ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 1 2016

УДК 517.928

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫХ ЗАДАЧ С ДЕШЕВЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ РАЗНОЙ ЦЕНЫ

М. А. Калашникова, Г. А. Курина

Рассматривается линейно-квадратичная задача оптимального управления, в критерии качества которой при квадратичных формах относительно управления стоит малый параметр в разных степенях. Исходная задача приводится к сингулярно возмущенной задаче оптимального управления с трехтемповыми переменными состояния в критическом случае. Предложенный алгоритм нахождения членов первых двух порядков асимптотического разложения решения основан на непосредственной подстановке постулируемого асимптотического разложения решения в условие преобразованной задачи и определении однозначно разрешимых задач оптимального управления для нахождения членов асимптотики. Приведен иллюстративный пример.

Ключевые слова: линейно-квадратичные задачи, сингулярные возмущения, дешевые управления, асимптотические разложения.

M. A. Kalashnikova, G. A. Kurina. Asymptotic solution of linear-quadratic problems with cheap controls of different costs.

We consider a linear-quadratic optimal control problem with performance index containing different powers of a small parameter at quadratic forms with respect to the control. The problem is transformed to a singularly perturbed optimal control problem with three-tempo state variables in the critical case. An algorithm is proposed for finding terms of the first two orders in the asymptotic expansion of the solution. The algorithm is based on the direct substitution of the postulated asymptotic expansion into the statement of the transformed problem and setting uniquely solvable optimal control problems for the terms of the expansion. An illustrative example is given.

Keywords: linear-quadratic problems, singular perturbations, cheap controls, asymptotic expansions.

Посвящается Аделаиде Борисовне Васильевой

Введение

Среди большого числа работ, посвященных сингулярно возмущенным задачам управления (см., например, обзор [1]), выделяются публикации, имеющие дело с дешевыми управлениями в линейно-квадратичных задачах, когда перед управлениями в критерии качества стоит малый параметр. Особенность этих задач состоит в том, что при отсутствии ограничений на управление и нулевом значении малого параметра получаются задачи с особым управлением, при этом из принципа максимума [2] нельзя выразить управление.

Укажем некоторые из известных нам работ, имеющих дело с задачами такого типа. В [3; 4] при помощи замены переменных исходная задача сводится к задаче оптимального управления с сингулярно возмущенным уравнением состояния в критическом случае, когда из вырожденного уравнения состояния нельзя выразить быстрые переменные состояния через медленные переменные и управление. Затем строится асимптотическое разложение решения преобразованной задачи. Отметим, что сингулярно возмущенные уравнения в критическом случае исследовались в [5]. Для асимптотического решения преобразованных задач в [6–8] используется прямая схема [9], заключающаяся в непосредственной подстановке постулируемого асимптотического разложения решения погранслойного типа в условие задачи и определении серии задач для нахождения членов асимптотики. В [4; 7] рассматривались матричные возмущения, в [8] — задачи с разрывными коэффициентами, а в [10] — задачи с дешевыми управлениями и запаздываниями в управлении и состоянии.

В отличие от указанных работ в настоящей статье рассматривается линейно-квадратичная задача с дешевыми управлениями различных порядков малости. Минимизируемый функционал можно при этом рассматривать как линейную комбинацию критериев качества с учетом степени важности критериев в многокритериальной задаче. Путем перехода к новым переменным управления и состояния исходная задача сводится к сингулярно возмущенной задаче оптимального управления с трехтемповыми переменными состояния в критическом случае. При использовании идей методов пограничных функций [11; 12] и прямой схемы [9] находится асимптотическое разложение решения преобразованной задачи, содержащее пограничные функции четырех типов. Поскольку для приложений часто достаточно знать только первые члены асимптотического решения, то построение асимптотики ограничивается нахождением членов асимптотического приближения первых двух порядков. Приводится иллюстративный пример.

Далее $\varepsilon \geq 0$ — малый параметр, $T > 0$ задано, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в соответствующих пространствах, штрих — транспонирование, I_k — единичная матрица порядка k, коэффициент при ε^n в разложении функции $\mathrm{h} = \mathrm{h}(\varepsilon)$ в ряд по целым неотрицательным степеням ε будем обозначать h_n или $[\mathrm{h}]_n$.

1. Постановка задачи

Рассматривается следующая задача

$$J(\overset{(1)}{v}, \overset{(2)}{v}) = 1/2 \int\limits_0^T \Big(\langle z, W(t,\varepsilon) z \rangle + \sum_{k=1}^{2} \varepsilon^{2k} \langle \overset{(k)}{v}, \overset{(k)}{R}(t,\varepsilon) \overset{(k)}{v} \rangle \Big) \, dt \to \min, \tag{1.1}$$

$$\frac{dz}{dt} = A(t,\varepsilon) z + C(t,\varepsilon) v, \quad t \in [0,T], \quad z(0,\varepsilon) = z^0, \tag{1.2}$$

где $\overset{(k)}{v}(t,\varepsilon) \in \mathbb{R}^{n_k}$, $z(t,\varepsilon) \in \mathbb{R}^n$, $v(t,\varepsilon) = (\overset{(1)}{v}(t,\varepsilon)', \overset{(2)}{v}(t,\varepsilon)')'$, матрицы $W(t,\varepsilon)$, $\overset{(k)}{R}(t,\varepsilon)$, $A(t,\varepsilon)$, $C(t,\varepsilon)$ предполагаются достаточно гладкими по своим аргументам, причем $W(t,\varepsilon)$, $\overset{(k)}{R}(t,\varepsilon)$ симметричны, $W(t,0)$, $\overset{(k)}{R}(t,0)$ положительно определены, $k = 1, 2$, $n = n_1 + n_2$, а матрица $C(t,0)$ обратима при всех $t \in [0,T]$.

При достаточно малых $\varepsilon > 0$ задача (1.1), (1.2) однозначно разрешима, а при $\varepsilon = 0$ управление не выражается однозначно из принципа максимума Л.С. Понтрягина [2] через переменную состояния и сопряженную переменную, т. е. оно является особым.

Наша цель — построить первые члены асимптотического решения задачи (1.1), (1.2).

2. Преобразование задачи

При помощи замены переменных преобразуем исходную задачу (1.1), (1.2) так, чтобы в полученной задаче управление не являлось особым при $\varepsilon = 0$. Для этого введем новые переменные

$$\overset{(k)}{u}(t,\varepsilon) = \varepsilon^k \overset{(k)}{v}(t,\varepsilon), \quad \overset{(k)}{y}(t,\varepsilon) = \int\limits_0^t \overset{(k)}{v}(s,\varepsilon) \, ds, \quad y(t,\varepsilon) = (\overset{(1)}{y}(t,\varepsilon)', \overset{(2)}{y}(t,\varepsilon)')',$$
$$x(t,\varepsilon) = z(t,\varepsilon) - C(t,\varepsilon) y(t,\varepsilon), \quad w(t,\varepsilon) = (x(t,\varepsilon)', y(t,\varepsilon)')', \quad u(t,\varepsilon) = (\overset{(1)}{u}(t,\varepsilon)', \overset{(2)}{u}(t,\varepsilon)')'. \tag{2.1}$$

Тогда задача (1.1), (1.2) примет вид

$$P_\varepsilon : \quad J_\varepsilon(u) = 1/2 \int\limits_0^T \big(\langle w, \mathbb{W}(t,\varepsilon) w \rangle + \langle u, \mathbb{R}(t,\varepsilon) u \rangle \big) \, dt \to \min, \tag{2.2}$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + B(t,\varepsilon)y, \tag{2.3}$$

$$\varepsilon^k \frac{d\overset{(k)}{y}}{dt} = \overset{(k)}{u}, \quad k = 1,2, \tag{2.4}$$

$$x(0,\varepsilon) = z^0, \quad y(0,\varepsilon) = 0, \tag{2.5}$$

где $\mathbb{W}(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} W(t,\varepsilon) & W(t,\varepsilon)C(t,\varepsilon) \\ C(t,\varepsilon)'W(t,\varepsilon) & C(t,\varepsilon)'W(t,\varepsilon)C(t,\varepsilon) \end{pmatrix}$, $\mathbb{R}(t,\varepsilon) = diag(\overset{(1)}{R}(t,\varepsilon), \overset{(2)}{R}(t,\varepsilon))$, $B(t,\varepsilon) = A(t,\varepsilon)C(t,\varepsilon) - dC(t,\varepsilon)/dt$.

Далее, используя прямую схему, предложим алгоритм построения асимптотического приближения первого порядка решения задачи (2.2)–(2.5), на основе которого можно получить первые члены асимптотического решения исходной задачи (1.1), (1.2).

3. Формализм построения асимптотики

3.1. Декомпозиция критерия качества и уравнения состояния

Следуя алгоритму метода прямой схемы, решение задачи (2.2)–(2.5) будем искать в виде

$$\mathrm{v}(t,\varepsilon) = \overline{\mathrm{v}}(t,\varepsilon) + \sum_{i=0}^{1}(\Pi_i \mathrm{v}(\tau_i,\varepsilon) + Q_i \mathrm{v}(\sigma_i,\varepsilon)), \tag{3.1}$$

где $\mathrm{v}(t,\varepsilon) = (w(t,\varepsilon)', u(t,\varepsilon)')'$, $t \in [0,T]$, $\tau_i = t/\varepsilon^{i+1}$, $\sigma_i = (t-T)/\varepsilon^{i+1}$, $i = 0,1$, $\overline{\mathrm{v}}(t,\varepsilon) = \sum_{j\geq 0}\varepsilon^j \overline{\mathrm{v}}_j(t)$, $\Pi_i\mathrm{v}(\tau_i,\varepsilon) = \sum_{j\geq 0}\varepsilon^j \Pi_{ij}\mathrm{v}(\tau_i)$, $Q_i\mathrm{v}(\sigma_i,\varepsilon) = \sum_{j\geq 0}\varepsilon^j Q_{ij}\mathrm{v}(\sigma_i)$, $\overline{\mathrm{v}}_j(t)$ — регулярные функции, $\Pi_{ij}\mathrm{v}(\tau_i)$ — пограничные функции экспоненциального типа в окрестности $t = 0$, $Q_{ij}\mathrm{v}(\sigma_i)$ — пограничные функции экспоненциального типа в окрестности $t = T$, т. е. справедливы неравенства

$$\| \Pi_{ij}\mathrm{v}(\tau_i) \| \leq ce^{-æ\tau_i}, \quad \tau_i \geq 0, \quad \| Q_{ij}\mathrm{v}(\sigma_i) \| \leq ce^{æ\sigma_i}, \quad \sigma_i \leq 0, \tag{3.2}$$

где постоянные $c > 0$, $æ > 0$ не зависят от аргументов рассматриваемых функций.

Введем следующие обозначения:

$$\widetilde{\overline{\mathrm{v}}}_n(t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{n}\varepsilon^j \overline{\mathrm{v}}_j(t), \quad \widetilde{\Pi}_{in}\mathrm{v}(\tau_i,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{n}\varepsilon^j \Pi_{ij}\mathrm{v}(\tau_i), \quad \widetilde{Q}_{in}\mathrm{v}(\sigma_i,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{n}\varepsilon^j Q_{ij}\mathrm{v}(\sigma_i), \quad i = 0,1,$$
$$F(\mathrm{v},t,\varepsilon) = 1/2\big(\langle w, \mathbb{W}(t,\varepsilon)w\rangle + \langle u, \mathbb{R}(t,\varepsilon)u\rangle\big), \quad f(w,t,\varepsilon) = A(t,\varepsilon)x + B(t,\varepsilon)y.$$

Для достаточно гладкой функции $G(\mathrm{v},t,\varepsilon)$ будем использовать следующее асимптотическое представление:

$$G(\mathrm{v},t,\varepsilon) = \overline{G}(t,\varepsilon) + \sum_{i=0}^{1}(\Pi_i G(\tau_i,\varepsilon) + Q_i G(\sigma_i,\varepsilon)). \tag{3.3}$$

Здесь

$$\overline{G}(t,\varepsilon) = G(\overline{\mathrm{v}}(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = \sum_{j\geq 0}\varepsilon^j \overline{G}_j(t),$$

$$\Pi_0 G(\tau_0,\varepsilon) = G(\overline{\mathrm{v}}(\varepsilon\tau_0,\varepsilon) + \Pi_0\mathrm{v}(\tau_0,\varepsilon), \varepsilon\tau_0,\varepsilon) - G(\overline{\mathrm{v}}(\varepsilon\tau_0,\varepsilon),\varepsilon\tau_0,\varepsilon) = \sum_{j\geq 0}\varepsilon^j \Pi_{0j}G(\tau_0),$$

$$\Pi_1 G(\tau_1,\varepsilon) = G(\overline{\mathrm{v}}(\varepsilon^2\tau_1,\varepsilon) + \Pi_0\mathrm{v}(\varepsilon\tau_1,\varepsilon) + \Pi_1\mathrm{v}(\tau_1,\varepsilon), \varepsilon^2\tau_1,\varepsilon)$$

$$- \; G(\overline{\mathrm{v}}(\varepsilon^2\tau_1,\varepsilon)+\Pi_0\mathrm{v}(\varepsilon\tau_1,\varepsilon),\varepsilon^2\tau_1,\varepsilon)=\sum_{j\geq 0}\varepsilon^j\Pi_{1j}G(\tau_1),$$

$$Q_0G(\sigma_0,\varepsilon)=G(\overline{\mathrm{v}}(T+\varepsilon\sigma_0,\varepsilon)+Q_0\mathrm{v}(\sigma_0,\varepsilon),T+\varepsilon\sigma_0,\varepsilon)-G(\overline{\mathrm{v}}(T+\varepsilon\sigma_0,\varepsilon),T+\varepsilon\sigma_0,\varepsilon)=\sum_{j\geq 0}\varepsilon^jQ_{0j}G(\sigma_0),$$

$$Q_1G(\sigma_1,\varepsilon)=G(\overline{\mathrm{v}}(T+\varepsilon^2\sigma_1,\varepsilon)+Q_0\mathrm{v}(\varepsilon\sigma_1,\varepsilon)+Q_1\mathrm{v}(\sigma_1,\varepsilon),T+\varepsilon^2\sigma_1,\varepsilon)$$
$$- \; G(\overline{\mathrm{v}}(T+\varepsilon^2\sigma_1,\varepsilon)+Q_0\mathrm{v}(\varepsilon\sigma_1,\varepsilon),T+\varepsilon^2\sigma_1,\varepsilon)=\sum_{j\geq 0}\varepsilon^jQ_{1j}G(\sigma_1).$$

Подставим разложение (3.1) в (2.2) и представим подынтегральное выражение в виде асимптотической суммы (3.3) слагаемых по степеням малого параметра, зависящих от t, τ_i, σ_i, $i=0,1$. В интегралах от выражений, зависящих от τ_i и σ_i, $i=0,1$, перейдем к интегрированию соответственно по бесконечным промежуткам $[0,+\infty)$ и $(-\infty,0]$. В итоге критерий качества (2.2) представим в виде

$$J_\varepsilon(u)=\sum_{j\geq 0}\varepsilon^jJ_j. \tag{3.4}$$

Подставляя (3.1) в уравнения состояния (2.3), (2.4), а затем приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, отдельно зависящие от t, τ_i, σ_i, $i=0,1$, получаем уравнения

$$\frac{d\overline{x}_j(t)}{dt}=A_0(t)\overline{x}_j(t)+B_0(t)\overline{y}_j(t)+[\widehat{\overline{f}}_{j-1}(t,\varepsilon)]_j, \tag{3.5}$$

$$\frac{d\Pi_{ij}x(\tau_i)}{d\tau_i}=A_0(0)\Pi_{i(j-i-1)}x(\tau_i)+B_0(0)\Pi_{i(j-i-1)}y(\tau_i)+[\widehat{\Pi}_{i(j-i-2)}f(\tau_i,\varepsilon)]_{j-i-1}, \tag{3.6}$$

$$\frac{dQ_{ij}x(\sigma_i)}{d\sigma_i}=A_0(T)Q_{i(j-i-1)}x(\sigma_i)+B_0(T)Q_{i(j-i-1)}y(\sigma_i)+[\widehat{Q}_{i(j-i-2)}f(\sigma_i,\varepsilon)]_{j-i-1}, \tag{3.7}$$

$$\frac{d\overset{(k)}{\overline{y}}_{j-k}(t)}{dt}=\overset{(k)}{\overline{u}}_j(t), \tag{3.8}$$

$$0=\Pi_{00}\overset{(2)}{u}(\tau_0), \tag{3.9}$$

$$\frac{d\Pi_{ij}\overset{(k)}{y}(\tau_i)}{d\tau_i}=\Pi_{i(j+k-i-1)}\overset{(k)}{u}(\tau_i), \tag{3.10}$$

$$0=Q_{00}\overset{(2)}{u}(\sigma_0), \tag{3.11}$$

$$\frac{dQ_{ij}\overset{(k)}{y}(\sigma_i)}{d\sigma_i}=Q_{i(j+k-i-1)}\overset{(k)}{u}(\sigma_i). \tag{3.12}$$

Здесь $i=0,1$; $k=1,2$, функции с отрицательными индексами считаются нулевыми, символы $\widehat{\overline{f}}_j(t,\varepsilon)$, $\widehat{\Pi}_{ij}f(\tau_i,\varepsilon)$, $\widehat{Q}_{ij}f(\sigma_i,\varepsilon)$ означают значения функции f при $w=\widetilde{\overline{w}}_j$, $w=\widetilde{\Pi}_{ij}w$ и $t=\varepsilon^{i+1}\tau_i$, $w=\widetilde{Q}_{ij}w$ и $t=T+\varepsilon^{i+1}\sigma_i$ соответственно. Аналогичное обозначение $\widehat{\overline{F}}_j(t,\varepsilon)$ будет использоваться далее для функции $F(\mathrm{v},t,\varepsilon)$.

Из (3.6), (3.7), (3.10), (3.12), учитывая (3.2), имеем

$$\begin{gathered}\Pi_{00}x(\tau_0)=0,\quad \Pi_{10}x(\tau_1)=\Pi_{11}x(\tau_1)=0,\quad Q_{00}x(\sigma_0)=0,\quad Q_{10}x(\sigma_1)=Q_{11}x(\sigma_1)=0,\\ \Pi_{10}\overset{(1)}{y}(\tau_1)=0,\quad Q_{10}\overset{(1)}{y}(\sigma_1)=0.\end{gathered} \tag{3.13}$$

В силу (3.13) из (2.5) вытекают равенства для начальных условий членов разложения (3.1):

$$\overline{x}_0(0)=z^0, \tag{3.14}$$

$$\overline{x}_1(0) + \Pi_{01}x(0) = 0, \tag{3.15}$$

$$\overline{x}_j(0) + \Pi_{0j}x(0) + \Pi_{1j}x(0) = 0, \quad j \geq 2, \tag{3.16}$$

$$\overset{(1)}{\overline{y}}_0(0) + \Pi_{00}\overset{(1)}{y}(0) = 0, \tag{3.17}$$

$$\overset{(1)}{\overline{y}}_j(0) + \Pi_{0j}\overset{(1)}{y}(0) + \Pi_{1j}\overset{(1)}{y}(0) = 0, \quad j \geq 1, \tag{3.18}$$

$$\overset{(2)}{\overline{y}}_j(0) + \Pi_{0j}\overset{(2)}{y}(0) + \Pi_{1j}\overset{(2)}{y}(0) = 0, \quad j \geq 0. \tag{3.19}$$

3.2. Определение асимптотического разложения нулевого порядка

Положим $\varepsilon = 0$ в (2.2)–(2.5). Тогда легко заметить, что вид критерия качества совпадает с коэффициентом J_0 в разложении (3.4), уравнения состояния переходят в (3.5), (3.8) при $j = 0$, $k = 1, 2$, а (2.5) соответствует (3.14). Таким образом, регулярные функции нулевого порядка асимптотического решения задачи (2.2)–(2.5) являются решением следующей вырожденной задачи:

$$\overline{P}_0: \quad \overline{J}_0 = 1/2\int\limits_0^T \big(\langle\overline{w}_0, \mathbb{W}_0(t)\overline{w}_0\rangle + \langle\overline{u}_0, \mathbb{R}_0(t)\overline{u}_0\rangle\big)\, dt \to \min,$$

$$\begin{gathered} \frac{d\overline{x}_0}{dt} = A_0(t)\overline{x}_0 + B_0(t)\overline{y}_0, \quad \overline{x}_0(0) = z^0, \\ 0 = \overset{(k)}{\overline{u}}_0, \quad k = 1, 2. \end{gathered} \tag{3.20}$$

Очевидно, что последняя задача является линейно-квадратичной, причем в качестве управления выступает $\overline{y}_0(t)$. Значит, переменные состояния в этой задаче имеют меньшую размерность, чем в исходной возмущенной. Квадратичная форма относительно $\overline{y}_0(t)$ в критерии качества положительно определена, поэтому задача $\overline{P}_0$ однозначно разрешима. Ее решение можно найти из двухточечной краевой задачи, вытекающей из принципа максимума Л. С. Понтрягина.

Заметим, что система (3.20) не разрешена относительно производной. Это так называемая дескрипторная система или дифференциально-алгебраическое уравнение. Представляя матрицу $B(t, \varepsilon)$ в блочной форме и вводя обозначения

$$E_1 = diag(I_n, 0, 0), \quad B(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} \overset{(1)}{B}(t,\varepsilon) & \overset{(2)}{B}(t,\varepsilon) \end{pmatrix}, \quad \overline{u}_0(t) = (\overset{(1)}{\overline{u}}_0(t)', \overset{(2)}{\overline{u}}_0(t)')',$$

$$\mathbb{A}(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} A(t,\varepsilon) & \overset{(1)}{B}(t,\varepsilon) & \overset{(2)}{B}(t,\varepsilon) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_{n_1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix},$$

запишем (3.20) следующим образом:

$$E_1\frac{d\overline{w}_0}{dt} = \mathbb{A}_0(t)\overline{w}_0 + \mathbb{B}\overline{u}_0, \quad E_1\overline{w}_0(0) = ((z^0)', 0, 0)',$$

а условие оптимальности управления — в виде (см., например, [13])

$$\mathbb{B}'\overline{\psi}_0 - \mathbb{R}_0(t)\overline{u}_0 = 0, \tag{3.21}$$

где сопряженная переменная $\overline{\psi}_0(t) = (\overline{p}_0(t)', \overline{q}_0(t)')'$, $\overline{q}_0(t) = (\overset{(1)}{\overline{q}}_0(t)', \overset{(2)}{\overline{q}}_0(t)')'$ удовлетворяет системе

$$E_1\frac{d\overline{\psi}_0}{dt} = \mathbb{W}_0(t)\overline{w}_0 - \mathbb{A}_0(t)'\overline{\psi}_0, \tag{3.22}$$

$$E_1\overline{\psi}_0(T) = 0. \tag{3.23}$$

Из системы (3.20)–(3.23) получаем решение задачи $\overline{P}_0$. В силу (3.8) при $j = 0$, $k = 1,2$ из (3.21) следует $\overline{q}_0(t) = 0$.

Перейдем к рассмотрению коэффициента J_1 в разложении (3.4). Учитывая обозначения (3.3), представим его в виде

$$\int\limits_0^T \overline{F}_1(t)\,dt + \int\limits_0^{+\infty} \Pi_{00}F(\tau_0)\,d\tau_0 + \int\limits_{-\infty}^0 Q_{00}F(\sigma_0)\,d\sigma_0.$$

Преобразуем отдельно каждое слагаемое в последнем выражении.

Используя (3.21)–(3.23), формулу интегрирования по частям, а также (3.5) при $j = 1$ и (3.8) при $j = 0,1$, $k = 1,2$, имеем

$$\int\limits_0^T \overline{F}_1(t)\,dt = \int\limits_0^T \Big(\langle \overline{w}_1, \mathbb{W}_0(t)\overline{w}_0\rangle + [\widehat{\overline{F}}_0(t,\varepsilon)]_1\Big)\,dt = \int\limits_0^T \Big(\langle \overline{w}_1, E_1\frac{d\overline{\psi}_0}{dt} + \mathbb{A}_0(t)'\overline{\psi}_0\rangle + [\widehat{\overline{F}}_0(t,\varepsilon)]_1\Big)\,dt$$

$$= \langle \overline{w}_1, E_1\overline{\psi}_0\rangle|_0^T + \int\limits_0^T \Big(\langle -E_1\frac{d\overline{w}_1}{dt} + \mathbb{A}_0(t)\overline{w}_1, \overline{\psi}_0\rangle + [\widehat{\overline{F}}_0(t,\varepsilon)]_1\Big)\,dt$$

$$= -\langle \overline{x}_1(0), \overline{p}_0(0)\rangle + \int\limits_0^T ([\widehat{\overline{F}}_0(t,\varepsilon)]_1 - \langle \overline{p}_0, [\widehat{\overline{f}}_0(t,\varepsilon)]_1\rangle)\,dt.$$

Во втором и третьем слагаемых из J_1 преобразуем интегралы от суммы выражений, линейно зависящих соответственно от $\Pi_{00}w(\tau_0)$, $\Pi_{00}u(\tau_0) = (\Pi_{00}\overset{(1)}{u}(\tau_0)', \Pi_{00}\overset{(2)}{u}(\tau_0)')'$ и $Q_{00}w(\sigma_0)$, $Q_{00}u(\sigma_0) = (Q_{00}\overset{(1)}{u}(\sigma_0)', Q_{00}\overset{(2)}{u}(\sigma_0)')'$.

Сначала запишем вытекающее из (3.6) при $i = 0$, $j = 1$ и (3.10) при $i = j = 0$, $k = 1,2$ уравнение

$$E_1\frac{d\Pi_{01}w}{d\tau_0} + E_2\frac{d\Pi_{00}w}{d\tau_0} = \mathbb{A}_0(0)\Pi_{00}w + \mathbb{B}\Pi_{00}u, \quad E_2 = diag(0, I_{n_1}, 0).$$

Используя (3.21), (3.22), (3.13), (3.8) при $j = 0$, $k = 1,2$, (3.2) и последнее уравнение, получаем

$$\int\limits_0^{+\infty} \big(\langle \Pi_{00}w, \mathbb{W}_0(0)\overline{w}_0(0)\rangle + \langle \Pi_{00}u, \mathbb{R}_0(0)\overline{u}_0(0)\rangle\big)\,d\tau_0 = \int\limits_0^{+\infty} \Big(\Big\langle \Pi_{00}w, E_1\frac{d\overline{\psi}_0}{dt}(0)\Big\rangle$$

$$+ \langle \mathbb{A}_0(0)\Pi_{00}w, \overline{\psi}_0(0)\Big\rangle\Big)\,d\tau_0 = \int\limits_0^{+\infty} \Big\langle \overline{\psi}_0(0), E_1\frac{d\Pi_{01}w}{d\tau_0}\Big\rangle\,d\tau_0 = -\langle \overline{p}_0(0), \Pi_{01}x(0)\rangle.$$

Аналогичным образом имеем $\int_{-\infty}^0 \big(\langle Q_{00}w, \mathbb{W}_0(T)\overline{w}_0(T)\rangle + \langle Q_{00}u, \mathbb{R}_0(T)\overline{u}_0(T)\rangle\big)\,d\sigma_0 = 0.$

С учетом результатов проведенных преобразований для слагаемых в J_1 и равенства (3.15) сумма не известных после решения задачи $\overline{P}_0$ слагаемых может быть записана в виде $\Pi_{00}J + Q_{00}J$, где

$$\Pi_{00}J = 1/2\int\limits_0^{+\infty} \big(\langle \Pi_{00}w, \mathbb{W}_0(0)\Pi_{00}w\rangle + \langle \Pi_{00}u, \mathbb{R}_0(0)\Pi_{00}u\rangle\big)\,d\tau_0,$$

$$Q_{00}J = 1/2\int\limits_{-\infty}^0 \big(\langle Q_{00}w, \mathbb{W}_0(T)Q_{00}w\rangle + \langle Q_{00}u, \mathbb{R}_0(T)Q_{00}u\rangle\big)\,d\sigma_0.$$

Поскольку последние два выражения зависят от пограничных функций одного типа, для которых имеются отдельные уравнения: (3.6), (3.7) при $i = j = 0$, (3.9), (3.11), (3.10), (3.12) при $i = j = 0$, $k = 1$ и равенство (3.17), то функции $\Pi_{00}\mathrm{v}(\tau_0)$ и $Q_{00}\mathrm{v}(\sigma_0)$ можно определить соответственно в результате решения нижеследующих задач $\Pi_{00}P$ и $Q_{00}P$:

$$\Pi_{00}P: \quad \Pi_{00}J \to \min,$$

$$\frac{d\Pi_{00}x}{d\tau_0} = 0, \quad \frac{d\Pi_{00}\overset{(1)}{y}}{d\tau_0} = \Pi_{00}\overset{(1)}{u}, \quad 0 = \Pi_{00}\overset{(2)}{u}, \quad \tau_0 \ge 0,$$

$$\Pi_{00}x(+\infty) = 0, \quad \Pi_{00}\overset{(1)}{y}(0) = -\overset{(1)}{\overline{y}}_0(0),$$

$$Q_{00}P: \quad Q_{00}J \to \min,$$

$$\frac{dQ_{00}x}{d\sigma_0} = 0, \quad \frac{dQ_{00}\overset{(1)}{y}}{d\sigma_0} = Q_{00}\overset{(1)}{u}, \quad 0 = Q_{00}\overset{(2)}{u}, \quad \sigma_0 \le 0,$$

$$Q_{00}x(-\infty) = 0, \quad Q_{00}\overset{(1)}{y}(-\infty) = 0.$$

Роль управлений в задачах $\Pi_{00}P$ и $Q_{00}P$ фактически выполняют функции $\Pi_{00}\overset{(1)}{u}(\tau_0)$, $\Pi_{00}\overset{(2)}{y}(\tau_0)$ и $Q_{00}\overset{(1)}{u}(\sigma_0)$, $Q_{00}\overset{(2)}{y}(\sigma_0)$, а переменными состояния в силу (3.13) являются соответственно функции $\Pi_{00}\overset{(1)}{y}(\tau_0)$ и $Q_{00}\overset{(1)}{y}(\sigma_0)$. Значит, переменные состояния в этих задачах имеют меньшую размерность, чем в исходной возмущенной. В силу условий задачи квадратичные формы относительно управления в критериях качества положительно определены и, очевидно, для уравнений состояния выполнено условие управляемости. Поэтому существует оптимальное стабилизирующее управление для задач $\Pi_{00}P$ и $Q_{00}P$ (см., например, [14, с. 280]). Так как $\Pi_{00}x(\tau_0)$ и $Q_{00}x(\sigma_0)$ являются известными функциями, то условия оптимальности управления для этих задач можно записать соответственно в виде

$$\mathbb{B}'\Pi_{00}\psi - \mathbb{R}_0(0)\Pi_{00}u = 0, \tag{3.24}$$

где $\Pi_{00}\psi(\tau_0) = (\Pi_{00}p(\tau_0)', \Pi_{00}q(\tau_0)')'$, $\Pi_{00}q(\tau_0) = (\Pi_{00}\overset{(1)}{q}(\tau_0)', \Pi_{00}\overset{(2)}{q}(\tau_0)')'$ — решение задачи

$$\begin{gathered}(E_1 + E_2)\frac{d\Pi_{00}\psi}{d\tau_0} = \mathbb{W}_0(0)\Pi_{00}w, \quad \tau_0 \ge 0,\\ (E_1 + E_2)\Pi_{00}\psi(+\infty) = 0,\end{gathered} \tag{3.25}$$

и

$$\mathbb{B}'Q_{00}\psi - \mathbb{R}_0(T)Q_{00}u = 0, \tag{3.26}$$

где $Q_{00}\psi(\sigma_0) = (Q_{00}p(\sigma_0)', Q_{00}q(\sigma_0)')'$, $Q_{00}q(\sigma_0) = (Q_{00}\overset{(1)}{q}(\sigma_0)', Q_{00}\overset{(2)}{q}(\sigma_0)')'$ — решение задачи

$$(E_1 + E_2)\frac{dQ_{00}\psi}{d\sigma_0} = \mathbb{W}_0(T)Q_{00}w, \quad \sigma_0 \le 0, \tag{3.27}$$

$$E_1Q_{00}\psi(-\infty) = 0, \quad E_2Q_{00}\psi(0) = 0. \tag{3.28}$$

В силу (3.9), (3.11) из (3.24), (3.26) следуют равенства $\Pi_{00}\overset{(2)}{q}(\tau_0) = 0$, $Q_{00}\overset{(2)}{q}(\sigma_0) = 0$.

Предположим, что найдены решения задач $\overline{P}_0$ и $\Pi_{00}P$, $Q_{00}P$. Рассмотрим коэффициент J_2 из разложения (3.4), имеющий в силу (3.3) вид

$$\int\limits_0^T \overline{F}_2(t)\,dt + \int\limits_0^{+\infty} \Pi_{01}F(\tau_0)\,d\tau_0 + \int\limits_{-\infty}^0 Q_{01}F(\sigma_0)\,d\sigma_0 + \int\limits_0^{+\infty} \Pi_{10}F(\tau_1)\,d\tau_1 + \int\limits_{-\infty}^0 Q_{10}F(\sigma_1)\,d\sigma_1.$$

В первом слагаемом из J_2 преобразуем $\int_0^T \langle \overline{w}_2, \mathbb{W}_0(t)\overline{w}_0\rangle\, dt$, используя условия оптимальности управления для задачи $\overline{P}_0$, а именно равенства (3.22), (3.23), а также формулу интегрирования по частям и (3.5), (3.16) при $j = 2$. Отбрасывая известные слагаемые, приходим к выражению $\langle \Pi_{02}x(0) + \Pi_{12}x(0), \overline{p}_0(0)\rangle - \int_0^T \langle \overline{w}_1, \mathbb{A}_1(t)'\overline{\psi}_0\rangle\, dt$.

Заметим, что после решения задач $\Pi_{00}P$ и $Q_{00}P$ пограничные функции $\Pi_{01}x(\tau_0)$ и $Q_{01}x(\sigma_0)$ однозначно определяются из (3.6) и (3.7) при $i = 0$, $j = 1$.

Во втором слагаемом из J_2 преобразуем $\int_0^{+\infty} (\langle \Pi_{01}w, \mathbb{W}_0(0)(\overline{w}_0(0) + \Pi_{00}w)\rangle + \langle \overline{w}_1(0), \mathbb{W}_0(0)\Pi_{00}w\rangle + \langle \Pi_{01}u, \mathbb{R}_0(0)\Pi_{00}u\rangle + \langle \overline{u}_1(0), \mathbb{R}_0(0)\Pi_{00}u\rangle)\, d\tau_0$. Для этого используем (3.8) при $j = 0$, $k = 1, 2$, условия оптимальности управления для задач $\overline{P}_0$ и $\Pi_{00}P$, а именно соотношения (3.21), (3.22) и (3.24), (3.25), (3.9), а также (3.10) при $i = 0$, $j = k = 1$, (3.8) при $j = k = 1$, (3.15) и (3.18) при $j = 1$. После отбрасывания известных слагаемых получаем выражение $\langle \Pi_{11}\overset{(1)}{y}(0), \Pi_{00}\overset{(1)}{q}(0)\rangle - \langle \Pi_{02}x(0), \overline{p}_0(0)\rangle$.

Аналогичным образом в третьем слагаемом из J_2 преобразуем $\int_{-\infty}^0 \big(\langle Q_{01}w, \mathbb{W}_0(T)(\overline{w}_0(T) + Q_{00}w)\rangle + \langle \overline{w}_1(T), \mathbb{W}_0(T)Q_{00}w\rangle + \langle Q_{01}u, \mathbb{R}_0(T)Q_{00}u\rangle + \langle \overline{u}_1(T), \mathbb{R}_0(T)Q_{00}u\rangle\big)\, d\sigma_0$. Отбрасывая известные слагаемые, в итоге получаем $\langle \overline{x}_1(T), Q_{00}p(0)\rangle$.

В четвертом слагаемом из J_2 преобразуем $\int_0^{+\infty} \big(\langle \Pi_{10}w, \mathbb{W}_0(0)(\overline{w}_0(0) + \Pi_{00}w(0))\rangle + \langle \Pi_{10}u, \mathbb{R}_0(0)\Pi_{00}u(0)\rangle\big)\, d\tau_1$. Используя (3.22), (3.25), (3.6) при $i = 1$, $j = 2$, (3.24), (3.9), (3.13) и (3.10) при $i = j = k = 1$, после отбрасывания известных слагаемых имеем $-\langle \Pi_{12}x(0), \overline{p}_0(0)\rangle - \langle \Pi_{11}\overset{(1)}{y}(0), \Pi_{00}\overset{(1)}{q}(0)\rangle$.

Произведя подобные преобразования в последнем слагаемом из J_2, получаем, что

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \big(\langle Q_{10}w, \mathbb{W}_0(T)(\overline{w}_0(T) + Q_{00}w(0))\rangle + \langle Q_{10}u, \mathbb{R}_0(T)Q_{00}u(0)\rangle\big)\, d\sigma_1$$

является известной величиной после решения задач $\overline{P}_0$ и $\Pi_{00}P$, $Q_{00}P$.

Учитывая проделанные преобразования слагаемых из J_2, а также (3.8) при $j = 0$, $k = 1, 2$, запишем получившееся из J_2 выражение после отбрасывания известных слагаемых в виде $\overline{J}_1 + \Pi_{10}J + Q_{10}J$, где

$$\overline{J}_1 = \langle \overline{w}_1(T), E_1 Q_{00}\psi(0)\rangle + \int\limits_0^T \big(\langle \overline{w}_1, 1/2\mathbb{W}_0(t)\overline{w}_1 + \mathbb{W}_1(t)\overline{w}_0 - \mathbb{A}_1(t)'\overline{\psi}_0\rangle + 1/2\langle \overline{u}_1, \mathbb{R}_0(t)\overline{u}_1\rangle\big)\, dt,$$

$$\Pi_{10}J = 1/2 \int\limits_0^{+\infty} \big(\langle \Pi_{10}w, \mathbb{W}_0(0)\Pi_{10}w\rangle + \langle \Pi_{10}u, \mathbb{R}_0(0)\Pi_{10}u\rangle\big)\, d\tau_1,$$

$$Q_{10}J = 1/2 \int\limits_{-\infty}^0 \big(\langle Q_{10}w, \mathbb{W}_0(T)Q_{10}w\rangle + \langle Q_{10}u, \mathbb{R}_0(T)Q_{10}u\rangle\big)\, d\sigma_1.$$

Поскольку каждое выражение из последних трех зависит от функций одного типа, то $\overline{\mathrm{v}}_1(t)$, $\Pi_{10}\mathrm{v}(\tau_1)$, $Q_{10}\mathrm{v}(\sigma_1)$ можно определить как решение следующих трех задач:

$$\overline{P}_1: \quad \overline{J}_1 \to \min,$$

$$\frac{d\overline{x}_1}{dt} = A_0(t)\overline{x}_1 + B_0(t)\overline{y}_1 + [\widehat{\overline{f}}_0(t,\varepsilon)]_1, \quad \frac{d\overset{(1)}{\overline{y}_0}}{dt} = \overset{(1)}{\overline{u}_1}, \quad 0 = \overset{(2)}{\overline{u}_1},$$

$$\overline{x}_1(0) = -\Pi_{01}x(0),$$

$$\Pi_{10}P: \quad \Pi_{10}J \to \min,$$
$$\frac{d\Pi_{10}x}{d\tau_1} = 0, \quad \frac{d\Pi_{10}\overset{(1)}{y}}{d\tau_1} = 0, \quad \frac{d\Pi_{10}\overset{(2)}{y}}{d\tau_1} = \Pi_{10}\overset{(2)}{u}, \quad \tau_1 \geq 0,$$
$$\Pi_{10}x(+\infty) = 0, \quad \Pi_{10}\overset{(1)}{y}(+\infty) = 0, \quad \Pi_{10}\overset{(2)}{y}(0) = -(\overset{(2)}{\overline{y}}_0(0) + \Pi_{00}\overset{(2)}{y}(0)),$$

$$Q_{10}P: \quad Q_{10}J \to \min,$$
$$\frac{dQ_{10}x}{d\sigma_1} = 0, \quad \frac{dQ_{10}\overset{(1)}{y}}{d\sigma_1} = 0, \quad \frac{dQ_{10}\overset{(2)}{y}}{d\sigma_1} = Q_{10}\overset{(2)}{u}, \quad \sigma_1 \leq 0,$$
$$Q_{10}w(-\infty) = 0.$$

В линейно-квадратичной задаче $\overline{P}_1$ в качестве управления фактически выступает функция $\overline{y}_1(t)$. Эта задача однозначно разрешима. Условие оптимальности управления для нее запишем в виде
$$\mathbb{B}'\overline{\psi}_1 - \mathbb{R}_0(t)\overline{u}_1 = 0, \tag{3.29}$$
где $\overline{\psi}_1(t) = (\overline{p}_1(t)', \overline{q}_1(t)')'$, $\overline{q}_1(t) = (\overset{(1)}{\overline{q}}_1(t)', \overset{(2)}{\overline{q}}_1(t)')'$ — решение задачи
$$E_1\frac{d\overline{\psi}_1}{dt} = \mathbb{W}_0(t)\overline{w}_1 + \mathbb{W}_1(t)\overline{w}_0 - \mathbb{A}_1(t)'\overline{\psi}_0 - \mathbb{A}_0(t)'\overline{\psi}_1, \tag{3.30}$$
$$E_1\overline{\psi}_1(T) = -E_1Q_{00}\psi(0). \tag{3.31}$$
В силу (3.8) при $j = 1$, $k = 2$ из (3.29) следует $\overset{(2)}{\overline{q}}_1(t) = 0$.

Условия оптимальности управления для однозначно разрешимых линейно-квадратичных задач $\Pi_{10}P$ и $Q_{10}P$ запишем соответственно в виде
$$\mathbb{B}'E_3\Pi_{10}\psi - \mathbb{R}_0(0)\Pi_{10}u = 0, \tag{3.32}$$
где $\Pi_{10}\psi(\tau_1) = (\Pi_{10}p(\tau_1)', \Pi_{10}q(\tau_1)')'$, $\Pi_{10}q(\tau_1) = (\Pi_{10}\overset{(1)}{q}(\tau_1)', \Pi_{10}\overset{(2)}{q}(\tau_1)')'$ — решение задачи
$$\frac{d\Pi_{10}\psi}{d\tau_1} = \mathbb{W}_0(0)\Pi_{10}w, \quad \tau_1 \geq 0, \qquad \Pi_{10}\psi(+\infty) = 0, \tag{3.33}$$
и
$$\mathbb{B}'E_3Q_{10}\psi - \mathbb{R}_0(T)Q_{10}u = 0, \tag{3.34}$$
где $Q_{10}\psi(\sigma_1) = (Q_{10}p(\sigma_1)', Q_{10}q(\sigma_1)')'$, $Q_{10}q(\sigma_1) = (Q_{10}\overset{(1)}{q}(\sigma_1)', Q_{10}\overset{(2)}{q}(\sigma_1)')'$ — решение задачи
$$\frac{dQ_{10}\psi}{d\sigma_1} = \mathbb{W}_0(T)Q_{10}w, \quad \sigma_1 \leq 0, \tag{3.35}$$
$$(E_1 + E_2)Q_{10}\psi(-\infty) = 0, \quad E_3Q_{10}\psi(0) = 0. \tag{3.36}$$

Из (3.32), (3.34) непосредственно следует
$$\Pi_{10}\overset{(1)}{u}(\tau_1) = 0, \quad Q_{10}\overset{(1)}{u}(\sigma_1) = 0. \tag{3.37}$$

Таким образом, решая задачи $\overline{P}_0$, $\Pi_{i0}P$, $Q_{i0}P$, $i = 0, 1$, получаем приближение нулевого порядка асимптотического разложения решения задачи (2.2)–(2.5).

Отметим, что после решения задач $\Pi_{10}P$ и $Q_{10}P$ пограничные функции $\Pi_{11}\overset{(1)}{y}(\tau_1)$ и $Q_{11}\overset{(1)}{y}(\sigma_1)$ однозначно определяются соответственно из уравнений (3.10) и (3.12) при $i = j = k = 1$, а $\Pi_{12}x(\tau_1)$ и $Q_{12}x(\sigma_1)$ — из (3.6) и (3.7) при $i = 1$, $j = 2$.

3.3. Определение асимптотического разложения первого порядка

Регулярные члены приближения первого порядка можно найти, решив задачу $\overline{P}_1$ при помощи условия оптимальности управления (3.29). Для нахождения пограничных функций первого порядка $\Pi_{i1}\mathrm{v}(\tau_i)$, $Q_{i1}\mathrm{v}(\sigma_i)$, $i = 0, 1$, рассмотрим коэффициенты J_3, J_4 из разложения (3.4), считая известными решения задач $\overline{P}_j$, $\Pi_{i0}P$, $Q_{i0}P$, $j = 0, 1$, $i = 0, 1$.

В силу (3.3) представим коэффициент J_3 в виде

$$\int\limits_0^T \overline{F}_3(t)\,dt + \int\limits_0^{+\infty} \Pi_{02}F(\tau_0)\,d\tau_0 + \int\limits_{-\infty}^0 Q_{02}F(\sigma_0)\,d\sigma_0 + \int\limits_0^{+\infty} \Pi_{11}F(\tau_1)\,d\tau_1 + \int\limits_{-\infty}^0 Q_{11}F(\sigma_1)\,d\sigma_1$$

и аналогично J_1 преобразуем каждое слагаемое в последней сумме, используя условия оптимальности управления задач $\overline{P}_0$ (3.22)–(3.23), $\overline{P}_1$ (3.29)–(3.31), $\Pi_{00}P$ (3.24)–(3.25), $Q_{00}P$ (3.26)–(3.28), $\Pi_{10}P$ (3.32)–(3.33), $Q_{10}P$ (3.34)–(3.36), а также соотношения (3.5) при $j = 2, 3$, (3.6) и (3.7) при $i = 0, 1$, $j = 2, 3$, (3.8) при $j = 0$, $k = 1, 2$; $j = 1$, $k = 2$; $j = 2$, $k = 1$, (3.10) и (3.12) при $i = 0$, $j = 1, 2$, $k = 1$; $i = j = 0, 1$, $k = 2$; $i = k = 1$, $j = 2$, (3.9), (3.11), (3.13), (3.16) при $j = 2, 3$, (3.18) при $j = 1, 2$ и (3.37). Отбрасывая известные слагаемые, из преобразованного выражения для J_3 получаем сумму $\Pi_{01}J + Q_{01}J$, слагаемые которой принимаем за критерии качества в следующих задачах оптимального управления:

$$\Pi_{01}P: \quad \Pi_{01}J = \int\limits_0^{+\infty} \Big(\Big\langle \Pi_{01}w, 1/2\mathbb{W}_0(0)\Pi_{01}w + \Big(\tau_0\frac{d\mathbb{W}_0}{dt}(0) + \mathbb{W}_1(0)\Big)\Pi_{00}w - \mathbb{A}_0(0)'\Pi_{00}\psi\Big\rangle$$

$$+ \Big\langle \Pi_{01}u, 1/2\mathbb{R}_0(0)\Pi_{01}u + \Big(\tau_0\frac{d\mathbb{R}_0}{dt}(0) + \mathbb{R}_1(0)\Big)\Pi_{00}u\Big\rangle\Big)\,d\tau_0 \to \min,$$

$$\frac{d\Pi_{01}x}{d\tau_0} = A_0(0)\Pi_{00}x + B_0(0)\Pi_{00}y, \quad \frac{d\Pi_{01}\overset{(1)}{y}}{d\tau_0} = \Pi_{01}\overset{(1)}{u}, \quad 0 = \Pi_{01}\overset{(2)}{u} - \frac{d\Pi_{00}\overset{(2)}{y}}{d\tau_0}, \quad \tau_0 \geq 0,$$

$$\Pi_{01}x(+\infty) = 0, \quad \Pi_{01}\overset{(1)}{y}(0) = -(\overset{(1)}{\overline{y}}_1(0) + \Pi_{11}\overset{(1)}{y}(0)),$$

$$Q_{01}P: \quad Q_{01}J = \big\langle Q_{01}w(0), E_2(\overline{\psi}_1(T) + Q_{10}\psi(0))\big\rangle + \int\limits_{-\infty}^0 \Big(\Big\langle Q_{01}w, 1/2\mathbb{W}_0(T)Q_{01}w$$

$$+ \Big(\sigma_0\frac{d\mathbb{W}_0}{dt}(T) + \mathbb{W}_1(T)\Big)Q_{00}w - \mathbb{A}_0(T)'Q_{00}\psi\Big\rangle$$

$$+ \Big\langle Q_{01}u, 1/2\mathbb{R}_0(T)Q_{01}u + \Big(\sigma_0\frac{d\mathbb{R}_0}{dt}(T) + \mathbb{R}_1(T)\Big)Q_{00}u\Big\rangle\Big)\,d\sigma_0 \to \min,$$

$$\frac{dQ_{01}x}{d\sigma_0} = A_0(T)Q_{00}x + B_0(T)Q_{00}y, \quad \frac{dQ_{01}\overset{(1)}{y}}{d\sigma_0} = Q_{01}\overset{(1)}{u}, \quad 0 = Q_{01}\overset{(2)}{u} - \frac{dQ_{00}\overset{(2)}{y}}{d\sigma_0}, \quad \sigma_0 \leq 0,$$

$$Q_{01}x(-\infty) = 0, \quad Q_{01}\overset{(1)}{y}(-\infty) = 0.$$

Роль управлений в задачах $\Pi_{01}P$ и $Q_{01}P$ фактически выполняют соответственно функции $\Pi_{01}\overset{(1)}{u}(\tau_0)$, $\Pi_{01}\overset{(2)}{y}(\tau_0)$ и $Q_{01}\overset{(1)}{u}(\sigma_0)$, $Q_{01}\overset{(2)}{y}(\sigma_0)$, а переменными состояния являются функции $\Pi_{01}\overset{(1)}{y}(\tau_0)$ и $Q_{01}\overset{(1)}{y}(\sigma_0)$. Условия оптимальности управления для однозначно разрешимых задач $\Pi_{01}P$ и $Q_{01}P$ запишем в виде

$$\mathbb{B}'\Pi_{01}\psi - \mathbb{R}_0(0)\Pi_{01}u - \Big(\tau_0\frac{d\mathbb{R}_0}{dt}(0) + \mathbb{R}_1(0)\Big)\Pi_{00}u = 0, \tag{3.38}$$

где $\Pi_{01}\psi(\tau_0) = (\Pi_{01}p(\tau_0)', \Pi_{01}q(\tau_0)')'$, $\Pi_{01}q(\tau_0) = (\Pi_{01}\overset{(1)}{q}(\tau_0)', \Pi_{01}\overset{(2)}{q}(\tau_0)')'$ — решение задачи

$$(E_1+E_2)\frac{d\Pi_{01}\psi}{d\tau_0} = \mathbb{W}_0(0)\Pi_{01}w + \Big(\tau_0\frac{d\mathbb{W}_0}{dt}(0) + \mathbb{W}_1(0)\Big)\Pi_{00}w - \mathbb{A}_0(0)'\Pi_{00}\psi, \quad \tau_0 \geq 0, \tag{3.39}$$

$$(E_1+E_2)\Pi_{01}\psi(+\infty) = 0 \tag{3.40}$$

и

$$\mathbb{B}'Q_{01}\psi - \mathbb{R}_0(T)Q_{01}u - \Big(\sigma_0\frac{d\mathbb{R}_0}{dt}(T) + \mathbb{R}_1(T)\Big)Q_{00}u = 0, \tag{3.41}$$

где $Q_{01}\psi(\sigma_0) = (Q_{01}p(\sigma_0)', Q_{01}q(\sigma_0)')'$, $Q_{01}q(\sigma_0) = (Q_{01}\overset{(1)}{q}(\sigma_0)', Q_{01}\overset{(2)}{q}(\sigma_0)')'$ — решение задачи

$$(E_1+E_2)\frac{dQ_{01}\psi}{d\sigma_0} = \mathbb{W}_0(T)Q_{01}w + \Big(\sigma_0\frac{d\mathbb{W}_0}{dt}(T) + \mathbb{W}_1(T)\Big)Q_{00}w - \mathbb{A}_0(T)'Q_{00}\psi, \quad \sigma_0 \leq 0, \tag{3.42}$$

$$E_1Q_{01}\psi(-\infty) = 0, \quad E_2Q_{01}\psi(0) = -E_2(\overline{\psi}_1(T) + Q_{10}\psi(0)). \tag{3.43}$$

Далее будем учитывать, что после решения задач $\Pi_{01}P$ и $Q_{01}P$ пограничные функции $\Pi_{02}x(\tau_0)$ и $Q_{02}x(\sigma_0)$ однозначно определяются из (3.6) и (3.7) при $i=0$, $j=2$.

Представим коэффициент J_4 из (3.4) в виде

$$\int\limits_0^T \overline{F}_4(t)\,dt + \int\limits_0^{+\infty}\Pi_{03}F(\tau_0)\,d\tau_0 + \int\limits_{-\infty}^0 Q_{03}F(\sigma_0)\,d\sigma_0 + \int\limits_0^{+\infty}\Pi_{12}F(\tau_1)\,d\tau_1 + \int\limits_{-\infty}^0 Q_{12}F(\sigma_1)\,d\sigma_1.$$

Считаем, что уже найдены решения задач $\overline{P}_j$, $\Pi_{0j}P$, $Q_{0j}P$, $j=0,1$ и $\Pi_{10}P$, $Q_{10}P$. Используя условия оптимальности управления для последних восьми задач, а именно соотношения (3.22)–(3.23), (3.29)–(3.31), (3.24)–(3.25), (3.38)–(3.40), (3.26)–(3.28), (3.41)–(3.43) и (3.32)–(3.33), (3.34)–(3.36), а также уравнения (3.5) при $j=2,3,4$, (3.6) и (3.7) при $i=0,1$, $j=3,4$, (3.8) при $j=0,2$, $k=1,2$; $j=3$, $k=1$; $j=1$, $k=2$, (3.10) и (3.12) при $i=0,1$, $j=2,3$, $k=1$; $i=0$, $j=1$, $k=2$; $i=1$, $j=1,2$, $k=2$, (3.16) при $j=2,3,4$, (3.18) при $j=2,3$, (3.19) при $j=1,2$, (3.9), (3.11), (3.13), (3.37), преобразуем каждое из слагаемых в J_4 аналогично J_2. После отбрасывания известных слагаемых из J_4 получаем сумму $\overline{J}_2 + \Pi_{11}J + Q_{11}J$, где

$$\begin{gathered}
\overline{J}_2 = \langle\overline{w}_2(T), E_1(Q_{01}\psi(0) + Q_{10}\psi(0))\rangle + \int\limits_0^T \Big(\big\langle\overline{w}_2, 1/2\mathbb{W}_0(t)\overline{w}_2 + \mathbb{W}_1(t)\overline{w}_1 + \mathbb{W}_2(t)\overline{w}_0 \\
- \mathbb{A}_1(t)'\overline{\psi}_1 - \mathbb{A}_2(t)'\overline{\psi}_0\big\rangle + \big\langle\overline{u}_2, 1/2\mathbb{R}_0(t)\overline{u}_2 + \mathbb{R}_1(t)\overline{u}_1\big\rangle - \Big\langle\overline{w}_2, E_2\frac{d\overline{\psi}_1}{dt}\Big\rangle\Big)\,dt, \\
\Pi_{11}J = \int\limits_0^{+\infty}\Big(\big\langle\Pi_{11}w, 1/2\mathbb{W}_0(0)\Pi_{11}w + \mathbb{W}_1(0)\Pi_{10}w\big\rangle \\
+ \big\langle\Pi_{11}u, 1/2\mathbb{R}_0(0)\Pi_{11}u + \mathbb{R}_1(0)\Pi_{10}u - \mathbb{B}'E_2\Pi_{10}\psi\big\rangle\Big)\,d\tau_1, \\
Q_{11}J = \langle Q_{11}w(0), E_3Q_{01}\psi(0)\rangle + \int\limits_{-\infty}^0 \Big(\big\langle Q_{11}w, 1/2\mathbb{W}_0(T)Q_{11}w + \mathbb{W}_1(T)Q_{10}w\big\rangle \\
+ \big\langle Q_{11}u, 1/2\mathbb{R}_0(T)Q_{11}u + \mathbb{R}_1(T)Q_{10}u - \mathbb{B}'E_2Q_{10}\psi\big\rangle\Big)\,d\sigma_1.
\end{gathered}$$

Поскольку каждое выражение из последних трех зависит от функций одного типа, то $\Pi_{11}\mathrm{v}(\tau_1)$ и $Q_{11}\mathrm{v}(\sigma_1)$ можно определить как решение следующих двух задач:

$$\Pi_{11}P: \quad \Pi_{11}J \to \min,$$

$$\frac{d\Pi_{11}x}{d\tau_1} = 0, \quad \frac{d\Pi_{11}\overset{(1)}{y}}{d\tau_1} = \Pi_{10}\overset{(1)}{u}, \quad \frac{d\Pi_{11}\overset{(2)}{y}}{d\tau_1} = \Pi_{11}\overset{(2)}{u}, \quad \tau_1 \geq 0,$$

$$\Pi_{11}x(+\infty) = 0, \quad \Pi_{11}\overset{(1)}{y}(+\infty) = 0, \quad \Pi_{11}\overset{(2)}{y}(0) = -(\overset{(2)}{\overline{y}}_1(0) + \Pi_{01}\overset{(2)}{y}(0)),$$

$$Q_{11}P: \quad Q_{11}J \to \min,$$

$$\frac{dQ_{11}x}{d\sigma_1} = 0, \quad \frac{dQ_{11}\overset{(1)}{y}}{d\sigma_1} = Q_{10}\overset{(1)}{u}, \quad \frac{dQ_{11}\overset{(2)}{y}}{d\sigma_1} = Q_{11}\overset{(2)}{u}, \quad \sigma_1 \leq 0,$$

$$Q_{11}w(-\infty) = 0.$$

Условия оптимальности управления однозначно разрешимых линейно-квадратичных задач $\Pi_{11}P$ и $Q_{11}P$ запишем соответственно в виде

$$\mathbb{B}'E_3\Pi_{11}\psi + \mathbb{B}'E_2\Pi_{10}\psi - \mathbb{R}_0(0)\Pi_{11}u - \mathbb{R}_1(0)\Pi_{10}u = 0, \tag{3.44}$$

где $\Pi_{11}\psi(\tau_1) = (\Pi_{11}p(\tau_1)', \Pi_{11}q(\tau_1)')'$, $\Pi_{11}q(\tau_1) = (\Pi_{11}\overset{(1)}{q}(\tau_1)', \Pi_{11}\overset{(2)}{q}(\tau_1)')'$ — решение задачи

$$\begin{gathered}\frac{d\Pi_{11}\psi}{d\tau_1} = \mathbb{W}_0(0)\Pi_{11}w + \mathbb{W}_1(0)\Pi_{10}w, \quad \tau_1 \geq 0,\\ \Pi_{11}\psi(+\infty) = 0,\end{gathered} \tag{3.45}$$

и

$$\mathbb{B}'E_3Q_{11}\psi + \mathbb{B}'E_2Q_{10}\psi - \mathbb{R}_0(T)Q_{11}u - \mathbb{R}_1(T)Q_{10}u = 0, \tag{3.46}$$

где $Q_{11}\psi(\sigma_1) = (Q_{11}p(\sigma_1)', Q_{11}q(\sigma_1)')'$, $Q_{11}q(\sigma_1) = (Q_{11}\overset{(1)}{q}(\sigma_1)', Q_{11}\overset{(2)}{q}(\sigma_1)')'$ — решение задачи

$$\frac{dQ_{11}\psi}{d\sigma_1} = \mathbb{W}_0(T)Q_{11}w + \mathbb{W}_1(T)Q_{10}w, \quad \sigma_1 \leq 0, \tag{3.47}$$

$$(E_1 + E_2)Q_{11}\psi(-\infty) = 0, \quad E_3Q_{11}\psi(0) = -E_3Q_{01}\psi(0). \tag{3.48}$$

Итак, решая задачи $\overline{P}_j$, $\Pi_{ij}P$, $Q_{ij}P$, $j = 0, 1$, $i = 0, 1$, получаем асимптотическое приближение первого порядка решения задачи (2.2)–(2.5), откуда с учетом замены переменных (2.1) можно найти первые члены асимптотического разложения решения исходной задачи (1.1), (1.2).

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Коэффициент J_0 из разложения* (3.4) *является критерием качества для задачи $\overline{P}_0$, из преобразованных выражений коэффициентов J_1 и J_3 получается сумма критериев качества для задач $\Pi_{00}P$, $Q_{00}P$ и $\Pi_{01}P$, $Q_{01}P$, а из преобразованных выражений коэффициентов J_2, J_4 получается соответственно сумма критериев качества для задач $\overline{P}_1$, $\Pi_{1j}P$, $Q_{1j}P$, $j = 0, 1$.*

4. Сравнение построенной асимптотики с асимптотикой решения двухточечной краевой задачи, вытекающей из условий оптимальности управления для возмущенной задачи

При достаточно малых $\varepsilon > 0$ задача (2.2)–(2.5) однозначно разрешима и оптимальное управление удовлетворяет условию

$$\mathbb{B}'\xi - \mathbb{R}(t, \varepsilon)u = 0, \tag{4.1}$$

где сопряженная переменная $\xi(t,\varepsilon) = (\zeta(t,\varepsilon)', \eta(t,\varepsilon)')'$, $\eta(t,\varepsilon) = (\overset{(1)}{\eta}(t,\varepsilon)', \overset{(2)}{\eta}(t,\varepsilon)')'$ является решением задачи

$$\mathbb{E}(\varepsilon)\frac{d\xi}{dt} = \mathbb{W}(t,\varepsilon)w - \mathbb{A}(t,\varepsilon)'\xi, \quad \mathbb{E}(\varepsilon) = diag(I_n, \varepsilon I_{n_1}, \varepsilon^2 I_{n_2}), \tag{4.2}$$

$$\xi(T,\varepsilon) = 0. \tag{4.3}$$

Представим сопряженную переменную, как и решение задачи (2.2)–(2.5), в форме (3.1), т. е.

$$\xi(t,\varepsilon) = \overline{\xi}(t,\varepsilon) + \sum_{i=0}^{1}(\Pi_i\xi(\tau_i,\varepsilon) + Q_i\xi(\sigma_i,\varepsilon)), \tag{4.4}$$

где каждое слагаемое допускает асимптотическое разложение по целым неотрицательным степеням ε, причем пограничные функции имеют оценки типа (3.2). Подставим (3.1), (4.4) в (2.2)–(2.5) и (4.1)–(4.3). Представим правые части равенств в виде асимптотической суммы (3.3). Путем приравнивания в равенствах, выведенных из (2.3)–(2.5), коэффициентов при одинаковых степенях ε (отдельно зависящих от t, τ_i, σ_i, $i = 0,1$), получены уравнения (3.5)–(3.12); с учетом поведения пограничных функций на бесконечности — равенства (3.13)–(3.19); откуда найдены уравнения и начальные условия для переменных состояния в построенных задачах $\overline{P}_j$, $\Pi_{ij}P$, $Q_{ij}P$, $j = 0,1$, $i = 0,1$.

Положим $g(u,\xi,t,\varepsilon) = \mathbb{B}'\xi - \mathbb{R}(t,\varepsilon)u$, $h(w,\xi,t,\varepsilon) = \mathbb{W}(t,\varepsilon)w - \mathbb{A}(t,\varepsilon)'\xi$. Для этих функций будем использовать обозначения $\widehat{\overline{g}}_j(t,\varepsilon)$, $\widehat{\Pi}_{ij}g(\tau_i,\varepsilon)$, $\widehat{Q}_{ij}g(\sigma_i,\varepsilon)$, $\widehat{\overline{h}}_j(t,\varepsilon)$, $\widehat{\Pi}_{ij}h(\tau_i,\varepsilon)$, $\widehat{Q}_{ij}h(\sigma_i,\varepsilon)$, $i = 0,1$, аналогичные соответствующим обозначениям для f. Например, $\widehat{\overline{g}}_j(t,\varepsilon)$ означает значение функции g при $u = \overline{\widetilde{u}}_j$, $\xi = \overline{\widetilde{\xi}}_j$.

Осуществляя приравнивание коэффициентов в равенствах, полученных из (4.1)–(4.2) после подстановки разложений для v, ξ (аналогичное проделанному для (2.3)–(2.5)), при $j \geq 0$, $i = 0,1$ имеем соотношения

$$\mathbb{B}'\overline{\xi}_j - \mathbb{R}_0(t)\overline{u}_j + [\widehat{\overline{g}}_{j-1}(t,\varepsilon)]_j = 0, \tag{4.5}$$

$$E_1\frac{d\overline{\xi}_j}{dt} + E_2\frac{d\overline{\xi}_{j-1}}{dt} + E_3\frac{d\overline{\xi}_{j-2}}{dt} = \mathbb{W}_0(t)\overline{w}_j - \mathbb{A}_0(t)'\overline{\xi}_j + [\widehat{\overline{h}}_{j-1}(t,\varepsilon)]_j, \tag{4.6}$$

$$\mathbb{B}'\Pi_{ij}\xi - \mathbb{R}_0(0)\Pi_{ij}u + [\widehat{\Pi}_{i(j-1)}g(\tau_i,\varepsilon)]_j = 0, \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} E_1\frac{d\Pi_{ij}\xi}{d\tau_i} + E_2\frac{d\Pi_{i(j-1)}\xi}{d\tau_i} + E_3\frac{d\Pi_{i(j-2)}\xi}{d\tau_i} &= \mathbb{W}_0(0)\Pi_{i(j-i-1)}w \\ &- \mathbb{A}_0(0)'\Pi_{i(j-i-1)}\xi + [\widehat{\Pi}_{i(j-i-2)}h(\tau_i,\varepsilon)]_{j-i-1}, \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\mathbb{B}'Q_{ij}\xi - \mathbb{R}_0(T)Q_{ij}u + [\widehat{Q}_{i(j-1)}g(\sigma_i,\varepsilon)]_j = 0, \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned} E_1\frac{dQ_{ij}\xi}{d\sigma_i} + E_2\frac{dQ_{i(j-1)}\xi}{d\sigma_i} + E_3\frac{dQ_{i(j-2)}\xi}{d\sigma_i} &= \mathbb{W}_0(T)Q_{i(j-i-1)}w \\ &- \mathbb{A}_0(T)'Q_{i(j-i-1)}\xi + [\widehat{Q}_{i(j-i-2)}h(\sigma_i,\varepsilon)]_{j-i-1}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Напомним, что функции с отрицательными индексами считаем равными нулю. Поэтому из (4.8), (4.10) при $i = 0,1$, $j = 0$ и при $i = j = 1$ следуют равенства

$$\frac{d\Pi_{i0}\zeta}{d\tau_i} = 0, \quad \frac{dQ_{i0}\zeta}{d\sigma_i} = 0, \quad i = 0,1, \quad \frac{d\Pi_{11}\zeta}{d\tau_1} = 0, \quad \frac{dQ_{11}\zeta}{d\sigma_1} = 0, \quad \frac{d\Pi_{10}\overset{(1)}{\eta}}{d\tau_1} = 0, \quad \frac{dQ_{10}\overset{(1)}{\eta}}{d\sigma_1} = 0.$$

Отсюда в силу стремления пограничных функций на бесконечности к нулю, получаем

$$\begin{gathered} \Pi_{i0}\zeta(\tau_i) = 0, \quad Q_{i0}\zeta(\sigma_i) = 0, \quad i = 0,1, \quad \Pi_{11}\zeta(\tau_1) = 0, \quad Q_{11}\zeta(\sigma_1) = 0, \\ \Pi_{10}\overset{(1)}{\eta}(\tau_1) = 0, \quad Q_{10}\overset{(1)}{\eta}(\sigma_1) = 0. \end{gathered} \tag{4.11}$$

Учитывая (3.8) при $j=0$, $k=1,2$ и (3.9), (3.11), из (4.5) при $j=0$ и (4.7), (4.9) при $i=0$, $j=0$ находим соответственно

$$\overline{\eta}_0(t)=0, \quad \Pi_{00}\overset{(2)}{\eta}(\tau_0)=0, \quad Q_{00}\overset{(2)}{\eta}(\sigma_0)=0. \tag{4.12}$$

Принимая во внимание первое равенство из (4.12), а также (3.8) при $j=0$, $k=1,2$ и $j=1$, $k=2$, из (4.5) с $j=1$ имеем

$$\overset{(2)}{\overline{\eta}}_1(t)=0. \tag{4.13}$$

Подставляя разложения (4.4) в (4.3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, с учетом поведения пограничных функций на бесконечности получаем $\overline{\xi}_j(T)+Q_{0j}\xi(0)+Q_{1j}\xi(0)=0$. Отсюда при $j=0,1$ в силу (4.11)–(4.13) имеем

$$\overline{\zeta}_0(T)=0, \quad Q_{00}\overset{(1)}{\eta}(0)=0, \quad Q_{10}\overset{(2)}{\eta}(0)=0, \tag{4.14}$$

$$\overline{\zeta}_1(T)+Q_{01}\zeta(0)=0, \quad \overset{(1)}{\overline{\eta}}_1(T)+Q_{01}\overset{(1)}{\eta}(0)+Q_{11}\overset{(1)}{\eta}(0)=0, \quad Q_{01}\overset{(2)}{\eta}(0)+Q_{11}\overset{(2)}{\eta}(0)=0. \tag{4.15}$$

Поскольку (4.5), (4.6) при $j=0$ и первое соотношение в (4.14) совпадают с условиями оптимальности управления (3.21)–(3.23) для задачи $\overline{P}_0$, то $\overline{\psi}_0=\overline{\xi}_0$. Сравнивая (4.7) при $j=0$ и (4.8) при $j=1$ с условиями оптимальности управления (3.24)–(3.25) для задачи $\Pi_{00}P$, с учетом (4.11), (4.12), равенства $\Pi_{00}\overset{(2)}{q}(\tau_0)=0$, вида матриц $\mathbb{A}(t,\varepsilon)$, $\mathbb{B}$ и свойства пограничных функций на бесконечности получаем $E_1\Pi_{01}\xi+(E_2+E_3)\Pi_{00}\xi=\Pi_{00}\psi$. Так как (4.9) при $i=j=0$, (4.10) при $i=0$, $j=1$ и второе равенство из (4.14) в силу (4.11), (4.12), равенства $Q_{00}\overset{(2)}{q}(\sigma_0)=0$, свойства пограничных функций и вида матриц $\mathbb{A}(t,\varepsilon)$, $\mathbb{B}$ совпадают с условиями оптимальности управления (3.26)–(3.28) для задачи $Q_{00}P$, то $E_1Q_{01}\xi+(E_2+E_3)Q_{00}\xi=Q_{00}\psi$. Аналогичным образом (4.7) при $i=1$, $j=0$, (4.8) при $i=1$, $j=2$ ввиду (4.11) и свойства пограничных функций на бесконечности соответствуют условиям оптимальности управления (3.32)–(3.33) для задачи $\Pi_{10}P$, поэтому $E_1\Pi_{12}\xi+E_2\Pi_{11}\xi+E_3\Pi_{10}\xi=\Pi_{10}\psi$. Так как (4.9) при $i=1$, $j=0$, (4.10) при $i=1$, $j=2$, третье равенство из (4.14) с учетом (4.11) и свойства пограничных функций совпадают с условиями оптимальности управления (3.34)–(3.36) для задачи $Q_{10}P$, то $E_1Q_{12}\xi+E_2Q_{11}\xi+E_3Q_{10}\xi=Q_{10}\psi$.

Учитывая полученные выше равенства, а также (4.11)–(4.13), вид матриц $\mathbb{A}(t,\varepsilon)$, $\mathbb{B}$ и свойства пограничных функций, в результате сравнения (4.5), (4.6) при $j=1$, (4.7) при $i=0$, $j=1$; $i=j=1$, (4.8) при $i=0$, $j=2$; $i=1$, $j=3$, (4.9) при $i=0$, $j=1$; $i=j=1$, (4.10) при $i=0$, $j=2$; $i=1$, $j=3$ и (4.15) с условиями оптимальности управления (3.29)–(3.31), (3.38)–(3.40), (3.44)–(3.45), (3.41)–(3.43), (3.46)–(3.48) для задач $\overline{P}_1$, $\Pi_{01}P$, $\Pi_{11}P$, $Q_{01}P$, $Q_{11}P$ соответственно имеем $\overline{\psi}_1=\overline{\xi}_1$, $E_1\Pi_{02}\xi+(E_2+E_3)\Pi_{01}\xi=\Pi_{01}\psi$, $E_1\Pi_{13}\xi+E_2\Pi_{12}\xi+E_3\Pi_{11}\xi=\Pi_{11}\psi$, $E_1Q_{02}\xi+(E_2+E_3)Q_{01}\xi=Q_{01}\psi$, $E_1Q_{13}\xi+E_2Q_{12}\xi+E_3Q_{11}\xi=Q_{11}\psi$.

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Краевые задачи, полученные из условий оптимальности управления для задач* $\overline{P}_j$, $\Pi_{ij}P$, $Q_{ij}P$, $j=0,1$, $i=0,1$, *совпадают соответственно с задачами для* $(\overline{\mathrm{v}}_j,\overline{\xi}_j)$, $(\Pi_{0j}\mathrm{v},E_1\Pi_{0(j+1)}\xi+(E_2+E_3)\Pi_{0j}\xi)$, $(Q_{0j}\mathrm{v},E_1Q_{0(j+1)}\xi+(E_2+E_3)Q_{0j}\xi)$, $(\Pi_{1j}\mathrm{v},E_1\Pi_{1(j+2)}\xi+E_2\Pi_{1(j+1)}\xi+E_3\Pi_{1j}\xi)$, $(Q_{1j}\mathrm{v},E_1Q_{1(j+2)}\xi+E_2Q_{1(j+1)}\xi+E_3Q_{1j}\xi)$ *из асимптотики* (3.1), (4.4) *решения задачи* (2.3)–(2.5), (4.1)–(4.3), *вытекающей из условия оптимальности управления для задачи* P_ε.

5. Пример

Рассмотрим задачу

$$J(\overset{(1)}{v},\overset{(2)}{v})=1/2\int_0^1((\overset{(1)}{z})^2+(\overset{(2)}{z})^2+\varepsilon^2(\overset{(1)}{v})^2+\varepsilon^4(\overset{(2)}{v})^2)\,dt\to\min,$$

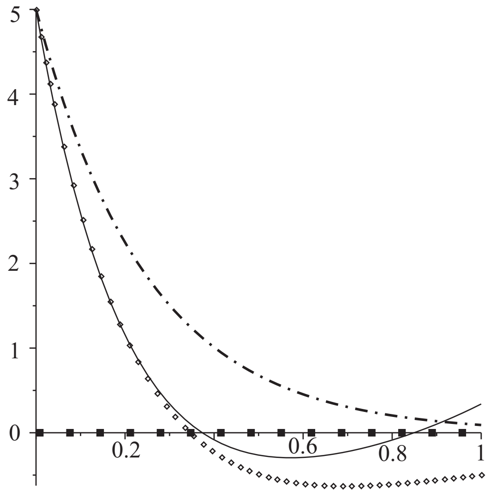

Рис. 1

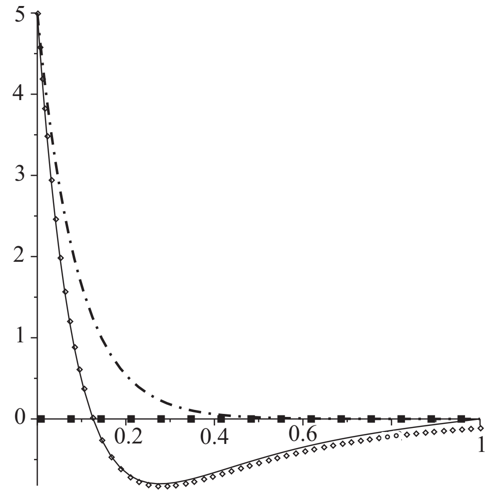

Рис. 2

$$\frac{d\overset{(1)}{z}}{dt} = \overset{(2)}{z} + \overset{(1)}{v}, \quad \frac{d\overset{(2)}{z}}{dt} = \overset{(1)}{z} + \overset{(2)}{v}, \overset{(1)}{z}(0) = 10, \quad \overset{(2)}{z}(0) = 5.$$

Используя замены переменных (2.1), из последней задачи получаем следующую:

$$J_\varepsilon(u) = 1/2 \int_0^1 \big((\overset{(1)}{x} + \overset{(1)}{y})^2 + (\overset{(2)}{x} + \overset{(2)}{y})^2 + (\overset{(1)}{u})^2 + (\overset{(2)}{u})^2\big)\, dt \to \min,$$

$$\frac{d\overset{(1)}{x}}{dt} = \overset{(2)}{x} + \overset{(2)}{y}, \quad \frac{d\overset{(2)}{x}}{dt} = \overset{(1)}{x} + \overset{(1)}{y}, \quad \varepsilon^k \frac{d\overset{(k)}{y}}{dt} = \overset{(k)}{u},$$

$$\overset{(1)}{x}(0) = 10, \quad \overset{(2)}{x}(0) = 5, \quad \overset{(k)}{y}(0) = 0, \quad k = 1, 2.$$

Руководствуясь вышеизложенным алгоритмом, сформулируем задачи оптимального управления $\overline{P}_j$, $\Pi_{ij}P$, $Q_{ij}P$, $j = 0, 1$, $i = 0, 1$, из решения которых с учетом замены (2.1) получим первые члены асимптотического разложения решения $\overset{(k)}{v}(t, \varepsilon)$, $\overset{(k)}{z}(t, \varepsilon)$, $k = 1, 2$, рассматриваемой задачи: $\overset{(1)}{\overline{v}}_{-1} = 0$, $\overset{(2)}{\overline{v}}_{-2} = 0$, $\overset{(1)}{\overline{z}}_0 = 0$, $\overset{(2)}{\overline{z}}_0 = 0$, $\overset{(1)}{\widetilde{v}}_0 = -10e^{-t/\varepsilon}/\varepsilon$, $\overset{(2)}{\widetilde{v}}_{-1} = -5e^{-t/\varepsilon^2}/\varepsilon^2 - 10e^{-t/\varepsilon^2}/\varepsilon$, $\overset{(1)}{\widetilde{z}}_1 = 10e^{-t/\varepsilon}$, $\overset{(2)}{\widetilde{z}}_1 = 5e^{-t/\varepsilon^2} - 10\varepsilon(e^{-t/\varepsilon} - e^{-t/\varepsilon^2})$.

Результаты вычислений при $\varepsilon = 0.5$ и $\varepsilon = 0.3$ для функции $\overset{(2)}{z}(t, \varepsilon)$ и ее приближений представлены на рис. 1, 2 соответственно, где сплошной тонкой линией обозначены точные решения $\overset{(2)}{z}_*(t, \varepsilon)$, черными прямоугольничками — функции $\overset{(2)}{\overline{z}}_0(t)$, штрихпунктирной линией — функции $\overset{(2)}{\widetilde{z}}_0(t, \varepsilon)$, ромбиками — функции $\overset{(2)}{\widetilde{z}}_1(t, \varepsilon)$.

Значения функционала при оптимальном управлении $\overset{(k)}{v}_*(t, \varepsilon)$, $k = 1, 2$, и его первых приближениях представлены в следующей таблице:

ε	$J(\overset{(1)}{\overline{v}}_{-1}, \overset{(2)}{\overline{v}}_{-2})$	$J(\overset{(1)}{\widetilde{v}}_{-1}, \overset{(2)}{\widetilde{v}}_{-2})$	$J(\overset{(1)}{\widetilde{v}}_0, \overset{(2)}{\widetilde{v}}_{-1})$	$J(\overset{(1)}{v}_*, \overset{(2)}{v}_*)$
0.5	182.396	47.625	34.049	33.761
0.3	182.396	23.817	17.216	17.188

Из таблицы видно, что значение минимизируемого функционала уменьшается при использовании асимптотического приближения оптимального управления высшего порядка, т. е. построенная последовательность управлений является минимизирующей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Дмитриев М.Г., Курина Г.А.** Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3–51.
2. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Наука, 1983. 393 с.
3. **O'Malley R.E. Jr., Jameson A.** Singular perturbations and singular arcs. Part 2 // IEEE Trans. Automat. Control. 1977. Vol. AC-22, no. 3. P. 328–337.
4. **Курина Г.А.** Об одной вырожденной задаче оптимального управления и сингулярных возмущениях // Докл. АН СССР. 1977. Т. 237, № 3. С. 517–520.
5. **Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.** Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М.: Изд-во МГУ, 1978. 106 с.
6. **Белокопытов С.В., Дмитриев М.Г., Овезов Х.А.** Построение субоптимальных управлений в линейно-квадратичных задачах, близким к вырожденным // Информатика и системный анализ: сб. ст. Ашхабад, 1990. С. 4–19.
7. **Дмитриев М.Г., Курина Г.А., Овезов Х.А.** Использование прямой схемы для решения линейно-квадратичной задачи оптимального управления с сингулярным возмущением // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1996. № 4. С. 62–68.
8. **Kurina G.A, Nguyen T.H.** Asymptotic solution of a linear-quadratic problem with discontinuous coefficients and cheap control // Appl. Math. Comput. 2014. Vol. 232. P. 347–364.
9. **Белокопытов С.В., Дмитриев М.Г.** Решение классических задач оптимального управления с погранслоем // Автоматика и телемеханика. 1989. № 7. С. 71–81.
10. **Glizer V.Y.** Cheap quadratic control of linear systems with state and control delays // Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. B: Appl. Algorithms. 2012. Vol. 19, no. 1–2. P. 277–301.
11. **Васильева А.Б.** Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1963. Т. 3, № 4. С. 611–642.
12. **Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.** Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
13. **Kurina G.A., März R.** On linear-quadratic optimal control problem for time-varying descriptor systems // SIAM J. Control Optim. 2004. Vol. 42, no. 6. P. 2062–2077.
14. **Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.** Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 2003. 615 с.

Калашникова Маргарита Александровна
аспирант
Воронежский государственный университет
e-mail: margarita.kalashnikova@mail.ru

Поступила 01.11.15

Курина Галина Алексеевна
д-р физ.-мат. наук, профессор
Воронежский государственный университет
e-mail: kurina@math.vsu.ru