, $\gamma(t,\omega) = \sigma(t, x_t) - \sigma(t, \hat{x}_t)$. Тогда по формуле Ито (см. [1, разд. 5.3] или [2, теорема 4.2.1]) находим $|g_t|^{2p} = |\xi - \eta|^{2p} + \int_0^t 2p|g_s|^{2p-2}g_s'(a(s,\omega)ds + \gamma(s,\omega)dw_s) + \int_0^t p|g_s|^{2p-2}|\gamma(s,\omega)|^2 ds + \int_0^t 2p(p-1)|g_s|^{2p-4}|g_s'\gamma(s,\omega)|^2 ds$. Переходя к математическим ожиданиям, получим

$$\mathrm{E}|g_t|^{2p} = \mathrm{E}|\xi - \eta|^{2p} + \int\limits_0^t \mathrm{E}\Big(2p|g_s|^{2p-2}g_s'a(s,\omega) + p|g_s|^{2p-2}|\gamma(s,\omega)|^2$$

$$+ 2p(p-1)|g_s|^{2p-4}|g_s'\gamma(s,\omega)|^2\Big)ds \leqslant \mathrm{E}|\xi - \eta|^{2p} + (2p+1)pc^2 \int\limits_0^t \mathrm{E}|g_s|^{2p} ds.$$

Отсюда, используя неравенство Гронуолла, приходим к оценке

$$\mathrm{E}|x_t - \hat{x}_t|^{2p} \leqslant \mathrm{E}|\xi - \eta|^{2p} e^{(2p+1)pc^2 t}. \tag{1.1}$$

Следовательно, с учетом оценки (0.5) и неравенства Минковского справедливо неравенство

$$\mathrm{E}|x_t - \hat{x}_s|^{2p} \leqslant 2^{2p}\left(c_1|t-s|^p \vee \mathrm{E}|\xi - \eta|^{2p} e^{(2p+1)pc^2 T}\right) \leqslant c_2\left(|t-s|^p \vee \mathrm{E}|\xi - \eta|^{2p}\right), \tag{1.2}$$

где $a\vee b=\max\{a,b\}$, константа $c_2=2^{2p}(c_1\vee e^{(2p+1)pc^2T})$ зависит только от p, c, T и $\mathrm{E}|\xi|^{2p}\vee\mathrm{E}|\eta|^{2p}$.

Пусть $x_t(\omega;t_0,y)$ — решение уравнения (0.1) при $t\geqslant t_0$ с детерминированным начальным условием $x_{t_0}(\omega;t_0,y)=y$. Очевидно, что для этого решения выполняется оценка (1.2) для произвольного $p\in\mathbb{N}$, причем эта оценка равномерна по $t,s\in[t_0,T]$ и $\xi=y,\eta=z\in B_r=\{x:|x|\leqslant r\}$, $r\in\mathbb{N}$. Далее, не ограничивая общности, полагаем $t_0=0$. Поскольку $|y-z|^2\leqslant 2r|y-z|$ при $y,z\in B_r$, то неравенство (1.2) перепишем в виде

$$\mathrm{E}|x_t(\cdot;0,y)-x_s(\cdot;0,z)|^{2p}\leqslant c_3(p,r)|[t,y]-[s,z]|^p, \tag{1.3}$$

где $c_3(p,r)=2rc_2$ и символ $[u,x]$ означает вектор-столбец из $\mathbb{R}^{n+1}$. Докажем лемму.

Лемма 1. *Существуют модификация $\hat{x}_t(\omega;0,y)$ процесса $x_t(\omega;0,y)$ (т.е. $P\{\hat{x}_t(\omega;0,y)\neq x_t(\omega;0,y)\}=0$ $\forall t\in[0,T]$, $\forall y\in\mathbb{R}^n$) и множество $N\in\mathcal{A}$, $P(N)=0$, нулевой вероятности такие, что отображение $[t,y]\mapsto\hat{x}_t(\omega;0,y)$ непрерывно при всяком фиксированном $\omega\in N^c=\Omega\setminus N$. На всяком ограниченном подмножестве из $\mathbb{R}^{n+1}$ указанное отображение локально непрерывно по Гёльдеру с показателем $\lambda\in(0,1/2-(n+1)/(2p))$, если $p>n+1$.*

Доказательство. Воспользуемся результатом [10, теорема II.19], согласно которому при выполнении неравенства (1.3) существует непрерывная модификация $\hat{x}^r_t(\omega;0,y)$ процесса $x_t(\omega;0,y)$ на множестве $[0,T]\times B_r$. То есть найдется множество $N_r\in\mathcal{A}$, $P(N_r)=0$, нулевой вероятности такое, что отображение $[t,y]\mapsto\hat{x}^r_t(\omega;0,y)$ непрерывно при всяком фиксированном $\omega\in N^c_r$, если только $p>n+1$. Модификация $\hat{x}^r_t$ дополнительно обладает свойством локальной непрерывности по Гёльдеру на множестве $[0,T]\times B_r$ с показателем $\lambda\in(0,1/2-(n+1)/(2p))$, а именно для всякого $\omega\in N^c_r$ и для всякого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что

$$|\hat{x}^r_t(\omega;0,y)-\hat{x}^r_s(\omega;0,z)|\leqslant\varepsilon|[t,y]-[s,z]|^\lambda,\ \text{если}\ |[t,y]-[s,z]|\leqslant\delta.$$

Зафиксируем число p и определим отображение $\hat{x}_t(\omega;0,y)=\hat{x}^r_t(\omega;0,y)$ на непересекающихся множествах $[0,T]\times(B_r\setminus B^0_{r-1})$, где B^0_r — открытые шары радиуса r, $\omega\in N^c_r$ для всех $r\in\mathbb{N}$. Тем самым вне множества $N=\cup_{i\geqslant1}N_i$ нулевой вероятности определено искомое непрерывное отображение, которое даже локально непрерывно по Гёльдеру с показателем λ на ограниченных подмножествах в $\mathbb{R}^{n+1}$. □

Замечание 1. За счет выбора большого числа p показатель Гёльдера в лемме 1 может быть приближен к 1/2. Однако он не может равняться 1/2, поскольку известно, что траектории винеровского процесса непрерывны по Гёльдеру с любым показателем, строго меньшим 1/2, [10, с. 96]. Достаточно рассмотреть скалярное уравнение $dx_t=dw_t$. Утверждение, близкое к лемме 1, сформулировано без доказательства в статье [11]. В дальнейшем под процессом $x_t(\omega;0,y)$ будем понимать отображение $\hat{x}_t(\omega;0,y)$, построенное в лемме 1. Аналогично устанавливается непрерывность отображения $x_t(\omega;s,y)$ по всем $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ и y при $p>n+2$.

Замечание 2. Отметим, что отображение $x_t(\cdot;0,y)$ при фиксированных t,y измеримо относительно ω-алгебры $\mathcal{F}^w_t=\sigma\{w(s),s\in[0,t]\}\subset\mathcal{F}_t$, пополненной пренебрежимыми множествами. Напомним, что согласно теореме Леви m-векторный винеровский процесс однозначно определяется условиями: 1) процесс w_t согласован с потоком $\mathcal{A}_t$, имеет п.н. непрерывные траектории и $P\{w_0=0\}=1$; 2) $\mathrm{E}[w_t|\mathcal{F}_s]=w_s$ и $\mathrm{E}[(w_t-w_s)(w_t-w_s)'|\mathcal{F}_s]=I(t-s)$, $t\geqslant s$, (см. [12, теорема 4.2]). Здесь I — единичная $n\times n$-матрица. Известно также, что приращение w_t-w_s является гауссовским вектором с параметрами 0, $I(t-s)$ и не зависит от σ-алгебры $\mathcal{F}_s$ при $t>s$.

Дадим основное определение.

Определение 1. *Случайной областью достижимости* уравнения (0.1) по начальным данным, лежащим в СЗМ S_0, назовем множество $S_t(\omega;S_0)=cl\{x_t(\omega;0,y):y\in S_0(\omega)\}$.

Необходимо показать, что так определенное множество действительно есть СЗМ. Для этого применим теорему Химмельберга [13, теорема 3.5] (см. также [5, теорема 2.3]), согласно которой для СЗМ $S(\omega)$, заданного на полном вероятностном пространстве, условия измеримости множеств полного прообраза $S^{-}(B) = \{\omega : S(\omega) \cap B \neq \varnothing\}$ эквивалентны для компактных, замкнутых, открытых и произвольных борелевских множеств B. Другие эквивалентные условия: функция расстояния $d(x, S(\omega)) = \inf\{|x-y| : y \in S(\omega)\}$ измерима для любого вектора x; существует последовательность $\xi_k(\omega)$ измеримых селекторов для $S(\omega)$ таких, что $S(\omega) = \mathrm{cl}\{\xi_k(\omega), k \in \mathbb{N}\}$ п.н. (условие Кастена); график $\mathrm{graph}\{(\omega, x) \in \Omega \times \mathbb{R}^n : x \in S(\omega)\}$ лежит в произведении $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ σ-алгебр. По еще одной теореме Химмельберга [13, теорема 6.5] композиция $x_t(\omega; 0, S_0(\omega))$ будет слабо измеримым отображением, а поскольку функции расстояния до множества и его замыкания совпадают, то в силу эквивалентности условий измеримости заключаем, что $S_t(\omega; S_0)$ есть $\mathcal{A}_t$-измеримое СЗМ.

Поскольку винеровский процесс может быть задан независимо от случайного множества S_0 на польском пространстве $\mathbf{W}_0^m$ непрерывных m-векторных функций $w(t)$ на $[0, T]$, $w(0) = 0$, с мерой Винера P^w, то, не ограничивая общности, можно считать, что вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ таково, что $\Omega = \mathbf{W}_0^m \times \mathcal{F}$, $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{B}(\mathbf{W}_0^m) \otimes \sigma_f}$ — σ-алгебра, пополненная по мере $P^w \otimes P_0$. Здесь P_0 — вероятностное распределение начального множества на $\mathcal{F}$.

Наша цель — изучить основные свойства СЗМ S_t и его аппроксимации на целочисленной многомерной сетке.

2. Случайные замкнутые множества

В данном разделе излагаются необходимые сведения о случайных замкнутых множествах.

2.1. Общие свойства СЗМ

Пусть $T_S(K) = P(S^{-}(K))$, $K \in \mathcal{K}$, — функция множества, называемая *сопровождающим функционалом* СЗМ. Эта функция обладает следующими свойствами [3; 4]:

(а) $T_S(\varnothing) = 0$ и $0 \leqslant T_S(K) \leqslant 1$ для всякого $K \in \mathcal{K}$;

(б) функция T_S монотонно возрастает ($K_1 \subset K_2 \Rightarrow T_S(K_1) \leqslant T_S(K_2)$) и для $k \geqslant 2$, $K_1, K_2, \ldots, K_k$ в $\mathcal{K}$, $T_S\left(\bigcap_{i=1}^k K_i\right) \leqslant \sum_{\varnothing \neq I \subset 1:k} (-1)^{|I|+1} T_S\left(\bigcup_{i \in I} K_i\right)$;

(в) если $K_k \downarrow K$ (т.е. $K_{k+1} \subset K_k$, $K = \bigcap_{k \geqslant 1} K_k$), то $T_S(K_k) \downarrow T_S(K)$.

Условие (б) называется *свойством ∞-альтернированности*, поэтому функцию множества со свойствами (а)–(в) иногда называют *емкостью ∞-порядка*. Символом $|I|$ обозначено число элементов в множестве I. Сопровождающий функционал играет роль аналога распределения для случайного вектора. Важно отметить, что согласно *теореме Шоке* [3; 4] верно и обратное, т.е. всякой емкости ∞-порядка $T(K)$ сопоставляется единственная вероятностная мера P на измеримом пространстве $(\mathcal{F}, \sigma_f)$, где σ_f — σ-алгебра на $\mathcal{F}$, порожденная семействами $\mathcal{F}_K = \{F \in \mathcal{F} : F \cap K \neq \varnothing\}$. Эта мера обладает свойством $P(\mathcal{F}_K) = T(K)$ для всякого $K \in \mathcal{K}$. Подчеркивая, что сопровождающий функционал строится для СЗМ S_t, будем часто обозначать его как T_t. Приведем пример СЗМ и его сопровождающего функционала.

П р и м е р 1. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ — любая полунепрерывная сверху (пн. св.) функция. На вероятностном пространстве $([0, 1], \mathcal{L}[0, 1], \lambda)$ с обычной мерой Лебега λ рассмотрим СЗМ $S(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geqslant \xi(\omega)\}$, где $\xi(\omega) \equiv \omega$ — равномерно распределенная случайная величина. Поскольку $\{S(\omega) \cap K \neq \varnothing\} = \{\max_{x \in K} f(x) \geqslant \omega\}$ и $\lambda\{\max_{x \in K} f(x) \geqslant \omega\} = \max_{x \in K} f(x)$, то функция множества $T_S(K) = \max_{x \in K} f(x)$ — сопровождающий функционал СЗМ $S(\omega)$, удовлетворяющий свойствам (а)–(в).

Другими примерами СЗМ служат случайные шары $B_\xi(\zeta)$, где ξ — случайный вектор и $\zeta \geqslant 0$ — случайная величина, выпуклые оболочки конечного набора случайных векторов $\mathrm{co}\{\xi_i,\ i \in 1 : k\}$. Функция множества T на $\mathcal{K}$ называется *макситивной*, если $T(A \cup B) = T(A) \vee T(B)$. Такая функция обязательно удовлетворяет условию (б). Если она еще обладает и свойством (в), то функция $f(x) = T(\{x\})$ является пн. св., и функция множества T может быть представлена как в примере 1. Рассмотрим распределение $\mu(K) = P\{\xi \in K\}$ измеримого селектора ξ для S на компактных множествах. Ввиду включения (0.3) имеем

$$\mu(K) \leqslant T(K) \ \text{ для всех } \ K \in \mathcal{K}. \tag{2.1}$$

Определим для емкости ∞-порядка T *ядро* $\mathcal{C}(T)$, состоящее из всех вероятностных распределений μ на $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию (2.1). Справедлива *теорема Норберга* [4, с. 122]: если для пары $\{\mu, T\}$, состоящей из вероятностного распределения μ и емкости ∞-порядка T, верно включение $\mu \in \mathcal{C}(T)$, то существуют вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, случайный вектор ξ и СЗМ S, заданные на этом пространстве и такие, что выполняется включение (0.3), а μ и T служат, соответственно, их распределениями. Сопровождающий функционал согласно [5, теорема 5.13] можно рассматривать как верхнюю вероятность для семейства $\mathcal{C}(T)$, т. е. $T(K) = \sup\{\mu(K) : \mu \in \mathcal{C}(T)\}$, $K \in \mathcal{K}$, причем верхняя грань здесь достигается для каждого фиксированного K. Что касается топологических свойств множества $\mathcal{F}$ замкнутых подмножеств из $\mathbb{R}^n$, то оно снабжается обычно топологией Фелла $\mathcal{T}_f$ [5], порождаемой подбазой, состоящей из семейств $\mathcal{F}_G$ и $\mathcal{F}^K = \{F \in \mathcal{F} : F \cap K = \varnothing\}$, где G и K — произвольные, соответственно, открытые и компактные множества. В топологии $\mathcal{T}_f$ множество $\mathcal{F}$ становится компактным хаусдорфовым пространством со счетной базой и, следовательно, польским. Его σ-алгебра σ_f, рассмотренная выше, совпадает тогда с борелевской σ-алгеброй $\mathcal{B}(\mathcal{F})$. Сходимость $S_k \to S$ в топологии Фелла эквивалентна сходимости функций расстояния $d(x, S_k) \to d(x, S)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Последовательность компактных СЗМ сходится в метрике Хаусдорфа тогда и только тогда, когда она сходится в топологии Фелла и равномерно ограничена. Будем называть СЗМ S *простым*, если существует не более чем счетное разбиение $\Omega = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ такое, что $S(\omega) \equiv S_i$ при $\omega \in \Omega_i$. Здесь S_i — замкнутые множества для каждого $i \in \mathbb{N}$, знак $\bigsqcup$ означает объединение непересекающихся множеств.

Если T_S — сопровождающий функционал для СЗМ S, заданного на пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, то наряду с ядром $\mathcal{C}(T_S)$ рассматривают множество $\mathbb{S}(S)$ всех $\mathcal{A}$-измеримых селекторов для S. Обозначим через $\mathcal{M}(S) = \{\mu_\xi \colon \xi \in \mathbb{S}(S)\}$ множество вероятностных мер на $\mathbb{R}^n$, индуцированных всевозможными селекторами. Пусть $\mathcal{M}(S)(A) = \{\mu_\xi(A) \colon \xi \in \mathbb{S}(S)\}$ — числовое подмножество отрезка $[0,1]$ для произвольного события $A \in \mathcal{A}$. Если ввести еще одно семейство вероятностных мер $\Delta(S) = \{\mu \colon \mu(A) \in \mathcal{M}(S)(A) \ \forall A \in \mathcal{A}\}$, то будут выполняться включения $\mathcal{M}(S) \subset \Delta(S) \subset \mathcal{C}(T_S)$, причем эти включения, вообще говоря, строгие [14]. Введенные множества в разной степени характеризуют степень неточности знания случайной величины ξ, удовлетворяющей включению (0.3). Отметим, что любая емкость ∞-порядка допускает расширение $T(B) = \sup\{T(K) \colon K \in \mathcal{K},\ K \subset B\}$ для всех $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Если величина $T_S(B) = P(S^-(B))$ является верхней границей для $\mu_\xi(B)$, где ξ — селектор, то величина $1 - T_S(B^c) = P(S_-(B))$ будет нижней границей. Здесь $S_-(B) = \{\omega : \varnothing \neq S(\omega) \subset B\}$ — нижний прообраз мультифункции.

Рассмотрим ряд элементарных способов построения ограничивающего СЗМ для некоторых классов начальных распределений уравнения (0.1). Пусть семейство $\{\mu_i,\ i \in I\}$ начальных распределений абсолютно непрерывно относительно конечной борелевской меры μ_0 на $\mathbb{R}^n$ и функция $f_0(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$ пн. св., где f_i — плотности соответствующих мер. Тогда функция множества $T(K) = \max_{x \in K} f_0(x) \mu_0(\mathbb{R}^n)$ служит согласно примеру 1 сопровождающим функционалом некоторого СЗМ, ограничивающего по теореме Норберга любой начальный вектор с распределением из семейства. Более общо, пусть $\{\mu_i,\ i \in I\}$ — семейство вероятностных распределений, для которого функция множества $T(K) = \sup_{i \in I} \mu_i(K)$ является емкостью ∞-порядка. Тогда опять же по теореме Норберга любой начальный вектор с распределением из семейства будет включаться в некоторое СЗМ с сопровождающим функционалом T. Можно утверждать даже следующее. Если семейство $\{\mu_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ не более чем счетно, то, конструируя произведение соответствующих вероятностных пространств, можно получить общее вероятностное пространство, на котором включение (0.3) выполняется для всех начальных векторов, соответствующих μ_i.

П р и м е р 2. В качестве конкретного семейства распределений возьмем рассматриваемую в робастной статистике модель ε-загрязнения $\{\mu_\alpha : \mu_\alpha = (1-\varepsilon)\mu_0 + \varepsilon\alpha\}$ с несчетным количеством элементов, где параметром служит любое вероятностное распределение α на $\mathbb{R}^n$. Очевидно, что функция множества $T(K) = \sup_\alpha \mu_\alpha(K) = (1-\varepsilon)\mu_0(K)+\varepsilon$ для $K \neq \varnothing$ и равная нулю для $K = \varnothing$ удовлетворяет свойствам (а)–(в) и, следовательно, однозначно определяет некоторое СЗМ. Это множество в $\mathbb{R}^n$ может быть представлено как $S(x,y) = \{x\}$, если $y = 0$, и $S(x,y) = \mathbb{R}^n$, если $y = 1$, на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, где $\Omega = \mathbb{R}^n \times \{0,1\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes 2^{\{0,1\}}$, $P = \mu_0 \otimes p_\varepsilon$, $p_\varepsilon(0) = 1-\varepsilon$, $p_\varepsilon(1) = \varepsilon$. Действительно, по формуле полной вероятности будем иметь $P\{S \in \mathcal{F}_K\} = P[\{S \in \mathcal{F}_K\}|y=0]p_\varepsilon(0) + P[\{S \in \mathcal{F}_K\}|y=1]p_\varepsilon(1) = \mu_0(K)(1-\varepsilon)+\varepsilon$ для $K \neq \varnothing$.

2.2. Аппроксимация СЗМ на целочисленной многомерной сетке

Под целочисленной многомерной сеткой будем понимать множество $\mathbb{Z}^n_N$ точек x в $\mathbb{R}^n$, для которых каждая компонента имеет вид $x_i = k2^{-N}$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$ при зафиксированном $N \in \mathbb{N}$. Здесь $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел. Рассмотрим топологическое пространство $\left(\mathbb{Z}^n_N, 2^{\mathbb{Z}^n_N}\right)$ с дискретной топологией. Это локально-компактное хаусдорфово пространство со счетной базой (ЛКС-пространство), в котором топология совпадает с борелевской σ-алгеброй. Если число N фиксировано, будем опускать его из обозначения $\mathbb{Z}^n_N$. Пусть S — некоторое СЗМ, заданное на полном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Определим специальным образом индуцированную вероятность на множестве $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^n) = 2^{\mathbb{Z}^n}$ всех подмножеств сетки $\mathbb{Z}^n$. Отметим, что непосредственное определение вероятности путем вычисления $P(S^-(B))$, где $B \subset \mathbb{Z}^n$, имеет мало смысла, поскольку такая вероятность весьма часто будет тождественно равна нулю. Достаточно рассмотреть СЗМ $S = \{\xi\}$, где ξ — гауссовский вектор. Далее каждой точке $v \in \mathbb{Z}^n$ поставим в соответствие многомерный куб $\hat{v} = \times_{i=1}^n [v_i, v_i + 2^{-N}]$, а каждому множеству $V \subset \mathbb{Z}^n$ поставим в соответствие объединение $\hat{V} = \cup_{v\in V} \hat{v}$ соответствующих кубов $\hat{v}$. Отметим, что внутренности кубов $\hat{u}$ и $\hat{v}$ не пересекаются, если $u \neq v$. Определим множества $S_N = \{v \in \mathbb{Z}^n : \hat{v} \cap S \neq \varnothing\}$ и $\hat{S}_N = \{\hat{v} : \hat{v} \cap S \neq \varnothing\}$. Поскольку $S_N = (S - B_N) \cap \mathbb{Z}^n$, где $B_N = \times_{i=1}^n [0, 2^{-N}]$, то множество S_N является СЗМ. Множество $\hat{S}_N = S_N + B_N$ также СЗМ. Справедлива

Лемма 2. *На измеримом пространстве* $\left(\mathcal{P}(\mathbb{Z}^n), 2^{\mathcal{P}(\mathbb{Z}^n)}\right)$ *существует вероятность* P_S *такая, что* $P_S(\mathcal{F}_V) = F_S(V) = P\{S_N \in \mathcal{F}_V\} = P(S^-(\hat{V}))$ *для всех конечных подмножеств* $V \subset \mathbb{Z}^n$. *Здесь* $\mathcal{F}_V = \{A \subset \mathbb{Z}^n : A \cap V \neq \varnothing\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку множества $\{S_N \cap V \neq \varnothing\}$ и $\{S \cap \hat{V} \neq \varnothing\}$ совпадают, то функция $F_S(V)$, заданная на конечных (компактных) подмножествах из $\left(\mathbb{Z}^n, 2^{\mathbb{Z}^n}\right)$, однозначно определена. Эта функция является емкостью ∞-порядка, поскольку обладает

(1) $F_S(\varnothing) = 0$, $0 \leqslant F_S(V) \leqslant 1$ для всякого конечного V;

(2) F_S монотонно возрастает ($V_1 \subset V_2 \Rightarrow F_S(V_1) \leqslant F_S(V_2)$) и для $k \geqslant 2$, конечных $K_1, K_2, \ldots, K_k$ имеем $F_S\left(\bigcap_{i=1}^k K_i\right) \leqslant \sum_{\varnothing \neq I \subset 1:k} (-1)^{|I|+1} F_S\left(\bigcup_{i\in I} K_i\right)$.

Свойства (1), (2) совпадают со свойствами (а), (б) общих СЗМ, так как для функции $P(S^-(\hat{V}))$ выполняются условия ∞-альтернированности. Условие (в) для емкостей F_S выполняется автоматически. Осталось воспользоваться теоремой Шоке [3; 4], справедливой для любых ЛКС-пространств. Согласно теореме на пространстве $\left(\mathcal{F}(\mathbb{Z}^n), 2^{\mathcal{F}(\mathbb{Z}^n)}\right)$ замкнутых подмножеств существует единственная вероятность P_S, порожденная сопровождающим функционалом $F_S(V) = P(S^-(\hat{V}))$ со свойствами (1), (2) на всех конечных подмножествах. Поскольку топология дискретна, множество $\mathcal{F}(\mathbb{Z}^n)$ всех замкнутых подмножеств совпадает с $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^n)$. Таким образом, для всякого семейства $\mathbf{B} \in 2^{\mathcal{P}(\mathbb{Z}^n)}$ существует вероятность $P_S(\mathbf{B})$. □

Из общих свойств емкостей сразу следует, что соотношение $P_S(\mathcal{F}_V) = F_S(V) = P\{S_N \in \mathcal{F}_V\} = P(S^-(\hat{V}))$ продолжается на все подмножества $V \subset \mathbb{Z}^n$ с сохранением свойств (1), (2).

Чтобы подчеркнуть зависимость функций из (1), (2) от N, будем иногда обозначать их как F_S^N. Также и вероятность в лемме 2 обозначим как P_S^N.

Множества $\hat{S}_N$ будем называть *аппроксимацией сверху СЗМ S* на сетке $\mathbb{Z}^n$. Действительно, имеем $S \subset \hat{S}_{N+1} \subset \hat{S}_N$ для всякого $N \in \mathbb{N}$. Кроме того, ясно, что $\hat{S}_N \downarrow S$ в топологии Фелла почти наверное. Метрика Хаусдорфа здесь неприменима, поскольку множества могут быть неограниченными. Однако для тех элементарных событий ω, где $S(\omega)$ ограничено, сходимость будет и по метрике Хаусдорфа. Соотношение между множествами S_N и $\hat{S}_N$ выражается следующим образом. Пусть $\hat{\mathbb{Z}}_N^n = \{\hat{v} : v \in \mathbb{Z}_N^n\}$ — множество всех кубов на сетке и $\mathcal{P}(\hat{\mathbb{Z}}_N^n)$ — множество всех подмножеств из $\hat{\mathbb{Z}}_N^n$. Тогда биективное отображение $S \xrightarrow{g_N} \hat{S}$, где $g_N(S) = S + B_N$, является изоморфизмом вероятностных пространств $\big(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_N^n), 2^{\mathcal{P}(\mathbb{Z}_N^n)}, P_S^N\big)$ и $\big(\mathcal{P}(\hat{\mathbb{Z}}_N^n), 2^{\mathcal{P}(\hat{\mathbb{Z}}_N^n)}, PS^{-1}\big)$, причем $P_S^N g_N^{-1} = PS^{-1}$. Если рассматривать множества S_N как вложения в $\mathcal{F}$, то ввиду п.н.-сходимости функций $d(x, S_N) \to d(x, S)$ при $N \to \infty$ для всех векторов $x \in \mathbb{R}^n$, заключаем, что S_N также сходится к S в топологии Фелла и по метрике Хаусдорфа, если S ограничено.

Аналогично рассматривается и *аппроксимация снизу* СЗМ S на сетке $\mathbb{Z}^n$. Определим множества $s_N = \{v : \hat{v} \subset S\}$ и $\check{S}_N = \{\hat{v} : \hat{v} \subset S\}$. Эти множества являются замкнутыми и измеримыми. Для тех элементарных событий ω, где $\mathrm{int} S \neq \varnothing$, эти множества также п.н. сходятся в топологии Фелла к S, а также и по метрике Хаусдорфа, если S ограничено.

Рассмотрим частный случай, когда множество S равномерно ограничено. В этом случае можно считать, что для каждого фиксированного N построенные выше множества $s_N \subset S_N$ и $\check{S}_N \subset S \subset \hat{S}_N$ состоят из конечного числа элементов, не превышающего максимального значения M_N. Пусть $\hat{S}_N \subset \hat{\mathcal{V}}_N$ п.н., где множество кубов $\hat{\mathcal{V}}_N$ содержит M_N элементов. Тогда вероятность P_S^N сосредоточена на множестве 2^{V_N}, где V_N — совокупность соответствующих вершин. Это означает, что $\sum_{U \subset V_N} P\{S_N = U\} = 1$. Рассмотрим полезную двойственную конструкцию и определим функцию $G_S(U) = P(S_-(\hat{U}))$ на множествах $U \subset V$ (вновь опускаем индексы N). Имеет место

Лемма 3. *Если* СЗМ $S(\omega) \neq \varnothing$ *п.н., то функция G_S обладает следующими свойствами*:

(1) $G_S(\varnothing) = 0$, $0 \leqslant G_S(U) \leqslant 1$ *для всякого* $U \subset V$;

(2) G_S *монотонно возрастает* $(U_1 \subset U_2 \Rightarrow G_S(U_1) \leqslant G_S(U_2))$ *и для* $k \geqslant 2$, $K_1, K_2, \ldots, K_k$ *в* V *имеем* $G_S\left(\bigcup_{i=1}^k K_i\right) \geqslant \sum_{\varnothing \neq I \subset 1:k} (-1)^{|I|+1} G_S\left(\bigcap_{i \in I} K_i\right)$.

Доказательство. Свойство (1) очевидно. В силу эквивалентности различных определений измеримости СЗМ заключаем, что вероятность $P(S_-(B)) = 1 - P(S^-(B^c)) = 1 - T_S(B^c)$ определена для любого множества $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, причем свойство ∞-альтернированности сопровождающего функционала T_S сохраняется для произвольных K_i, $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Неравенство в (2) следует из цепочки $G_S\big(\bigcup_{i=1}^k K_i\big) = P\big(S_-(\widehat{\bigcup_{i=1}^k K_i})\big) = P\big(S_-\big(\bigcup_{i=1}^k \hat{K}_i\big)\big) = 1 - T_S\big(\bigcap_{i=1}^k \hat{K}_i^c\big) \geqslant 1 - \sum_{\varnothing \neq I \subset 1:k} (-1)^{|I|+1} T_S\big(\bigcup_{i \in I} \hat{K}_i^c\big) = 1 - \sum_{\varnothing \neq I \subset 1:k} (-1)^{|I|+1} \big(1 - P\big(S_-\big(\bigcap_{i \in I} \hat{K}_i\big)\big)\big) \geqslant \sum_{\varnothing \neq I \subset 1:k} (-1)^{|I|+1} G_S\big(\bigcap_{i \in I} K_i\big)$, поскольку $\sum_{\varnothing \neq I \subset 1:k} (-1)^{|I|+1} = 1$ для всякого $k \in \mathbb{N}$ и $\bigcap_{i \in I} \hat{K}_i \supset \widehat{\bigcap_{i \in I} K_i}$. Равенство следует из соотношения для биномиальных коэффициентов: $C_k^1 - C_k^2 + \cdots + (-1)^{k+1} C_k^k = 1$. Свойство (2) называется ∞-*монотонностью*. $\square$

Теперь установим, что функция G_S однозначно определяет распределение вероятностей $g_S(U) \geqslant 0$ на 2^V с необходимым свойством $\sum_{\varnothing \neq U \subset V} g_S(U) = 1$. Достаточно рассмотреть функцию

$$g_S(U) = \sum_{K \subset U} (-1)^{|U \setminus K|} G_S(K) \quad \forall U \in 2^V. \tag{2.2}$$

В [4, теорема 3.2] показано, что функция вида (2.2) является неотрицательной и обладает свойством

$$G_S(U) = \sum_{K \subset U} g_S(K) \quad \forall U \in 2^V. \tag{2.3}$$

Так как $G_S(V) = 1$, заключаем, что $\sum_{U \subset V} g_S(U) = 1$. Таким образом, функция множества (2.2) действительно задает распределение вероятностей на конечном множестве 2^V. Чтобы подчеркнуть зависимость функций (2.2), (2.3) от числа N, будем иногда писать g_S^N и G_S^N. Связь между функциями из леммы 2 и леммы 3 выражается неравенством

$$1 - F_S(U^c) \leqslant G_S(U), \text{ где } U^c = V \setminus U. \tag{2.4}$$

Действительно, справедливо включение $\{S_N \subset U\} = \{\hat{S}_N \subset \hat{U}\} \subset \{S \subset \hat{U}\}$. Тогда $P\{S_N \subset U\} = 1 - P\{S_N \cap U^c \neq \varnothing\} = 1 - F_S(U^c) \leqslant P\{S \subset \hat{U}\} = G_S(U)$.

Пример 3. Рассмотрим множество из примера 1, предположив, что оно равномерно ограничено. Здесь $F_S(U) = \max f(\hat{U})$ для всякого множества $U \subset V$ на сетке. Если функция f непрерывна, то неравенство (2.4) превращается в равенство. Возьмем конкретную функцию $f(x) = 1 - |x|_\infty$, где $|\cdot|_\infty = \max_{i \in 1:n} |x_i|$. Тогда СЗМ сосредоточено на единичном кубе $\{x : |x|_\infty \leqslant 1\}$. Задание сетки $\mathbb{Z}_N^n$ приводит к делению единичного куба на $M_N = 2^n(N+1)^n$ подкубов. Пусть $n = 2$, $N = 1$, тогда вычисления по формулам (2.2)–(2.4) приводят к тому, что аппроксимационное множество S_1 с равной вероятностью 1/2 сосредоточено в 2 "точках": K^* и V, т. е. $g_S(K^*) = 1/2$, $g_S(V) = 1/2$. Здесь K^* — это 4 вершины квадратов $\hat{v}$, для которых $d_\infty(\hat{v}, 0) = 0$.

Пример 4. Вернемся к примеру 2, где СЗМ неограниченно. Здесь $F_S(U) = (1 - \varepsilon)\mu_0(\hat{U}) + \varepsilon$, если $\varnothing \neq U \subset \mathbb{Z}^n$, и $F_S(\varnothing) = 0$. Следовательно, $P\{S \subset \hat{U}\} = (1-\varepsilon)\mu_0(\hat{U})$, если $\hat{U} \neq \mathbb{Z}^n$, и $P\{S \subset \mathbb{Z}^n\} = 1$. Обозначим левую часть этого равенства через $G_S(U)$, как в лемме 3. Неравенство (2) превратится в равенство, если все $K_i \neq \mathbb{Z}^n$. Для конечных множеств U равенства (2.2), (2.3) также справедливы. Однако $\sum_U g_S(U) < 1$, если сумма берется по всем конечным подмножествам $U \subset \mathbb{Z}^n$.

В связи с последними примерами введем

Определение 2. Будем говорить, что СЗМ S является *конечно-аппроксимируемым* на сетке, если для всякого $N \in \mathbb{N}$ имеем $F_S(K_k^c) \downarrow 0$ при $K_k \uparrow \mathbb{Z}_N^n$, где K_k — произвольная возрастающая последовательность конечных подмножеств.

Из определения 2 вытекает равенство $\sum_{K \in \mathcal{J}} g_S(K) = 1$ для конечно-аппроксимируемого СЗМ S, где $\mathcal{J} = \mathcal{J}_N$ — счетное множество всех конечных подмножеств из $\mathbb{Z}_N^n$. Последнее равенство получается с помощью соотношений (2.2) и (2.3), справедливых для всех конечных подмножеств U. Так как $g_S(K) = P\{S_N = K\}$, то конечная аппроксимируемость означает, что $P\{S_N = U\} = 0$ для всякого бесконечного подмножества $U \subset \mathbb{Z}_N^n$. Действительно, рассмотрим счетную сумму непересекающихся событий $\{S_N = K\}$ по всем $K \in \mathcal{J}$ и $\{S_N = U\}$. Ее вероятность равна 1, откуда и следует утверждение. Нетрудно проверить, что любое равномерно ограниченное СЗМ будет конечно-аппроксимируемым на сетке. Множество в примере 4 не является конечно-аппроксимируемым.

3. Преобразование СЗМ в силу стохастических дифференциальных уравнений

Предположим, что существует измеримая функция $\zeta(\omega) \geqslant 0$ такая, что

$$\|S_0(\omega)\| = \sup_{x \in S_0(\omega)} |x| \leqslant \zeta(\omega), \quad \mathrm{E}\zeta^2 \leqslant \infty. \tag{3.1}$$

При условии (3.1) и условиях (0.2) на СДУ будет существовать единственное решение $x_t(\omega;\xi)$ уравнения (0.1) для всякого селектора $\xi \in \mathbb{S}(S_0)$. С другой стороны, согласно замечанию 1 после леммы 1 существует решение $x_t(\omega; s, y)$, непрерывное по всем $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ и детерминированным y при $\omega \in N^c$, где $P(N) = 0$. Тогда $x_t(\omega;\xi) = x_t(\omega; 0, \xi(\omega)) \in S_t(\omega; S_0)$ п.н. Множества S_t обладают полугрупповым свойством и образуют марковский процесс. Чтобы установить эти факты, наложим некоторые дополнительные условия и предположим, не ограничивая общности, что $\Omega = \mathbf{W}_0^m$, т. е. элементарные события ω суть непрерывные функции, а P — мера Винера. Будем использовать оператор приращений Дынкина $\varphi_s\omega = \omega(t) - \omega(s)$ при $t \in [s, T]$ и $\varphi_s\omega = 0$ при $t \in [0, s]$. Этот оператор действует на любую случайную величину, заданную на Ω, по правилу $\varphi_s\xi(\omega) = \xi(\varphi_s\omega)$. Отметим, что величина $\varphi_s\xi(\omega) = \xi(\varphi_s\omega)$ не зависит от σ-алгебры $\mathcal{A}_t = \sigma\{\omega : \omega(t_1) \in B_1, \dots, \omega(t_k) \in B_k\}$, где $0 < t_1 < \dots < t_k \leqslant t$, $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, $i \in 1 : k$.

Теорема 1. *Пусть* $P_0\{F \in \mathcal{K}\} = 1$ *и* $\int_{\mathcal{F}} \|F\|^2 P_0(dF) < \infty$, *где* P_0 *— вероятностное распределение начального множества на измеримом пространстве* $(\mathcal{F}, \sigma_f)$, *т. е. начальное множество* S_0 *имеет п.н. компактные значения и выполняется условие* (3.1). *Тогда* $S_t = x_t(\omega; 0, S_0) = x_t(\varphi_s\omega; s, S_s)$ *п.н. для* $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, *где* $x_t(\omega; s, y)$ *— решение уравнения* (0.1), *определенное в замечании* 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выше отмечено, что существует множество $N \subset \mathbf{W}_0^m$, $P(N) = 0$, такое, что функция $x_t(\omega; s, y)$ непрерывна по s, y при $\omega \in N^c$. В силу [15, теорема 1, §12.5] справедливо равенство $x_t(\omega; 0, y) = x_t(\varphi_s\omega; s, x_s(\omega; 0, y))$ п.н. Для $\omega \in N^c$ функции непрерывны и отображают компактные множества в компактные. Следовательно, $x_t(\omega; 0, K) = x_t(\varphi_s\omega; x_s(\omega; 0, K))$ для всех $K \in \mathcal{K}$ и $\omega \in N^c$. Отсюда получаем заключение теоремы, причем равенство выполняется п.н. по мере $P \otimes P_0$ относительно пополненной σ-алгебры $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{B}(\mathbf{W}_0^m) \otimes \sigma_f}$. $\square$

Для линейных уравнений заключение теоремы 1 выполняется без дополнительного условия о компактности значений начального множества. Действительно, рассмотрим уравнение

$$dx_t = (A(t)x_t + b(t))dt + \sum_{j=1}^m (C_j(t)x_t + \sigma_j(t))dw_t^j, \tag{3.2}$$

где $A(\cdot), C_1(\cdot), \dots, C_m(\cdot) \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^{n\times n})$, $b(\cdot), \sigma_1(\cdot), \dots, \sigma_m(\cdot) \in L^2(0, T; \mathbb{R}^n)$; w_t^j — независимые при разных j стандартные винеровские процессы.

Теорема 2. *Для уравнения* (3.2) *с коэффициентами, удовлетворяющими приведенным условиям, имеем* $S_t = x_t(\omega; 0, S_0) = x_t(\varphi_s\omega; s, S_s)$ *п.н. для* $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ *и для всякого начального* СЗМ S_0.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Phi(t, s)$ — матричное решение уравнения

$$d\Phi(t, s) = A(t)\Phi(t, s)dt + \sum_{j=1}^m C_j(t)\Phi(t, s)dw_t^j, \quad t \geqslant s, \quad \Phi(s, s) = I.$$

Такое решение существует и единственно, причем обратная матрица $\Psi(t, s) = \Phi^{-1}(t, s)$ также существует и удовлетворяет уравнению

$$d\Psi(t, s) = \Psi(t, s)\Big[-A(t) + \sum_{j=1}^m C_j^2(t)\Big]dt - \sum_{j=1}^m \Psi(t, s)C_j(t)dw_t^j, \quad t \geqslant s, \quad \Psi(s, s) = I.$$

Очевидно, данные матрицы являются функциями от $\varphi_s\omega$ и, следовательно, не зависят от σ-алгебры $\mathcal{A}_t$. С помощью введенных матриц можем записать решение (см., например, [16, теорема 1.6.14])

$$x_t(\varphi_s\omega; s, y) = \Phi(t, s)\Big[y + \int_s^t \Psi(\tau, s)\Big(b(\tau) - \sum_{j=1}^m C_j(\tau)\sigma_j(\tau)\Big)d\tau + \sum_{j=1}^m \int_s^t \Psi(\tau, s)\sigma_j(\tau)dw_\tau^j\Big]. \tag{3.3}$$

В силу полугруппового свойства матриц $\Phi(t,0) = \Phi(t,s)\Phi(s,0)$ и формулы (3.3) получаем заключение теоремы. $\square$

Введем

Определение 3. Пусть $S_t^{s,F}$ — семейство СЗМ при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, согласованное с возрастающим потоком σ-алгебр $\varphi_s\mathcal{A}_t$. Это семейство называется *марковским*, если

1) функция $p(s,F,t,\mathcal{V}) = P\{S_t^{s,F} \in \mathcal{V}\}$ измерима по Борелю как функция $F \in \mathcal{F}$ для всякого $t \geqslant s$ и всякого $\mathcal{V} \in \sigma_f$;

2) $P\{S_s^{s,F} = F\} = 1$ для всякого $F \in \mathcal{F}$;

3) если $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, $F \in \mathcal{F}$ и $\mathcal{V} \in \sigma_f$, то $P\big[\{S_t^{0,F} \in \mathcal{V}\}|\mathcal{A}_s\big] = p(s, S_t^{s,S_s^{0,F}}, t, \mathcal{V})$ п.н.

Аналогично определяется марковское семейство компактных СЗМ $S_t^{s,K}$. При этом в определении 3 замкнутое множество F следует заменить на компактное K, семейство $\mathcal{F}$ — на семейство $\mathcal{K}$, которое наделяется миопической топологией $\mathcal{T}_k$, порождаемой подбазой, состоящей из семейств $\mathcal{K}_G$ и $\mathcal{K}^F = \{K \in \mathcal{K} : K \cap F = \varnothing\}$, где G и F — произвольные, соответственно, открытые и замкнутые множества. Наконец, борелевскую σ-алгебру σ_f следует заменить на борелевскую σ-алгебру $\sigma_k = \mathcal{B}(\mathcal{K})$.

Теорема 3. *Семейство* $S_t^{s,F} = s_t(\varphi_s\omega; s, F)$ *является марковским, если рассматривается линейное уравнение* (3.2). *В общем случае уравнения* (0.1) *семейство* $S_t^{s,K} = s_t(\varphi_s\omega; s,\ K)$ *является марковским.*

Доказательство. В силу формулы (3.3) СЗМ $S_t^{s,F} = s_t(\varphi_s\omega; s, F)$ является невырожденным линейным преобразованием замкнутого множества F. Поэтому при фиксированном ω множество $S_t^{s,F}$ непрерывно по F в топологии Фелла $\mathcal{T}_f$. При фиксированном F это множество измеримо по ω относительно σ-алгебры $\varphi_s\mathcal{A}_t \subset \mathcal{A}_t$ по построению. Следовательно, множество $\{S_t^{s,F} \in \mathcal{V}\}$ измеримо в произведении σ-алгебр $\varphi_s\mathcal{A}_t \otimes \sigma_f$. Отсюда величина $p(s,F,t,\mathcal{V}) = P\{S_t^{s,F} \in \mathcal{V}\} = \mathrm{E}1_{\{S_t^{s,F} \in \mathcal{V}\}}$ измерима по F согласно теореме Фубини. Здесь 1_A — характеристическая функция множества $A \in \varphi_s\mathcal{A}_t \otimes \sigma_f$. В общем случае доказать совместную измеримость мультифункции $S_t^{s,K}$ относительно $\varphi_s\mathcal{A}_t \otimes \sigma_f$ затруднительно, поскольку при фиксированном ω функция $s_t(\varphi_s\omega; s, K)$ будет, вообще говоря, лишь п.н. снизу по K. Поэтому мы расширяем произведение σ-алгебр до $\varphi_s\mathcal{A}_t \otimes \sigma_k$ (в миопической топологии $\mathcal{T}_k$ больше открытых множеств, чем в топологии Фелла $\mathcal{T}_f$). Тогда функция $s_t(\varphi_s\omega; s, K)$ будет уже непрерывной по K в метрике Хаусдорфа и в топологии $\mathcal{T}_k$ при фиксированном $\omega \in N^c$. Рассуждения, аналогичные проведенным, показывают, что величина $p(s,K,t,\mathcal{V})$ будет измеримой по K относительно σ-алгебры σ_k, если $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ и $\mathcal{V} \in \sigma_k$. Итак, свойство 1) определения 3 установлено. Свойство 2) очевидно. Для доказательства свойства 3) заметим, что в выражениях $P\big[\{S_t^{0,F} \in \mathcal{V}\}|\mathcal{A}_s\big]$ и $P\big[\{S_t^{0,K} \in \mathcal{V}\}|\mathcal{A}_s\big]$ можем подставить множества $S_t^{s,S_s^{0,F}}$ и $S_t^{s,S_s^{0,K}}$ вместо $S_t^{0,F}$ и $S_t^{0,K}$ соответственно в силу теорем 1 и 2. Далее, запишем условные вероятности как математические ожидания $\mathrm{E}\big[1_{\{S_t^{0,F} \in \mathcal{V}\}}|\mathcal{A}_s\big]$ и $\mathrm{E}\big[1_{\{S_t^{0,K} \in \mathcal{V}\}}|\mathcal{A}_s\big]$ и также заменим соответствующие множества. Утверждение будет следовать из формулы

$$\mathrm{E}[f(\varphi_s\omega, \eta(\omega))|\mathcal{A}_s] = F(\eta),$$

где $f(\omega,x)$ — неотрицательная функция на $\mathbf{W}_0^n \times \mathbb{M}$, измеримая относительно $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{M})$. Здесь $\mathbb{M}$ — любое ЛКС-пространство, $F(x) = \mathrm{E}f(\cdot,x)$, и η — любая $\mathcal{A}_s$-измеримая величина со значениями в $\mathbb{M}$. Подобная формула приведена в [15, с. 247] для случая $\mathbb{M} = \mathbb{R}^n$. Однако она верна и для любых ЛКС-пространств. $\square$

Подводя итог рассуждениям, заключаем, что мультифункция S_t^{0,S_0} является марковским процессом в ЛКС-пространстве $\mathcal{F}$ (или $\mathcal{K}$) с начальным распределением P_0.

4. Аппроксимационное описание эволюции начальных СЗМ

Пусть задано начальное конечно-аппроксимируемое множество S_0. Строим множества $S_{0,N}$ и $\hat{S}_{0,N}$ согласно подразд. 2.2. Найти вероятность $P\{\mathrm{cl} x_t(\omega; 0, \hat{S}_{0,N}) \in \mathcal{F}_K\}$ для подсчета сопровождающего функционала при произвольном множестве $K \in \mathcal{K}$ довольно затруднительно. Используя включение $\{\omega : x_t(\omega; 0, S_{0,N}) \in \mathcal{F}_K\} \subset \{\omega : \mathrm{cl} x_t(\omega; 0, \hat{S}_{0,N}) \in \mathcal{F}_K\}$, получаем оценку снизу для такой вероятности:

$$P\{x_t(\omega; 0, S_{0,N}) \in \mathcal{F}_K\} \leqslant P\{\mathrm{cl} x_t(\omega; 0, \hat{S}_{0,N}) \in \mathcal{F}_K\}. \tag{4.1}$$

Для левой части формулы (4.1), используя предположение конечной аппроксимируемости, по формуле полной вероятности имеем

$$P\{x_t(\omega; 0, S_{0,N}) \in \mathcal{F}_K\} = \sum_{I \in \mathcal{J}_N} P\{S_{0,N} = I\} P[x_t(\omega; 0, I) \in \mathcal{F}_K \mid S_{0,N} = I], \tag{4.2}$$

где счетное множество $\mathcal{J}_N$ состоит из конечных подмножеств сетки $\mathbb{Z}_N^n$. Условная вероятность в (4.2) совпадает с безусловной, поскольку начальное множество не зависит от винеровского процесса. Полагая $K = \hat{V}$, где V — конечные подмножества сетки, получаем приближенное распределение множества на сетке в момент t. Рассмотрим

П р и м е р 5. Пусть $S_0 = \{\xi_1, \xi_2\}$ — множество из двух независимых величин с одинаковым распределением P_ξ, $n = 1$. Здесь $F_S(U) = 1 - (1 - P_\xi(\hat{U}))^2$ для $U \subset \mathbb{Z}_N$. Конечная аппроксимируемость выполняется. Функция $G_S(U) = P_\xi^2(\hat{U})$. Пусть уравнение имеет вид $dx_t = dw_t$. Тогда получаем $S_t = S_0 + w_t$. Если P_ξ — стандартное гауссовское распределение, то по правилу 3σ можно считать, что вне отрезка $[-3, 3]$ начальное множество равно нулю. Поскольку величина w_t также имеет гауссовское распределение, то вычисление распределений сводится к конечным суммам.

К настоящему времени разработаны эффективные методы конечно-разностной аппроксимации стохастических ДУ [17–19]. Пусть $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ — разбиение отрезка, где $t_p = pT/N,\ p \in 0 : N$. Простейшая схема Эйлера

$$y_{p+1} = y_p + b\Delta + \sigma \Delta w_p, \quad p \in 0 : N-1,$$

где $\Delta = T/N,\ \Delta w_p = w_{t_{p+1}} - w_{t_p}$, и функции b, σ вычисляются в точках (t_p, y_p), имеет порядок точности $0(\Delta^{1/2})$, что явно недостаточно. Рассмотрим численную схему, которая называется в литературе методом Г. Н. Мильштейна, в интерпретации Д. Ф. Кузнецова (см. [19, п. 7.3.2]):

$$y_{p+1} = y_p + b\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}\zeta_0 + \frac{\Delta}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ki} \frac{\partial \sigma_j}{\partial x_k} I^{ijq}, \quad p \in 0 : N-1, \tag{4.3}$$

где σ_i — i-й столбец матрицы σ, $I^{ijq} = \zeta_0^i \zeta_0^j + \sum\limits_{k=1}^{q} \dfrac{1}{\sqrt{4k^2 - 1}} \big(\zeta_{k-1}^i \zeta_k^j - \zeta_k^i \zeta_{k-1}^j\big) - 1_{i=j}$. Здесь $\zeta_k^i,\ i \in 1 : m,\ k \in 0 : q,$ — набор стандартных независимых гауссовских величин, величина $1_{i=j} = 1$, если $i = j$, в противном случае она равна нулю. На каждом шаге берется новый, независимый от предыдущего, набор. Число q следует выбирать так, чтобы $\dfrac{1}{2q+1} \leqslant 4c\Delta$, где c — заданная константа. В схеме (4.3) предполагается, что коэффициенты уравнения (0.1) непрерывны и удовлетворяют условиям (0.2), а элементы матрицы σ непрерывно дифференцируемы по пространственным переменным. Пусть y_t обозначает функцию, построенную путем кусочно-линейной интерполяции по точкам (t_p, y_p), $p \in 0 : N-1$. Для схемы (4.3) справедлива оценка

$$\mathrm{E} \max_{t \in [0,T]} |x_t - y_t|^2 \leqslant K\Delta^2, \tag{4.4}$$

где константа K не зависит от Δ. Ввиду оценки (4.4) говорят, что схема (4.3) имеет порядок $0(\Delta)$. Пусть $m = 1$, тогда имеем $y_{p+1} = y_p + b\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}\zeta_0 + \dfrac{\Delta}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_k\frac{\partial\sigma}{\partial x_k}(\zeta_0^2 - 1)$. Также упрощение записывается, когда матрица σ диагональна и коэффициент σ_{ii} зависит только от x_i.

И схему Эйлера и схему Мильштейна можно записать единообразно в виде

$$y_{p+1} = y_p + b_p\Delta + \Sigma_p g(\zeta_p), \quad p \in 0 : N-1, \tag{4.5}$$

где $b_p \in \mathbb{R}^n$ и $\Sigma_p \in \mathbb{R}^{n\times L}$ — непрерывные функции от $y \in \mathbb{R}^n$, $g \in \mathbb{R}^L$ — непрерывная функция от $\zeta \in \mathbb{R}^q$. Здесь L, q — подходящие размерности, ζ_p — стандартный гауссовский вектор. При использовании схем типа (4.5) формулы (4.1), (4.2) естественным образом модифицируются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Arnold L.** Stochastic differential equations: Theory and applications. New York: John Wiley & Sons, 1974. 228 p.
2. **Оксендаль Б.** Стохастические дифференциальные уравнения. М.: Мир, 2003. 406 с.
3. **Матерон Ж.** Случайные множества и интегральная геометрия. М.: Мир, 1978. 318 с.
4. **Nguyen Hung T.** An introduction to random sets. Boca Raton: Chapman & Hall, 2006. 257 p.
5. **Molchanov I.** Theory of random sets. London: Springer Verlag, 2005. 488 p.
6. **Kurzhanski A.B., Varaiya P.** Dynamics and control of trajectory tubes. Theory and computation. Cham: Birkhäuser, 2014. 445 p.
7. **Ананьев Б.И.** Оценивание состояний обратных стохастических дифференциальных уравнений со статистически неопределенными помехами // Тр. XII Всерос. совещ. по пробл. упр. ВСПУ-2014. Москва, 2014. С. 2604–2611.
8. **Ananyev B.I.** State estimation for linear stochastic differential equations with uncertain disturbances via BSDE approach // AIP Conf. Proc. 2012. Vol. 1487. P. 143–150.
9. **Гихман И.И., Скороход А.В.** Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1982. 611 с.
10. **Булинский А.В., Ширяев А.Н.** Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2003. 399 с.
11. **Schmelzer B.** Set-valued assessments of solutions to stochastic differential equations with random set parameters // J. Math. Anal. Appl. 2013. Vol. 400, no. 2. P. 425–438.
12. **Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.** Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974. 696 с.
13. **Himmelberg C.** Measurable relations // Fund. Math. 1975. Vol. 87, no. 1. P. 53–72.
14. **Miranda E., Couso I., Gil P.** Approximations of upper and lower probabilities by measurable selections // Inform. Sci. 2010. Vol. 180, no. 10. P. 1407–1417.
15. **Вентцель А.Д.** Курс теории случайных процессов. М.: Наука, Физматлит, 1996. 399 с.
16. **Yong J, Zhou X.** Stochastic controls: Hamiltonian systems and HJB equations. New York: Springer-Verlag, 1999. 438 p.
17. **Milstein G.N.** Numerical integration of stochastic differential equations. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1995. 169 p. (Mathematics and Its Appl.; vol. 313).
18. **Kloeden P.E., Platen E.** Numerical solution of stochastic differential equations. Berlin: Springer-Verlag, 1995. 632 p. (Appl. of Math.).
19. **Кузнецов Д.Ф.** Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2001. 710 с.

Ананьев Борис Иванович
д-р физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина,
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: abi@imm.uran.ru

Поступила 25.09.15