ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 1 2016

УДК 517.972

# О СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЙ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ С ДВУСТОРОННИМИ ПРЕПЯТСТВИЯМИ В ПЕРЕМЕННЫХ ОБЛАСТЯХ[1]

**А. А. Ковалевский**

Установлены достаточные условия сходимости минимизантов и минимальных значений интегральных и более общих функционалов на множествах функций, определяемых двусторонними препятствиями в переменных областях. Заданные препятствия являются элементами соответствующего пространства Соболева, причем для разности верхнего и нижнего препятствий допустимо вырождение на множестве меры нуль. Показано, что ослабление условия положительности этой разности на множестве полной меры может привести к определенному нарушению установленного результата о сходимости.

Ключевые слова: интегральный функционал, минимизант, минимальное значение, двусторонние препятствия, Г-сходимость, сильная связанность.

A. A. Kovalevsky. On the convergence of solutions of variational problems with bilateral obstacles in variable domains.

We establish sufficient conditions for the convergence of minimizers and minimum values of integral and more general functionals on sets of functions defined by bilateral obstacles in variable domains. The given obstacles are elements of the corresponding Sobolev space, and the degeneration on a set of measure zero is admitted for the difference of the upper and lower obstacles. We show that a weakening of the condition of positivity of this difference on a set of full measure may lead to a certain violation of the established convergence result.

Keywords: integral functional, minimizer, minimum value, bilateral obstacles, Γ-convergence, strong connectedness.

## Введение

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\Omega$ — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ и $p > 1$. Пусть $\{\Omega_s\}$ — последовательность областей в $\mathbb{R}^n$, содержащихся в $\Omega$.

В статье рассмотрим последовательность функционалов $J_s : W^{1,p}(\Omega_s) \to \mathbb{R}$ структуры $J_s = F_s + G_s$, где $\{F_s\}$ — последовательность интегральных функционалов, интегранты которых удовлетворяют определенным условиям выпуклости, роста и коэрцитивности, а $\{G_s\}$ — некоторая последовательность слабо непрерывных функционалов. Наряду с этим рассмотрим последовательность множеств $V_s(\varphi, \psi) \subset W^{1,p}(\Omega_s)$, элементы которых ограничены снизу функцией $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ и сверху функцией $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ почти всюду в соответствующей области $\Omega_s$, причем $\varphi \leqslant \psi$ почти всюду в $\Omega$. Исследуем вопрос о сходимости минимизантов и минимальных значений функционалов $J_s$ на множествах $V_s(\varphi, \psi)$.

Аналогичный вопрос изучался автором в работе [1], где рассматривались только интегральные функционалы, причем при более сильных предположениях относительно их структурных составляющих. Из результатов статьи [1], в частности, следует, что доказательство сходимости минимизантов и минимальных значений рассматриваемых функционалов на множествах $V_s(\varphi, \psi)$, по существу, может быть сведено к установлению Г-сходимости этих функ-

[1]Работа выполнена в рамках комплексной программы ФНИ УрО РАН “Современные проблемы алгебры, анализа и теории динамических систем с приложениями к управлению сложными объектами” (проект “Разработка новых аналитических, численных и асимптотических методов исследования задач математической физики и приложения к обработке сигналов”), а также при поддержке Программы повышения конкурентоспособности УРФУ (постановление № 211 Правительства РФ, контракт № 02.A03.21.0006).

ционалов к некоторому функционалу $J : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ и определенной (сильной) связанности пространств $W^{1,p}(\Omega_s)$ с пространством $W^{1,p}(\Omega)$. При этом в [1] предполагалось, что $\varphi, \psi \in W^{1,p}(\Omega)$ и выполняется условие

$$\psi - \varphi \geqslant \alpha \ \text{ п. в. в } \Omega, \tag{0.1}$$

где $\alpha > 0$ (по данному поводу см. также [2, теорема 2.9]).

В настоящей работе для доказательства сходимости минимизантов и минимальных значений функционалов $J_s$ на множествах $V_s(\varphi, \psi)$ требуются сильная связанность последовательности пространств $W^{1,p}(\Omega_s)$ с пространством $W^{1,p}(\Omega)$, Γ-сходимость последовательности $\{F_s\}$ и некоторая сходимость последовательности $\{G_s\}$. Предполагаем также, что $\varphi, \psi \in W^{1,p}(\Omega)$, но, в отличие от [1], вместо выполнения условия (0.1) с некоторым $\alpha > 0$ требуем, чтобы выполнялось более слабое условие

$$\psi - \varphi > 0 \ \text{ п. в. в } \Omega. \tag{0.2}$$

В связи с этим отметим, что сходимость решений нелинейных эллиптических вариационных неравенств с множествами ограничений, определяемыми двусторонними препятствиями $\varphi_s, \psi_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ такими, что $\psi_s - \varphi_s \geqslant \alpha$ п. в. в $\Omega_s$, где $\alpha > 0$, изучалась в [3]. При этом предполагалось, что области $\Omega_s$ имеют специальную (перфорированную) структуру, а последовательность операторов $A_s : W^{1,p}(\Omega_s) \to (W^{1,p}(\Omega_s))^*$, порождающих левую часть указанных вариационных неравенств, является $G$-сходящейся.

Заметим также, что в работе [4] показано, что $G$-сходимость последовательности линейных непрерывных операторов $\mathcal{A}_s : \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(\Omega) \to W^{-1,2}(\Omega)$ дивергентного вида к оператору $\mathcal{A} : \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(\Omega) \to W^{-1,2}(\Omega)$ такого же вида влечет слабую сходимость решений вариационных неравенств с операторами $\mathcal{A}_s$ и множеством ограничений $K(\psi_1, \psi_2) = \{v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(\Omega) \colon \psi_1 \leqslant v \leqslant \psi_2$ п. в. в $\Omega\}$ к решению соответствующего вариационного неравенства с оператором $\mathcal{A}$ и тем же множеством ограничений. При этом относительно функций $\psi_1$ и $\psi_2$ в [4] предполагается, что $\psi_1, \psi_2 \in L^2(\Omega)$ и для любой подобласти $\omega \subset\subset \Omega$ существуют число $\delta^\omega > 0$ и функции $\psi_1^\omega, \psi_2^\omega \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(\Omega)$ такие, что $\psi_1 \leqslant \psi_1^\omega \leqslant \psi_2^\omega \leqslant \psi_2$ в $\Omega$ и $\psi_2^\omega - \psi_1^\omega \geqslant \delta^\omega$ в $\omega$. Как видно, требование (0.2) относительности разности верхнего и нижнего препятствий в настоящей работе слабее соответствующего требования в [4].

С использованием техники теории Γ-сходимости функционалов асимптотическое поведение (при $s \to \infty$) решений вариационных задач для квадратичного интегрального функционала с двусторонними ограничениями типа $\varphi_s \leqslant v \leqslant \psi_s$, где $\varphi_s, \psi_s : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, исследовано в [5]. При этом получение результатов о сходимости решений предполагает существование последовательности функций, ограниченной в соответствующем соболевском пространстве и удовлетворяющей двусторонним ограничениям указанного типа. К тому же ввиду общего характера препятствий, рассматриваемых в [5], соответствующая предельная вариационная задача тоже имеет достаточно общий вид.

Отметим, что понятие сильной связанности соболевских пространств восходит к работе [6], где было введено условие сильной связанности $n$-мерных областей, являющееся, по существу, прообразом названного понятия.

Структура настоящей работы следующая. В разд. 1 сформулированы необходимые определения и предположения. В разд. 2 изложена основная теорема статьи. Наконец, в разд. 3 дан ряд комментариев и примеров относительно сделанных предположений и выполнения условий основной теоремы. В частности, показана существенность условия (0.2) для справедливости этой теоремы.

## 1. Определения и предположения

Легко видеть, что если $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и $s \in \mathbb{N}$, то $v|_{\Omega_s} \in W^{1,p}(\Omega_s)$.

О п р е д е л е н и е 1. Если $s \in \mathbb{N}$, то $q_s$ — отображение из $W^{1,p}(\Omega)$ в $W^{1,p}(\Omega_s)$ такое, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega)$ имеем $q_s v = v|_{\Omega_s}$.

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что последовательность пространств $W^{1,p}(\Omega_s)$ сильно связана с пространством $W^{1,p}(\Omega)$, если существует последовательность линейных непрерывных операторов $l_s : W^{1,p}(\Omega_s) \to W^{1,p}(\Omega)$ такая, что:

(a) последовательность норм $\|l_s\|$ ограничена;

(b) для любых $s \in \mathbb{N}$ и $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ имеем $q_s(l_s v) = v$ п. в. в $\Omega_s$.

О п р е д е л е н и е 3. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $I_s : W^{1,p}(\Omega_s) \to \mathbb{R}$, и пусть $I : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$. Будем говорить, что последовательность $\{I_s\}$ Г-сходится к функционалу $I$, если выполняются следующие условия:

(a) для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega)$ существует последовательность $w_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ такая, что $\|w_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$ и $I_s(w_s) \to I(v)$;

(b) для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и любой последовательности $v_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ такой, что $\|v_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$, имеем $\liminf\limits_{s\to\infty} I_s(v_s) \geqslant I(v)$.

Перейдем к рассмотрению функционалов, для которых будет исследована сходимость минимизантов и минимальных значений на множествах функций с двусторонними препятствиями.

Пусть $c_1, c_2 > 0$, и пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $\mu_s \in L^1(\Omega_s)$ и $\mu_s \geqslant 0$ в $\Omega_s$. Предположим, что последовательность норм $\|\mu_s\|_{L^1(\Omega_s)}$ ограничена.

Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $f_s : \Omega_s \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функция, удовлетворяющая следующим условиям: для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ функция $f_s(\cdot, \xi)$ измерима на $\Omega_s$; для почти всех $x \in \Omega_s$ функция $f_s(x, \cdot)$ выпукла на $\mathbb{R}^n$; для почти всех $x \in \Omega_s$ и любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$c_1|\xi|^p - \mu_s(x) \leqslant f_s(x, \xi) \leqslant c_2|\xi|^p + \mu_s(x). \tag{1.1}$$

В силу предположений относительно функций $f_s$ и $\mu_s$ для любых $s \in \mathbb{N}$ и $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ функция $f_s(x, \nabla v)$ суммируема на $\Omega_s$.

О п р е д е л е н и е 4. Если $s \in \mathbb{N}$, то $F_s : W^{1,p}(\Omega_s) \to \mathbb{R}$ — функционал такой, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ имеем

$$F_s(v) = \int\limits_{\Omega_s} f_s(x, \nabla v)dx.$$

В силу условий относительно функций $f_s$ для любого $s \in \mathbb{N}$ функционал $F_s$ является выпуклым и локально ограниченным. Поэтому для любого $s \in \mathbb{N}$ функционал $F_s$ слабо полунепрерывен снизу.

Далее, пусть $c_3, c_4 > 0$ и пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $G_s : W^{1,p}(\Omega_s) \to \mathbb{R}$ — слабо непрерывный функционал. Предположим, что для любых $s \in \mathbb{N}$ и $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ справедливо неравенство

$$G_s(v) \geqslant c_3\|v\|^p_{L^p(\Omega_s)} - c_4. \tag{1.2}$$

Ввиду слабой полунепрерывности снизу функционалов $F_s$ и слабой непрерывности функционалов $G_s$ для любого $s \in \mathbb{N}$ функционал $F_s + G_s$ слабо полунепрерывен снизу. Кроме того, в силу (1.1), (1.2) и ограниченности последовательности норм $\|\mu_s\|_{L^1(\Omega_s)}$ существуют положительные числа $c_5$ и $c_6$ такие, что для любых $s \in \mathbb{N}$ и $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ имеем

$$(F_s + G_s)(v) \geqslant c_5\|v\|^p_{W^{1,p}(\Omega_s)} - c_6. \tag{1.3}$$

## 2. Основной результат

Пусть $\varphi, \psi \in W^{1,p}(\Omega)$ и $\varphi \leqslant \psi$ п. в. в $\Omega$. Положим

$$V(\varphi,\psi) = \{v \in W^{1,p}(\Omega) : \varphi \leqslant v \leqslant \psi \ \text{ п. в. в } \ \Omega\},$$

и пусть для любого $s \in \mathbb{N}$

$$V_s(\varphi,\psi) = \{v \in W^{1,p}(\Omega_s) : \varphi \leqslant v \leqslant \psi \ \text{ п. в. в } \ \Omega_s\}.$$

Легко видеть, что множество $V(\varphi,\psi)$ непусто, замкнуто и выпукло. Аналогично, для любого $s \in \mathbb{N}$ множество $V_s(\varphi,\psi)$ непусто, замкнуто и выпукло.

В силу указанных свойств функционалов $F_s + G_s$ и множеств $V_s(\varphi,\psi)$ и известных результатов о существовании точек минимума функционалов (см., например, [7, гл. 3]) для любого $s \in \mathbb{N}$ существует функция в $V_s(\varphi,\psi)$, минимизирующая функционал $F_s + G_s$ на множестве $V_s(\varphi,\psi)$.

**Теорема.** *Предположим, что выполняются следующие условия*:

($*_1$) *вложение $W^{1,p}(\Omega)$ в $L^p(\Omega)$ компактно*;

($*_2$) *последовательность пространств $W^{1,p}(\Omega_s)$ сильно связана с пространством $W^{1,p}(\Omega)$*;

($*_3$) *для любой последовательности измеримых множеств $H_s \subset \Omega_s$ такой, что* $\operatorname{meas} H_s \to 0$, *имеем*

$$\int\limits_{H_s} \mu_s\, dx \to 0;$$

($*_4$) *последовательность $\{F_s\}$ $\Gamma$-сходится к некоторому функционалу $F : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$*;

($*_5$) *существует функционал $G : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ такой, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и любой последовательности $v_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ со свойством $\|v_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$ имеем $G_s(v_s) \to G(v)$*;

($*_6$) $\psi - \varphi > 0$ *п. в. в* $\Omega$.

*Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $u_s$ — функция в $V_s(\varphi,\psi)$, минимизирующая функционал $F_s + G_s$ на множестве $V_s(\varphi,\psi)$.*

*Тогда существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ и функция $u \in V(\varphi,\psi)$ такие, что справедливы следующие утверждения*:

1) *функция $u$ минимизирует функционал $F + G$ на множестве $V(\varphi,\psi)$*;

2) $\|u_{s_j} - q_{s_j} u\|_{L^p(\Omega_{s_j})} \to 0$;

3) $(F_{s_j} + G_{s_j})(u_{s_j}) \to (F + G)(u)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего покажем, что последовательность норм $\|u_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)}$ ограничена. Действительно, в силу (1.1) и ограниченности последовательности норм $\|\mu_s\|_{L^1(\Omega_s)}$ последовательность чисел $F_s(q_s\varphi)$ ограничена. Кроме того, ввиду условия ($*_5$) последовательность чисел $G_s(q_s\varphi)$ ограничена. Таким образом, последовательность чисел $(F_s + G_s)(q_s\varphi)$ ограничена. Следовательно, существует $M > 0$ такое, что

$$\forall s \in \mathbb{N} \qquad (F_s + G_s)(q_s\varphi) \leqslant M. \tag{2.1}$$

Пусть $s \in \mathbb{N}$. В силу (1.3) имеем

$$c_5 \|u_s\|^p_{W^{1,p}(\Omega_s)} \leqslant (F_s + G_s)(u_s) + c_6, \tag{2.2}$$

а так как функция $u_s$ минимизирует функционал $F_s + G_s$ на множестве $V_s(\varphi,\psi)$ и $q_s\varphi \in V_s(\varphi,\psi)$, то

$$(F_s + G_s)(u_s) \leqslant (F_s + G_s)(q_s\varphi). \tag{2.3}$$

Из (2.1)–(2.3) выводим неравенство

$$\|u_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)} \leqslant \Big(\frac{M+c_6}{c_5}\Big)^{1/p}.$$

Значит, последовательность норм $\|u_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)}$ ограничена.

Далее, ввиду условия $(*_2)$ существует последовательность линейных непрерывных операторов $l_s : W^{1,p}(\Omega_s) \to W^{1,p}(\Omega)$ такая, что последовательность норм $\|l_s\|$ ограничена и справедлива импликация

$$s \in \mathbb{N},\ v \in W^{1,p}(\Omega_s) \Longrightarrow q_s(l_s v) = v \ \text{ п. в. в } \ \Omega_s. \tag{2.4}$$

Из ограниченности последовательностей норм $\|u_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)}$ и $\|l_s\|$ вытекает, что последовательность $\{l_s u_s\}$ ограничена в $W^{1,p}(\Omega)$.

Для любого $s \in \mathbb{N}$ положим

$$\tilde{u}_s = \min\{\max\{l_s u_s, \varphi\}, \psi\}.$$

Имеем $\{\tilde{u}_s\} \subset W^{1,p}(\Omega)$ и

$$\forall s \in \mathbb{N} \qquad \varphi \leqslant \tilde{u}_s \leqslant \psi \ \text{ п. в. в } \ \Omega. \tag{2.5}$$

Кроме того, в силу (2.4) и включений $u_s \in V_s(\varphi,\psi)$, $s \in \mathbb{N}$, имеем

$$\forall s \in \mathbb{N} \qquad q_s \tilde{u}_s = u_s \ \text{ п. в. в } \ \Omega_s. \tag{2.6}$$

Поскольку последовательность $\{l_s u_s\}$ ограничена в $W^{1,p}(\Omega)$, последовательность $\{\tilde{u}_s\}$ также ограничена в $W^{1,p}(\Omega)$. Поэтому ввиду рефлексивности пространства $W^{1,p}(\Omega)$ и условия $(*_1)$ существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ и функция $u \in W^{1,p}(\Omega)$ такие, что

$$\tilde{u}_{s_j} \to u \ \text{ сильно в } \ L^p(\Omega), \tag{2.7}$$

$$\tilde{u}_{s_j} \to u \ \text{ п. в. в } \ \Omega. \tag{2.8}$$

Из (2.5) и (2.8) вытекает, что $\varphi \leqslant u \leqslant \psi$ п. в. в $\Omega$. Значит, $u \in V(\varphi,\psi)$. Заметим также, что в силу (2.6) для любого $s \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $\|u_s - q_s u\|_{L^p(\Omega_s)} \leqslant \|\tilde{u}_s - u\|_{L^p(\Omega)}$. Отсюда и из (2.7) выводим, что

$$\|u_{s_j} - q_{s_j} u\|_{L^p(\Omega_{s_j})} \to 0. \tag{2.9}$$

Определим последовательность $\{\overline{u}_s\}$ следующим образом:

$$\overline{u}_s = \begin{cases} u_s, & \text{если } s = s_j \ \text{ при некотором } \ j \in \mathbb{N}, \\ q_s u, & \text{если } s \neq s_j \ \text{ для любого } \ j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\overline{u}_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$. Кроме того, ввиду (2.9) имеем $\|\overline{u}_s - q_s u\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$. Отсюда и из условий $(*_4)$ и $(*_5)$ вытекает, что

$$\liminf_{s\to\infty} F_s(\overline{u}_s) \geqslant F(u), \quad G_s(\overline{u}_s) \to G(u).$$

Следовательно,

$$\liminf_{j\to\infty} (F_{s_j} + G_{s_j})(u_{s_j}) \geqslant (F+G)(u). \tag{2.10}$$

Далее, пусть $v \in V(\varphi,\psi)$. В силу условия $(*_4)$ существует последовательность $v_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ такая, что

$$\|v_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0, \tag{2.11}$$

$$F_s(v_s) \to F(v). \tag{2.12}$$

Используя эти соотношения, построим последовательность $w_s \in V_s(\varphi,\psi)$ такую, что $\|w_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$ и верхний предел последовательности чисел $F_s(w_s)$ не превосходит $F(v)$. Это наиболее существенная часть доказательства теоремы.

Для любого $s \in \mathbb{N}$ положим

$$\sigma_s = \min\{1,\ (\|v_s - q_s v\|_{L^1(\Omega_s)} + 1/s)^{1/2}\}.$$

Ясно, что $\{\sigma_s\} \subset (0,1]$. Кроме того, ввиду (2.11) имеем

$$\sigma_s \to 0. \tag{2.13}$$

Для любого $s \in \mathbb{N}$ положим

$$y_s = \sigma_s q_s(\psi - \varphi), \quad \alpha_s = \frac{1-\sigma_s}{1+\sigma_s}.$$

Поскольку $\varphi,\psi \in W^{1,p}(\Omega)$ и $\varphi \leqslant \psi$ п. в. в $\Omega$, для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $y_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ и $y_s \geqslant 0$ п. в. в $\Omega_s$. Кроме того, $\{\alpha_s\} \subset [0,1)$, причем в силу (2.13) имеем

$$\alpha_s \to 1. \tag{2.14}$$

Теперь для любого $s \in \mathbb{N}$ положим

$$z_s = \min\{\max\{v_s,\, q_s v - y_s\},\, q_s v + y_s\},$$

$$E_s = \{|v_s - q_s v| \geqslant y_s\}, \quad E_s' = \{v_s \leqslant q_s v - y_s\}, \quad E_s'' = \{v_s \geqslant q_s v + y_s\}.$$

Легко видеть, что для любого $s \in \mathbb{N}$ функция $z_s$ принадлежит пространству $W^{1,p}(\Omega_s)$ и

$$q_s v - y_s \leqslant z_s \leqslant q_s v + y_s \ \text{ п. в. в } \ \Omega_s.$$

Из данной оценки для функций $z_s$, определения функций $y_s$ и (2.13) следует, что

$$\|z_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0. \tag{2.15}$$

Из той же оценки и включения $v \in V(\varphi,\psi)$ выводим, что для любого $s \in \mathbb{N}$

$$q_s\varphi - y_s \leqslant z_s \leqslant q_s\psi + y_s \ \text{ п. в. в } \ \Omega_s. \tag{2.16}$$

Ввиду определения множеств $E_s$, $E_s'$ и $E_s''$, определения функций $y_s$ и условия $(*_6)$ для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем

$$E_s = E_s' \cup E_s'', \quad \operatorname{meas}(E_s' \cap E_s'') = 0. \tag{2.17}$$

Покажем, что

$$\operatorname{meas} E_s \to 0. \tag{2.18}$$

Действительно, в силу (2.11) существует $\overline{s} \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant \overline{s}$, имеем

$$\|v_s - q_s v\|_{L^1(\Omega_s)} + 1/s \leqslant 1. \tag{2.19}$$

Пусть $s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant \overline{s}$. Из определения числа $\sigma_s$ и из (2.19) вытекает, что

$$\|v_s - q_s v\|_{L^1(\Omega_s)} \leqslant \sigma_s^2. \tag{2.20}$$

Кроме того, учитывая определение множества $E_s$ и функции $y_s$, находим, что если $x \in E_s$, то $\sigma_s(\psi - \varphi)(x) < |v_s - q_s v|(x)$. Поэтому

$$\sigma_s \int\limits_{E_s} (\psi - \varphi)dx \leqslant \int\limits_{\Omega_s} |v_s - q_s v|dx. \tag{2.21}$$

Поскольку $\sigma_s > 0$, из (2.20) и (2.21) выводим, что

$$\int\limits_{E_s} (\psi - \varphi) dx \leqslant \sigma_s.$$

Ввиду того что это неравенство верно для любого $s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant \overline{s}$, и $\sigma_s \to 0$, получаем

$$\int\limits_{E_s} (\psi - \varphi) dx \to 0.$$

Отсюда и из условия $(*_6)$ следует, что соотношение (2.18) справедливо.

Используя определения функций $y_s$ и $z_s$, определения множеств $E_s$, $E'_s$ и $E''_s$, равенства (2.17) и условие $(*_6)$, устанавливаем, что для любого $s \in \mathbb{N}$

$$\nabla z_s = \nabla v_s \cdot 1_{\Omega_s \setminus E_s} + \nabla(q_s v - y_s) \cdot 1_{E'_s} + \nabla(q_s v + y_s) \cdot 1_{E''_s} \ \text{ п. в. в } \ \Omega_s. \tag{2.22}$$

Далее, для любого $s \in \mathbb{N}$ положим

$$w_s = \alpha_s z_s + (1 - \alpha_s) q_s \varphi + y_s.$$

Ясно, что для любого $s \in \mathbb{N}$ функция $w_s$ принадлежит пространству $W^{1,p}(\Omega_s)$. В силу (2.16) и того, что $\varphi \leqslant \psi$ п. в. в $\Omega$, для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\varphi \leqslant w_s \leqslant \psi$ п. в. в $\Omega_s$. Таким образом,

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad w_s \in V_s(\varphi, \psi). \tag{2.23}$$

Кроме того, ввиду определения функций $w_s$ и $y_s$ для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем

$$\|w_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \leqslant \alpha_s \|z_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} + (1 - \alpha_s)\|v - \varphi\|_{L^p(\Omega)} + \sigma_s \|\psi - \varphi\|_{L^p(\Omega)}.$$

Отсюда и из (2.13)–(2.15) вытекает, что

$$\|w_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0. \tag{2.24}$$

Покажем, что

$$\limsup_{s \to \infty} F_s(w_s) \leqslant F(v). \tag{2.25}$$

Прежде всего заметим, что в силу (1.1) и ограниченности последовательности норм $\|\mu_s\|_{L^1(\Omega_s)}$ существует $M_1 > 0$ такое, что

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad |F_s(q_s \varphi)| + |F_s(q_s \psi)| \leqslant M_1. \tag{2.26}$$

Зафиксируем $s \in \mathbb{N}$ и положим

$$\tilde{w}_s = \frac{1 - \sigma_s}{2}\, q_s \varphi + \frac{1 + \sigma_s}{2}\, q_s \psi. \tag{2.27}$$

Ввиду определения функций $y_s$, $w_s$ и $\tilde{w}_s$ и числа $\alpha_s$ имеем

$$w_s = \alpha_s z_s + (1 - \alpha_s) \tilde{w}_s. \tag{2.28}$$

Поскольку функционал $F_s$ выпуклый, используя равенства (2.27) и (2.28), получаем

$$F_s(\tilde{w}_s) \leqslant \frac{1 - \sigma_s}{2}\, F_s(q_s \varphi) + \frac{1 + \sigma_s}{2}\, F_s(q_s \psi),$$

$$F_s(w_s) \leqslant \alpha_s F_s(z_s) + (1 - \alpha_s) F_s(\tilde{w}_s).$$

Из этих неравенств и (2.26) следует, что

$$F_s(w_s) \leqslant \alpha_s F_s(z_s) + (1-\alpha_s) M_1. \tag{2.29}$$

Оценим число $F_s(z_s)$. В силу (2.17) имеем

$$F_s(z_s) = \int\limits_{\Omega_s \setminus E_s} f_s(x, \nabla z_s) dx + \int\limits_{E'_s} f_s(x, \nabla z_s) dx + \int\limits_{E''_s} f_s(x, \nabla z_s) dx. \tag{2.30}$$

Используя (1.1), (2.17) и (2.22), для интегралов в правой части равенства (2.30) получаем такие оценки:

$$\int\limits_{\Omega_s \setminus E_s} f_s(x, \nabla z_s) dx \leqslant F_s(v_s) + \int\limits_{E_s} \mu_s \, dx, \tag{2.31}$$

$$\int\limits_{E'_s} f_s(x, \nabla z_s) dx \leqslant c_2 \int\limits_{E'_s} |\nabla (q_s v - y_s)|^p dx + \int\limits_{E'_s} \mu_s \, dx, \tag{2.32}$$

$$\int\limits_{E''_s} f_s(x, \nabla z_s) dx \leqslant c_2 \int\limits_{E''_s} |\nabla (q_s v + y_s)|^p dx + \int\limits_{E''_s} \mu_s \, dx. \tag{2.33}$$

Кроме того, ввиду определения функции $y_s$, включения $\sigma_s \in (0,1]$ и равенств (2.17) имеем

$$\int\limits_{E'_s} |\nabla (q_s v - y_s)|^p dx + \int\limits_{E''_s} |\nabla (q_s v + y_s)|^p dx \leqslant \int\limits_{E_s} (|\nabla v| + |\nabla(\psi - \varphi)|)^p dx. \tag{2.34}$$

Ясно также, что

$$\int\limits_{E'_s} \mu_s \, dx + \int\limits_{E''_s} \mu_s \, dx = \int\limits_{E_s} \mu_s \, dx. \tag{2.35}$$

Из (2.30)–(2.35) выводим, что

$$F_s(z_s) \leqslant F_s(v_s) + c_2 \int\limits_{E_s} (|\nabla v| + |\nabla(\psi - \varphi)|)^p dx + 2 \int\limits_{E_s} \mu_s \, dx. \tag{2.36}$$

В свою очередь, учитывая, что $\alpha_s \in [0,1)$, из (2.29) и (2.36) получаем неравенство

$$F_s(w_s) \leqslant \alpha_s F_s(v_s) + c_2 \int\limits_{E_s} (|\nabla v| + |\nabla(\psi - \varphi)|)^p dx + 2 \int\limits_{E_s} \mu_s \, dx + (1-\alpha_s) M_1.$$

Поскольку это неравенство установлено для любого $s \in \mathbb{N}$, используя (2.12), (2.14), (2.18) и условие $(*_3)$, заключаем, что неравенство (2.25) справедливо.

Далее, в силу (2.24) и условия $(*_5)$ имеем $G_s(w_s) \to G(v)$. Отсюда и из (2.25) вытекает, что

$$\limsup_{s \to \infty} (F_s + G_s)(w_s) \leqslant (F + G)(v). \tag{2.37}$$

Так как для любого $s \in \mathbb{N}$ функция $u_s$ минимизирует функционал $F_s + G_s$ на множестве $V_s(\varphi, \psi)$, то, учитывая (2.23), для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $(F_s + G_s)(u_s) \leqslant (F_s + G_s)(w_s)$. Отсюда и из (2.37) следует неравенство

$$\limsup_{j \to \infty} (F_{s_j} + G_{s_j})(u_{s_j}) \leqslant (F + G)(v). \tag{2.38}$$

Из этого неравенства и неравенства (2.10) выводим, что $(F+G)(u) \leqslant (F+G)(v)$. Поэтому ввиду произвольности функции $v \in V(\varphi,\psi)$ заключаем, что функция $u$ минимизирует функционал $F+G$ на множестве $V(\varphi,\psi)$. Кроме того, в силу той же произвольности функции $v \in V(\varphi,\psi)$ и включения $u \in V(\varphi,\psi)$ из (2.38) получаем

$$\limsup_{j\to\infty}(F_{s_j}+G_{s_j})(u_{s_j}) \leqslant (F+G)(u).$$

Из этого неравенства и неравенства (2.10) вытекает, что $(F_{s_j}+G_{s_j})(u_{s_j}) \to (F+G)(u)$.

Таким образом, установлено, что существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ и функция $u \in V(\varphi,\psi)$ такие, что справедливы утверждения 1)–3) заключения теоремы. Тем самым доказательство теоремы завершено.

## 3. Комментарии и примеры

Дадим ряд комментариев и примеров относительно реализации предположений, сделанных в разд. 1, и выполнения условий теоремы.

Как известно (см., например, [8, гл. 6]), условие $(*_1)$ теоремы выполняется, если область $\Omega$ липшицева. В частности, липшицевыми являются выпуклые ограниченные области.

Условие $(*_2)$ теоремы выполняется, в частности, если области $\Omega_s$ имеют определенную перфорированную структуру. По этому поводу см., например, [3].

Относительно выполнения условий $(*_3)$ и $(*_4)$ теоремы заметим следующее. В том случае, когда все функции $\mu_s$ принимают одно и то же постоянное значение, теоремы об условиях Г-сходимости последовательности интегральных функционалов $F_s$ с интегрантами $f_s$, удовлетворяющими условию (1.1), следуют из результатов работ [9; 10], где изучалась Г-сходимость интегральных функционалов, определенных на пространствах $W^{m,p}(\Omega_s)$ с произвольным $m \in \mathbb{N}$. В частности, последовательность $\{F_s\}$ Г-сходится к некоторому интегральному функционалу, если области $\Omega_s$ имеют периодическую перфорированную структуру и все интегранты $f_s$ совпадают с одним и тем же интегрантом, имеющим определенную регулярность (см. [9]). При этом вместе с выполнением сказанного относительно функций $\mu_s$ последовательность норм $\|\mu_s\|_{L^1(\Omega_s)}$ ограничена и выполняется условие $(*_3)$ теоремы. В более общем случае, когда при том что для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\mu_s \in L^1(\Omega_s)$ и $\mu_s \geqslant 0$ в $\Omega_s$, выполняется условие

$$\text{для любого открытого куба } Q \text{ в } \mathbb{R}^n \text{ имеем } \limsup_{s\to\infty}\int\limits_{Q\cap\Omega_s}\mu_s\,dx \leqslant \int\limits_{Q\cap\Omega}\mu\,dx, \tag{3.1}$$

где $\mu \in L^1(\Omega)$ и $\mu \geqslant 0$ в $\Omega$, аналогично изложенному в [11] устанавливается, что из последовательности $\{F_s\}$ можно извлечь подпоследовательность, Г-сходящуюся к некоторому интегральному функционалу $F : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$. Легко видеть, что выполнение условия (3.1) обеспечивает ограниченность последовательности норм $\|\mu_s\|_{L^1(\Omega_s)}$. Заметим также, что есть примеры последовательностей неотрицательных функций $\mu_s \in L^1(\Omega_s)$, для которых выполняются условие (3.1) и условие $(*_3)$ теоремы и не существует функции $\mu_* : \Omega \to \mathbb{R}$ такой, что для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\mu_s \leqslant \mu_*$ п. в. в $\Omega_s$. Подобные примеры можно указать, используя функции, построенные в статье [12].

Далее, рассмотрим пример выполнения условия $(*_5)$ теоремы.

П р и м е р 1. Пусть $a \in L^{p/(p-1)}(\Omega)$. Пусть $\beta_1 \in (0,1)$, $\beta_2 > 0$, и пусть $\Phi : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция такая, что для любого $\eta \in [0,+\infty)$ имеем

$$|\Phi(\eta)| \leqslant \beta_1|\eta|^p + \beta_2. \tag{3.2}$$

Предположим, что для любых $s \in \mathbb{N}$ и $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$

$$G_s(v) = \int\limits_{\Omega_s}\{|v|^p + av\}dx + \Phi(\|v\|_{L^p(\Omega_s)}).$$

Полагая

$$c_3 = \frac{p-1}{p}\,(1-\beta_1), \quad c_4 = \frac{p-1}{p}(1-\beta_1)^{-1/(p-1)}\|a\|^{p/(p-1)}_{L^{p/(p-1)}(\Omega)} + \beta_2$$

и используя (3.2), убеждаемся в том, что для любых $s \in \mathbb{N}$ и $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ справедливо неравенство (1.2). Заметим также, что если выполняются условия $(*_1)$ и $(*_2)$ теоремы, то для любого $s \in \mathbb{N}$ функционал $G_s$ слабо непрерывен на $W^{1,p}(\Omega_s)$. Действительно, пусть указанные условия выполняются и пусть $\{l_s\}$ — последовательность операторов со свойствами, описанными в определении 2. Зафиксируем $s \in \mathbb{N}$. Пусть $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$, $\{v_j\} \subset W^{1,p}(\Omega_s)$ и $v_j \to v$ слабо в $W^{1,p}(\Omega_s)$. Ясно, что $l_s v_j \to l_s v$ слабо в $W^{1,p}(\Omega)$. Отсюда и из условия $(*_1)$ теоремы вытекает, что $l_s v_j \to l_s v$ сильно в $L^p(\Omega)$. Поэтому, учитывая свойство (b) из определения 2, заключаем, что $v_j \to v$ сильно в $L^p(\Omega_s)$. Тогда ввиду включения $a \in L^{p/(p-1)}(\Omega)$ и непрерывности функции $\Phi$ имеем $G_s(v_j) \to G_s(v)$. Значит, функционал $G_s$ слабо непрерывен на $W^{1,p}(\Omega_s)$.

Предположим, что выполняется следующее условие:

$(*)$ существует неотрицательная ограниченная измеримая функция $b : \Omega \to \mathbb{R}$ такая, что для любого открытого куба $Q \subset \Omega$ имеем $\operatorname{meas}(Q \cap \Omega_s) \to \int_Q b\,dx$.

Пусть $G : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ — функционал такой, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega)$ имеем

$$G(v) = \int\limits_\Omega b\{|v|^p + av\}dx + \Phi(\|b^{1/p}v\|_{L^p(\Omega)}).$$

Покажем, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и любой последовательности $v_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ со свойством $\|v_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$ имеем $G_s(v_s) \to G(v)$. Это будет означать, что условие $(*_5)$ теоремы выполняется. Прежде всего заметим, что в силу условия $(*)$ имеем

$$\forall w \in L^1(\Omega) \quad \int\limits_{\Omega_s} w\,dx \to \int\limits_\Omega bw\,dx. \tag{3.3}$$

Итак, пусть $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и пусть имеем последовательность $v_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ со свойством $\|v_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$. Ясно, что

$$\|v_s\|_{L^p(\Omega_s)} - \|q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0, \quad \int\limits_{\Omega_s} av_s\,dx - \int\limits_{\Omega_s} aq_s v\,dx \to 0. \tag{3.4}$$

Кроме того, ввиду (3.3) имеем

$$\|q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \to \|b^{1/p}v\|_{L^p(\Omega)}, \quad \int\limits_{\Omega_s} aq_s v\,dx \to \int\limits_\Omega bav\,dx. \tag{3.5}$$

Теперь, учитывая непрерывность функции $\Phi$, из (3.4) и (3.5) выводим, что $G_s(v_s) \to G(v)$.

Остается заметить, что условие $(*)$ вместе с условиями $(*_1)$ и $(*_2)$ теоремы выполняется, если, например, область $\Omega$ липшицева, а области $\Omega_s$ имеют периодическую перфорированную структуру.

Приведем пример выполнения условия $(*_6)$ теоремы.

П р и м е р 2. Пусть $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, и пусть для любого $x \in \Omega$ имеем $\varphi(x) = 0$ и $\psi(x) = |x|^2(1-|x|^2)$. В силу этих предположений имеем $\varphi, \psi \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$ и $\varphi \leqslant \psi$ в $\Omega$. Кроме того, для любого $x \in \Omega \setminus \{0\}$ имеем $(\psi - \varphi)(x) > 0$. Значит, условие $(*_6)$ теоремы выполняется. Заметим, что в рассматриваемом здесь случае имеем $V(\varphi,\psi) = \{v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega) : \varphi \leqslant v \leqslant \psi$ п. в. в $\Omega\}$. Следовательно, при $p = 2$ множество $V(\varphi,\psi)$ имеет такой же вид, как и множество, определяемое двусторонними препятствиями, в [4]. Заметим также, что если

$\omega$ — область в $\mathbb{R}^n$ такая, что $\overline{\omega} \subset \Omega$ и начало координат содержится в $\omega$, то не существует числа $\delta^\omega > 0$ такого, что $\psi - \varphi \geqslant \delta^\omega$ п. в. в $\omega$. Поэтому упомянутое во введении условие на препятствия из работы [4] для функций $\varphi$ и $\psi$ не выполняется.

Перейдем к заключительному примеру. В связи с ним отметим очевидный факт, что условие $(*_6)$ теоремы равносильно требованию $\operatorname{meas}\{\varphi = \psi\} = 0$. В предлагаемом примере опишем ситуацию, в которой, во-первых, выполняются условия $(*_1)$–$(*_5)$ теоремы, во-вторых, мера множества $\{\varphi = \psi\}$ положительна и не превосходит наперед заданного положительного числа и, в-третьих, для соответствующей последовательности $\{u_s\}$ заключение теоремы в целом неверно. Тем самым будет обоснована существенность условия $(*_6)$ теоремы для справедливости ее заключения.

П р и м е р 3. Пусть $\varepsilon > 0$, и пусть $Q$ — открытый куб в $\mathbb{R}^n$ такой, что $\overline{Q} \subset \Omega$ и $\operatorname{meas} Q \leqslant \varepsilon/2$. В силу изложенного в [13, пример 4.16] существуют числа $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ и последовательность функций $\{\tau_s\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ такие, что

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad \tau_s = 0 \ \text{ в } \ \Omega \setminus Q, \tag{3.6}$$

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad |\nabla \tau_s| \leqslant \lambda_1 \ \text{ в } \ \Omega, \tag{3.7}$$

$$\|\tau_s\|_{L^p(\Omega)} \to 0, \tag{3.8}$$

$$\int\limits_Q |\nabla \tau_s|^p \, dx \to \lambda_2. \tag{3.9}$$

Будем считать, что область $\Omega$ липшицева и для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\Omega_s = \Omega$. Тогда условия $(*_1)$ и $(*_2)$ теоремы выполняются.

Пусть $c_1 = 2^{1-p}$, $c_2 = 2^{p-1}$, и пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ и любого $x \in \Omega_s$ имеем

$$\mu_s(x) = 2^{p-1} |\nabla \tau_s(x)|^p.$$

Кроме того, предположим, что для любого $s \in \mathbb{N}$ и любой пары $(x, \xi) \in \Omega_s \times \mathbb{R}^n$ имеем

$$f_s(x, \xi) = |\xi + \nabla \tau_s(x)|^p. \tag{3.10}$$

В силу сделанных предположений функции $\mu_s$ и $f_s$ удовлетворяют соответствующим условиям из разд. 1, причем в силу (3.7) выполняется условие $(*_3)$ теоремы.

Далее, пусть $F, G : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ — функционалы такие, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega)$ имеем

$$F(v) = \int\limits_\Omega |\nabla v|^p \, dx, \quad G(v) = \int\limits_\Omega |v|^p \, dx.$$

Ввиду (3.10) и определения 4 для любых $s \in \mathbb{N}$ и $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ получаем

$$F_s(v) = F(v + \tau_s). \tag{3.11}$$

Покажем, что последовательность $\{F_s\}$ $\Gamma$-сходится к функционалу $F$. Действительно, зафиксируем произвольную функцию $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и для любого $s \in \mathbb{N}$ положим $w_s = v - \tau_s$. С учетом (3.8) и (3.11) имеем: $\forall s \in \mathbb{N} \ \ w_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$; $\|w_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$; $F_s(w_s) \to F(v)$. Теперь пусть имеется последовательность $v_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ такая, что $\|v_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$. Значит,

$$\|v_s - v\|_{L^p(\Omega)} \to 0. \tag{3.12}$$

Пусть $\beta$ — предельная точка последовательности $\{F_s(v_s)\}$, причем $\beta \in \mathbb{R}$. Тогда в силу (3.11), (3.12) и (3.7) существует возрастающая последовательность $\{\overline{s}_j\} \subset \mathbb{N}$ такая, что

$$F(v_{\overline{s}_j} + \tau_{\overline{s}_j}) \to \beta \tag{3.13}$$

и последовательность $\{v_{\bar{s}_j}\}$ ограничена в $W^{1,p}(\Omega)$. Ввиду последнего свойства и (3.12) имеем $v_{\bar{s}_j} \to v$ слабо в $W^{1,p}(\Omega)$. Поэтому, учитывая (3.7) и (3.8), имеем $v_{\bar{s}_j} + \tau_{\bar{s}_j} \to v$ слабо в $W^{1,p}(\Omega)$. Тогда вследствие слабой полунепрерывности снизу функционала $F$ и (3.13) получаем неравенство $\beta \geqslant F(v)$. Поэтому $\liminf\limits_{s\to\infty} F_s(v_s) \geqslant F(v)$. Теперь ввиду определения 3 заключаем, что последовательность $\{F_s\}$ Γ-сходится к функционалу $F$. Таким образом, условие $(*_4)$ теоремы выполняется.

Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $G_s = G$. Тогда ввиду предположения, что область $\Omega$ липшицева, для любого $s \in \mathbb{N}$ функционал $G_s$ слабо непрерывен на $W^{1,p}(\Omega_s)$. Кроме того, в силу предположения о равенстве всех функционалов $G_s$ функционалу $G$ при $c_3 = 1$ и $c_4 = 1$ для любых $s \in \mathbb{N}$ и $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ справедливо неравенство (1.2). Ясно также, что если $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и имеем последовательность $v_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ со свойством $\|v_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$, то $G_s(v_s) \to G(v)$. Значит, условие $(*_5)$ теоремы выполняется.

Далее, пусть для любого $x \in \Omega$ имеем $\varphi(x) = 0$. Пусть $Q_1$ — открытый куб в $\mathbb{R}^n$ такой, что $\overline{Q} \subset Q_1$, $\overline{Q_1} \subset \Omega$ и $\operatorname{meas} Q_1 \leqslant \varepsilon$. Пусть $\psi \in C^1(\Omega)$, причем $0 \leqslant \psi \leqslant 1$ в $\Omega$, $\psi = 0$ в $Q$ и $\psi = 1$ в $\Omega \setminus Q_1$. В силу этих предположений $\varphi, \psi \in W^{1,p}(\Omega)$ и $Q \subset \{\varphi = \psi\} \subset Q_1$. Данное включение влечет неравенство $0 < \operatorname{meas}\{\varphi = \psi\} \leqslant \varepsilon$.

Таким образом, условия $(*_1)$–$(*_5)$ теоремы выполняются, а условие $(*_6)$ этой теоремы не выполняется.

Ясно, что $\varphi \in V(\varphi, \psi)$ и функция $\varphi$ минимизирует функционал $F$ на множестве $V(\varphi, \psi)$.

Для любого $s \in \mathbb{N}$ положим $u_s = \varphi$.

Пусть $s \in \mathbb{N}$. Имеем $u_s \in V_s(\varphi, \psi)$. Зафиксируем произвольную функцию $v \in V_s(\varphi, \psi)$. Имеем $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и $\varphi \leqslant v \leqslant \psi$ п. в. в $\Omega$. Тогда, ввиду того что $\varphi = 0$ в $\Omega$ и $\psi = 0$ в $Q$, имеем $v = 0$ п. в. в $Q$. Поэтому $\nabla v = 0$ п. в. в $Q$. Учитывая, что $G_s(u_s) = G(\varphi) = 0$ и используя (3.11) и (3.6), получаем

$$(F_s + G_s)(u_s) = F(\varphi + \tau_s) = F(\tau_s) = \int\limits_Q |\nabla \tau_s|^p \, dx. \tag{3.14}$$

Кроме того, поскольку $\nabla v = 0$ п. в. в $Q$, используя равенство (3.11) и неравенство $G_s(v) \geqslant 0$, получаем

$$\int\limits_Q |\nabla \tau_s|^p \, dx = \int\limits_Q |\nabla (v + \tau_s)|^p \, dx \leqslant \int\limits_\Omega |\nabla (v + \tau_s)|^p \, dx = F(v + \tau_s) = F_s(v) \leqslant (F_s + G_s)(v).$$

Отсюда и из (3.14) следует, что $(F_s + G_s)(u_s) \leqslant (F_s + G_s)(v)$.

Таким образом, для любого $s \in \mathbb{N}$ $u_s$ — функция в $V_s(\varphi, \psi)$, минимизирующая функционал $F_s + G_s$ на множестве $V_s(\varphi, \psi)$. При этом, очевидно, $\|u_s - q_s \varphi\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$. Вместе с тем в силу (3.9) и (3.14) имеем

$$(F_s + G_s)(u_s) \to \lambda_2. \tag{3.15}$$

Поэтому, ввиду того что $\lambda_2 > 0$, последовательность $\{(F_s + G_s)(u_s)\}$ не сходится к $(F + G)(\varphi)$.

Предельное соотношение (3.15) позволяет сделать вывод, что заключение теоремы для последовательности $\{u_s\}$ не является справедливым. Действительно, предположим, что заключение теоремы для последовательности $\{u_s\}$ справедливо. Значит, существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ и функция $u \in V(\varphi, \psi)$ такие, что справедливы утверждения 1)–3) этого заключения. Из утверждений 2) и 3) следует, что $u = \varphi$ п. в. в $\Omega$ и $(F_{s_j} + G_{s_j})(u_{s_j}) \to 0$. Но последнее соотношение противоречит (3.15). Полученное противоречие доказывает, что заключение теоремы для последовательности $\{u_s\}$ не является справедливым.

Отметим, что рассмотренный пример представляет собой некоторый аналог примера 4.16 из статьи [13].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Ковалевский А.А.** О некоторых вопросах, связанных с проблемой усреднения вариационных задач для функционалов с переменной областью определения // Современный анализ и его приложения. Киев: Наукова думка, 1989. С. 62–70.
2. **Kovalevsky A.A.** Obstacle problems in variable domains // Complex Var. Elliptic Equ. 2011. Vol. 56, no. 12. P. 1071–1083.
3. **Ковалевский А.А.** $G$-сходимость и усреднение нелинейных эллиптических операторов дивергентного вида с переменной областью определения // Изв. РАН. Сер. математическая. 1994. Т. 58, № 3. С. 3–35.
4. **Murat F.** Sur l'homogeneisation d'inequations elliptiques du 2ème ordre, relatives au convexe $K(\psi_1,\psi_2)=\{v\in H_0^1(\Omega)\,|\,\psi_1\leqslant v\leqslant\psi_2 \ \text{p. p. dans } \Omega\}$. 1976. Publ. Laboratoire d'Analyse Numérique, no. 76013. Univ. Paris VI. 23 p.
5. **Dal Maso G.** Asymptotic behaviour of minimum problems with bilateral obstacles // Ann. Mat. Pura Appl. (4). 1981. Vol. 129, no. 1. P. 327–366.
6. **Хруслов Е.Я.** Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении границы области // Мат. сб. 1978. Т. 106, № 4. С. 604–621.
7. **Вайнберг М.М.** Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М.: Наука, 1972. 416 с.
8. **Adams R.A.** Sobolev spaces. New York: Acad. Press, 1975. 286 p.
9. **Ковалевский А.А.** Условия Γ-сходимости и усреднение интегральных функционалов с различными областями определения // Докл. АН УССР. 1991. № 4. С. 5–8.
10. **Ковалевский А.А.** О необходимых и достаточных условиях Γ-сходимости интегральных функционалов с различными областями определения // Нелинейные граничные задачи. 1992. Вып. 4. С. 29–39.
11. **Рудакова О.А.** О Γ-сходимости интегральных функционалов, определенных на различных весовых пространствах Соболева // Укр. мат. журн. 2009. Т. 61, № 1. С. 99–115.
12. **Kovalevsky A.A.** On $L^1$-functions with a very singular behaviour // Nonlinear Anal. 2013. Vol. 85. P. 66–77.
13. **Kovalevsky A.A., Rudakova O.A.** Variational problems with pointwise constraints and degeneration in variable domains // Differ. Equ. Appl. 2009. Vol. 1, no. 4. P. 517–559.


Ковалевский Александр Альбертович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета им. Б. Н. Ельцина
e-mail: alexkvl71@mail.ru

Поступила 25.10.2015