ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 1 2016

УДК 517.95

О НЕКОТОРЫХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ[1]

А. Л. Казаков, Св. С. Орлов

Статья посвящена нахождению инвариантных решений нелинейного уравнения теплопроводности (фильтрации) без источников и стоков при степенной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры в случае одной пространственной переменной. Процедура построения сводится к задачам Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностью при старшей производной, для которых доказана теорема существования и единственности решения в классе аналитических функций (в виде сходящегося степенного ряда). В одном из частных случаев получена оценка области сходимости данного ряда.

Ключевые слова: уравнения с частными производными, нелинейное уравнение теплопроводности (фильтрации), инвариантное решение, задача Коши.

A. L. Kazakov, S. S. Orlov. On some exact solutions of the nonlinear heat equation.

The paper is devoted to finding invariant solutions of the nonlinear heat (filter) equation without sources or sinks in the case of one spatial variable and a power dependence of the thermal conduction coefficient on the temperature. The construction procedure is reduced to Cauchy problems for ordinary differential equations with a singularity at the highest derivative. An existence and uniqueness theorem is proved for solutions of such problems in the class of analytic functions (in the form of a converging series). An estimate is obtained for the convergence domain of this series in one particular case.

Keywords: partial differential equations, nonlinear heat (filter) equation, invariant solution, Cauchy problem.

Введение

С нелинейными уравнениями с частными производными [1] приходится встречаться в различных областях физики, механики, химии, биологии и так далее – приложения весьма многочисленны. При этом лишь в исключительных случаях удается получить общее решение таких уравнений. Поэтому обычно исследователи ограничиваются поиском и анализом частных решений, которые принято называть точными. Последние играют немаловажную роль в формировании правильного понимания качественных особенностей явлений и процессов в различных областях естествознания.

На данный момент разработано множество методов нахождения точных решений нелинейных уравнений с частными производными. Одним из них является классический метод группового анализа (поиска симметрий), который позволяет получать инвариантные относительно некоторых преобразований решения исследуемого уравнения. Истоки группового анализа дифференциальных уравнений следует искать в фундаментальных трудах норвежского математика Софуса Ли. Дальнейшее развитие теоретико-групповых методов анализа дифференциальных уравнений связано с работами многих известных математиков, среди которых особо выделяются фундаментальные работы Л. В. Овсянникова [2] и его учеников (см., например, [3]).

Объектом исследования в настоящей статье является нелинейное уравнение теплопроводности (фильтрации) [4] в случае степенной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры [5]. К настоящему времени существует довольно значительное количество работ, посвященных нахождению его точных решений и исследованию симметричных свойств [6; 7].

[1]Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проекты 16-01-00608 А, 16-31-00291 мол_а).

Групповой анализ является, пожалуй, наиболее популярным, но далеко не единственным методом нахождения точных решений нелинейных эволюционных уравнений. Полный обзор исследований подобной направленности вряд ли может быть дан в журнальной статье, укажем в качестве примера "геометрический метод", который развивается в отделе прикладных задач Института математики и механики УрО РАН [8], и предложенный О. В. Капцовым [9, гл. 3] метод линейных определяющих уравнений, который в случаях, когда уравнение допускает бедную группу преобразований, зачастую оказываются более действенным. Например, с использованием указанных подходов для нелинейного уравнения теплопроводности с источником найдены новые точные решения.

Настоящая статья посвящена нахождению автомодельных решений нелинейного уравнения теплопроводности (фильтрации) без источников и стоков. Рассмотрен случай одной пространственной переменной, которая имеет смысл расстояния до некоторой точки, прямой или плоскости. Построение сводится к задачам Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностью при старшей производной. Доказана теорема, обеспечивающая существование и единственность нетривиальных решений таких задач в классе аналитических функций. Получена оценка радиуса сходимости ряда в одном из частных случаев.

1. Постановка задачи

Рассмотрим нелинейное параболическое уравнение, описывающее распространение тепла в случае степенной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры, а также фильтрацию идеального политропного газа в пористой среде. В литературе данное уравнение встречается под названием "the porous medium equation" [5]. В случае одной пространственной переменной это уравнение имеет вид

$$u_t = uu_{xx} + \frac{1}{\sigma}u_x^2 + \frac{\nu}{x}uu_x, \quad \nu \in \{0, 1, 2\}, \quad \sigma \in \mathbb{R}_{>0}, \tag{1.1}$$

где $u \overset{\text{def}}{=} u(t, x)$, t — переменная времени, x — пространственная переменная. Здесь и далее индекс у функции означает дифференцирование по соответствующему аргументу.

Важной и интересной с точки зрения приложений разновидностью решений нелинейного уравнения теплопроводности являются тепловые волны, распространяющиеся по холодному (нулевому) фону с конечной скоростью. С геометрической точки зрения это две гиперповерхности: возмущенное решение $u = \varphi(t, x) > 0$ и холодный фон $u \equiv 0$, непрерывно состыкованные вдоль некоторой достаточно гладкой линии $x = a(t)$, называемой фронтом.

Первое упоминание о решениях типа тепловых волн, имеющих конечную скорость распространения, в нелинейном случае встречается в работе Я. Б. Зельдовича, А. С. Компанейца [10]. Отметим, что сам вид решений типа тепловой волны делает целесообразным рассмотрение начально-краевых задач, предполагающих обращение в нуль искомой функции в начальный момент времени. Автомодельные решения указанного типа, описывающие локализацию режимов с обострением, были получены в научной школе А. А. Самарского [11].

Построение тепловых волн в классе кусочно-аналитических функций в те же годы было выполнено А. Ф. Сидоровым [4], результаты которого были развиты представителями его научной школы [12]. В частности, для начально-краевых задач специального вида был доказан ряд теорем существования и единственности решений (как одномерных, так и многомерных), имеющих вид аналитических тепловых волн, распространяющихся по холодному фону с конечной скоростью [12; 13]. Также с использованием метода согласованных [14] и характеристических рядов [15] были построены новые решения нелинейных параболических уравнений и систем. Помимо аналитического выполнялось и численное исследование указанных задач с помощью разностных схем [16] и на основе гранично-элементного подхода [17; 18].

В настоящей статье для уравнения (1.1) в случаях плоской, цилиндрической и сферической симметрии ($\nu = 0$, $\nu = 1$ и $\nu = 2$ соответственно) производится построение некоторых точных решений, в том числе имеющих вид тепловой волны.

Следует отметить, что в качестве параметров ν и σ, вообще говоря, могут быть взяты любые вещественные числа, однако рассмотренный нами случай представляется наиболее содержательным с точки зрения приложений.

2. Инвариантные решения

Классический метод исследования симметрий (метод группового анализа) дифференциальных уравнений позволяет найти преобразования, относительно которых рассматриваемое уравнение является инвариантным, а также новые переменные, при переходе к которым уравнение существенно упрощается. Применим его для исследования уравнения (1.1).

Справедливы следующие результаты.

Утверждение 1. *Уравнение* (1.1) *в случае плоской симметрии* ($\nu = 0$) *допускает четыре различных инфинитезимальных оператора*:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_t, \quad X_3 = x\partial_x + 2t\partial_t, \quad X_4 = x\partial_x + 2u\partial_u. \tag{2.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\nu = 0$ уравнение (1.1) является частным случаем нелинейного уравнения теплопроводности $u_t = [k(u)u_x]_x$ (см. введение) которое, как известно [2], в случае $k(u) = u$ допускает операторы (2.1). □

Утверждение 2. *Уравнение* (1.1) *в случаях цилиндрической и сферической симметрии* ($\nu \in \{1, 2\}$) *допускает три различных инфинитезимальных оператора*:

$$X_2 = \partial_t, \quad X_3 = x\partial_x + 2t\partial_t, \quad X_4 = x\partial_x + 2u\partial_u.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость утверждения также без труда устанавливается с помощью стандартных методов группового анализа [2]. При этом единственное отличие от плоскосимметричного случая состоит в том, что сдвиг по пространственной координате уже не является инвариантным преобразованием. □

Построим инвариантные решения уравнения (1.1), генерируемые операторами (2.1). Для этого требуется рассмотреть линейные уравнения с частными производными первого порядка

$$X_n I = 0, \quad I \overset{\text{def}}{=} I(t, u, x), \quad n = \overline{1, 4}.$$

1°. $X_1 I = 0$. В этом случае решение имеет вид $u = C \in \mathbb{R}$.

2°. $X_2 I = 0$. Инвариантное решение имеет вид $u = w(x)$. Подставляя его в (1.1), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$ww_{xx} + \frac{1}{\sigma}w_x^2 + \frac{\nu}{x}ww_x = 0. \tag{2.2}$$

Очевидно, что одним из решений уравнения (2.2) является произвольная постоянная. Пусть $w \neq 0$, $w_x \neq 0$. Разделив (2.2) на ww_x, приходим к уравнению в полных дифференциалах, решение которого представим как $w(x) = (C_1 + C_2 x^{1-\nu})^{\sigma/(\sigma+1)}$ при $\nu \in \{0, 2\}$ или $w(x) = (C_1 + C_2 \ln x)^{\sigma/(\sigma+1)}$ при $\nu = 1$, где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Таким образом, уравнение (1.1) имеет решение

$$u(t, x) = \begin{cases} (C_1 + C_2 x^{1-\nu})^{\sigma/(\sigma+1)} & \text{при } \nu \in \{0, 2\}, \\ (C_1 + C_2 \ln x)^{\sigma/(\sigma+1)} & \text{при } \nu = 1. \end{cases}$$

3°. $X_3 I = 0$. Инвариантное решение имеет вид $u = w(z)$, $z = xt^{-1/2}$. Подставляя его в (1.1), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$ww_{zz} + \frac{1}{\sigma}w_z^2 + \left(\frac{\nu}{z}w + \frac{z}{2}\right)w_z = 0. \tag{2.3}$$

Замена $w(z) = e^s f(s)$, $s = 2\ln z$, а затем понижение порядка приводят уравнение (2.3) к виду уравнения Абеля второго рода [19].

4°. $X_4 I = 0$. Инвариантное решение имеет вид $u = x^2 w(t)$. Подставляя его в (1.1), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$w_t = \Big(2 + \frac{4}{\sigma} + 2\nu\Big) w^2,$$

решением которого является функция $w(t) = \sigma/[C - 2(\nu\sigma + \sigma + 2)t]$, где C — произвольная постоянная. Таким образом, уравнение (1.1) имеет решение

$$u(t,x) = \frac{\sigma x^2}{C - 2(\nu\sigma + \sigma + 2)t}.$$

З а м е ч а н и е 1. Множество инвариантных решений уравнения (1.1) не исчерпывается решениями, генерируемыми только операторами (2.1). Для того чтобы найти все типы неэквивалентных инвариантных решений, нужно построить их оптимальную систему. Оптимальная система одномерных подалгебр алгебры L_4 с базисом (2.1) включает в себя

$$X_1,\ X_4,\ X_{1,2} = X_1 + X_2, \quad X_{2,4} = X_2 + cX_4, \quad X_{3,4} = X_3 + cX_4, \quad X_{1,3,4} = X_1 + X_3 - X_4,$$

где $c \in \mathbb{R}$. Можно указать оптимальную систему инвариантных решений уравнения (1.1). Инвариантные относительно преобразований, порожденных X_1 и X_4, решения построены выше.

5°. $X_{1,2} I = 0$. Инвариантное решение имеет вид $u = w(z)$, $z = x - t$.

6°. $X_{2,4} I = 0$. Инвариантное решение имеет вид $u = e^{2ct} w(z)$, $z = xe^{-ct}$.

7°. $X_{3,4} I = 0$. Инвариантное решение имеет вид $u = t^c w(z)$, $z = xt^{-(c+1)/t}$.

8°. $X_{1,3,4} I = 0$. Инвариантное решение имеет вид $u = t^{-1} w(z)$, $z = x - \ln t^{1/2}$.

Таким образом, в настоящем разделе найдены симметрии для нелинейного уравнения теплопроводности (1.1) при $\nu \in \{0,1,2\}$ (утверждения 1, 2) и построена оптимальная система инвариантных решений. Некоторые из представленных решений для случая $\nu = 0$ можно найти в [20, гл. 7]. При $\nu \neq 0$ соответствующие результаты нам ранее не были известны.

3. Решения типа тепловой волны

Для уравнения (1.1) поставим задачу с заданным тепловым фронтом, т. е. потребуем выполнения граничного условия

$$u(t,x)\Big|_{x=a(t)} = 0, \tag{3.1}$$

где $a(t)$ — некоторая известная функция. Целью данного раздела является нахождение допустимых граничных условий вида (3.1) и удовлетворяющих им точных решений уравнения (1.1) (решений типа тепловой волны, распространяющейся по нулевому фону).

Утверждение 3. *Если для эволюционного уравнения $u_t = F(x,\, u,\, \partial u/\partial x,\, \partial^2 u/\partial x^2)$ функция $u(t,x) = g(t,x)w(z)$ при $z = x/a(t)$ является решением, то при $z = \ln[x/a(t)]$ эта функция также является решением.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость утверждения следует из того, что функциональные коэффициенты при $w(z)$ и ее производных для данных подстановок будут одинаковыми, в чем нетрудно убедиться. □

Опираясь на утверждение 3 и виды инвариантных решений, построенных в разд. 2, сформулируем и докажем следующее утверждение.

Утверждение 4. *Пусть* $\nu \in \{0,1,2\}$, *тогда краевая задача* (1.1), (3.1)

1) *при* $a(t) = C_1 e^{C_2 t}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, *допускает точное решение типа тепловой волны вида*

$$u(t,x) = C_2 x^2 w(z), \quad z = \ln \frac{x}{C_1 e^{C_2 t}},$$

где функция $w(z)$ *определяется как решение задачи Коши*

$$\sigma w w_{zz} + w_z^2 + \left[(\nu\sigma + 3\sigma + 4)w + \sigma\right] w_z + (2\nu\sigma + 2\sigma + 4)w^2 = 0, \tag{3.2}$$

$$w(0) = 0, \quad w_z(0) = -\sigma; \tag{3.3}$$

2) *при* $a(t) = (C_1 t + C_2)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, *допускает точное решение типа тепловой волны вида*

$$u(t,x) = \frac{\alpha C_1}{C_1 t + C_2} x^2 w(z), \quad z = \ln \frac{x}{(C_1 t + C_2)^\alpha},$$

где функция $w(z)$ *определяется как решение задачи Коши*

$$\sigma w w_{zz} + w_z^2 + \left[(\nu\sigma + 3\sigma + 4)w + \sigma\right] w_z + \left[(2\nu\sigma + 2\sigma + 4)w + \frac{\sigma}{\alpha}\right] w = 0, \tag{3.4}$$

$$w(0) = 0, \quad w_z(0) = -\sigma. \tag{3.5}$$

Доказательство. Пусть

$$u(t,x) = g(t,x) w(z), \quad z = \ln \frac{x}{a(t)}. \tag{3.6}$$

Учитывая (3.6), найдем производные функции $u(t,x)$, фигурирующие в (1.1):

$$u_t = g_t w - \frac{a_t}{a} g w_z, \quad u_x = g_x w + \frac{g w_z}{x}, \quad u_{xx} = g_{xx} w + \left(\frac{2g_x}{x} - \frac{g}{x^2}\right) w_z + \frac{g w_{zz}}{x^2}. \tag{3.7}$$

Подставляя (3.6) и (3.7) в уравнение (1.1), предварительно умноженное на σ, приходим к соотношению

$$\sigma \frac{g^2}{x^2} w w_{zz} + \frac{g^2}{x^2} w_z^2 + \left[\left((\nu\sigma - \sigma)\frac{g^2}{x^2} + (2\sigma + 2)\frac{g g_x}{x}\right) w + \sigma \frac{a_t}{a} g\right] w_z$$
$$+ \left[\left(\nu\sigma \frac{g g_x}{x} + \sigma g g_{xx} + g_x^2\right) w - \sigma g_t\right] w = 0.$$

Для того чтобы последнее выражение представляло собой обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $w(z)$, потребуем пропорциональности функциональных коэффициентов

$$\frac{g^2}{x^2},\ \frac{a_t}{a} g,\ \frac{g g_x}{x},\ g_x^2,\ g g_{xx},\ g_t. \tag{3.8}$$

Пусть

$$\frac{g^2}{x^2} = B \frac{a_t}{a} g, \quad B \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

тогда $g(t,x) = 0$ (тривиальное решение не представляет интереса) или $g(t,x) = x^2 a_t / a$ (для определенности будем полагать $B = 1$). С учетом последнего получаем

$$\frac{g g_x}{x} = g g_{xx} = 2\left(\frac{a_t}{a}\right)^2 x^2, \quad g_x^2 = 4\left(\frac{a_t}{a}\right)^2 x^2, \quad g_t = \left(\frac{a_{tt}}{a} - \frac{a_t^2}{a^2}\right) x^2.$$

Очевидно, что коэффициенты (3.8) являются попарно пропорциональными, если

$$\frac{a_{tt}}{a} = C \frac{a_t^2}{a^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a(t) = (C_1 t + C_2)^{1/(1-C)} & \text{при } C \neq 1, \\ a(t) = C_1 e^{C_2 t} & \text{при } C = 1. \end{cases}$$

Итак, для задачи (1.1), (3.1) найдено точное решение типа тепловой волны

$$u(t,x) = \frac{a_t}{a}x^2 w(z), \quad z = \ln\frac{x}{a(t)}, \tag{3.9}$$

где $a(t) = (C_1 t + C_2)^\alpha$ или $a(t) = C_1 e^{C_2 t}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, а функция $w(z)$ определяется как решение задачи Коши:

$$\sigma w w_{zz} + w_z^2 + [(\nu\sigma + 3\sigma + 4)w + \sigma]\, w_z + \Big[(2\nu\sigma + 2\sigma + 4)w - \sigma\Big(\frac{a a_{tt}}{a_t^2} - 1\Big)\Big] w = 0,$$

$$w(0) = 0, \quad w_z(0) = -\sigma.$$

В случае $a(t) = C_1 e^{C_2 t}$ решение (3.9) принимает вид

$$u(t,x) = C_2 x^2 w(z), \quad z = \ln\frac{x}{C_1 e^{C_2 t}},$$

где функция $w(z)$ определяется как решение задачи Коши (3.2), (3.3).

Если $a(t) = (C_1 t + C_2)^\alpha$, то решение (3.9) вычисляется следующим образом:

$$u(t,x) = \frac{\alpha C_1}{C_1 t + C_2} x^2 w(z), \quad z = \ln\frac{x}{(C_1 t + C_2)^\alpha},$$

где функция $w(z)$ определяется как решение задачи Коши (3.4), (3.5).

Утверждение доказано. □

Отметим, что в случае плоской симметрии также имеет место

Утверждение 5. *Пусть $\nu = 0$, тогда краевая задача* (1.1), (3.1)

1) *при $a(t) = C_1 t + C_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, допускает линейное решение типа тепловой волны*

$$u(t,x) = \sigma C_1 (C_1 t - x + C_2);$$

2) *при $a(t) = -\ln(C_1 t + C_2)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, допускает точное решение типа тепловой волны вида*

$$u(t,x) = -\frac{\alpha C_1}{C_1 t + C_2} w(z), \quad z = x + \ln(C_1 t + C_2)^\alpha,$$

где функция $w(z)$ определяется как решение задачи Коши

$$\sigma w w_{zz} + w_z^2 + \sigma w_z - \frac{\sigma}{\alpha} w = 0, \tag{3.10}$$

$$w(0) = 0, \quad w_z(0) = -\sigma. \tag{3.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$u(t,x) = g(t,x) w(z), \quad z = x - a(t). \tag{3.12}$$

Определим виды функций $g(t,x)$ и $a(t)$. Подставляя (3.12) в уравнение (1.1), предварительно умноженное на σ, и учитывая, что $\nu = 0$, получаем соотношение

$$\sigma g^2 w w_{zz} + g^2 w_z^2 + [(2\sigma + 2) g g_x w + \sigma a_t g] w_z + [(\sigma g g_{xx} + g_x^2) w - \sigma g_t] w = 0.$$

Для того чтобы последнее выражение представляло собой обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $w(z)$, потребуем пропорциональности функциональных коэффициентов g^2, $a_t g$, $g g_x$, g_x^2, $g g_{xx}$, g_t. Пусть

$$g^2 = B a_t g, \quad B \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

тогда $g(t,x) = 0$ (тривиальное решение не представляет интереса) или $g(t,x) = a_t$ (для определенности будем полагать $B = 1$). На этом этапе возможны два случая: a_t=const, т. е. $a(t) = C_1 t + C_2$ или $a_t \neq$const. Во втором случае, получаем $gg_x = g_x^2 = gg_{xx} = 0$, $g_t = a_{tt}$. Потребуем пропорциональности для g^2 и g_t, т. е. $a_t^2 = \alpha a_{tt}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Решая это уравнение, получаем $a(t) = -\ln(C_1 t + C_2)^\alpha$, C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$.

Итак, для задачи (1.1), (3.1) в случае $\nu = 0$ найдено точное решение типа тепловой волны

$$u(t,x) = a_t w(z), \quad z = x - a(t), \tag{3.13}$$

где $a(t) = C_1 t + C_2$ или $a(t) = -\ln(C_1 t + C_2)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, а функция $w(z)$ определяется как решение задачи Коши

$$a_t^2 \left(\sigma w w_{zz} + w_z^2 + \sigma w_z\right) - \sigma a_{tt} w = 0, \tag{3.14}$$

$$w(0) = 0, \quad w_z(0) = -\sigma. \tag{3.15}$$

В случае $a(t) = C_1 t + C_2$ задача Коши (3.14), (3.15) принимает вид

$$\sigma w w_{zz} + w_z^2 + \sigma w_z = 0,$$

$$w(0) = 0, \quad w_z(0) = -\sigma,$$

и, очевидно, имеет решение $w(z) = -\sigma z$. Следовательно, одним из решений краевой задачи (1.1), (3.1) при $\nu = 0$ согласно (3.13) является $u(t,x) = \sigma C_1(C_1 t - x + C_2)$.

Если $a(t) = -\ln(C_1 t + C_2)^\alpha$, то решение (3.13) принимает вид

$$u(t,x) = -\frac{\alpha C_1}{C_1 t + C_2} w(z), \quad z = x + \ln(C_1 t + C_2)^\alpha,$$

где функция $w(z)$ определяется как решение задачи Коши (3.10), (3.11).

Утверждение доказано. □

З а м е ч а н и е 2. Вопрос о конечной разрешимости обыкновенных дифференциальных уравнений (2.3), (3.2), (3.4) и (3.10) (в общем виде) в рамках данной статьи остается открытым и является предметом дальнейших исследований авторов. В настоящее время установлено, что ряд преобразований приводит указанные уравнения к виду уравнений Абеля второго рода [19, с. 93], которые, как известно, не всегда интегрируемы в явном виде.

4. Теорема существования и единственности

Задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, к которым в предыдущем разделе было сведено построение точных решений уравнения (1.1), имеют особенность, поскольку при $z = 0$ обращается в нуль множитель перед старшей производной. Поэтому вопрос о существовании их решений требует дополнительного исследования, которому и посвящен данный раздел. Рассмотрим задачу общего вида

$$\sigma w w_{zz} + w_z^2 + \sigma w_z + C_1 w w_z + C_2 w^2 + C_3 w = 0, \tag{4.1}$$

$$w(0) = 0, \quad w_z(0) = -\sigma, \tag{4.2}$$

где $C_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,3}$. Справедлива следующая

Теорема. *Задача* (4.1), (4.2) *имеет единственное ненулевое аналитическое решение в некоторой окрестности точки* $z = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство теоремы излагается кратко, поскольку выполняется с использованием стандартной процедуры метода мажорант (см., например, [12]).

Решение задачи Коши (4.1), (4.2) будем строить в виде степенного ряда

$$w(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w_n}{n!} z^n, \quad w_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^n}{dz^n} w(z)\Big|_{z=0}. \tag{4.3}$$

В этом случае $w_0 = 0$, $w_1 = -\sigma$, а остальные коэффициенты ряда (4.3) однозначно определяются согласно рекуррентному соотношению

$$w_{n+1} = -\frac{1}{\sigma(\sigma n+1)(n+1)} \Big[\sigma \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)(k+2) w_{k+2} w_{n-k} + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)(n-k+1) w_{k+1} w_{n-k+1}$$
$$+ C_1 \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) w_{k+1} w_{n-k} + C_2 \sum_{k=1}^{n-1} w_k w_{n-k} + C_3 w_n \Big], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Далее осуществляется переход к новой неизвестной функции $v(z)$ по формуле

$$w(z) = -\sigma z + z^2 v(z). \tag{4.4}$$

Подставляя (4.4) в (4.1), приходим к уравнению для функции $v \stackrel{\text{def}}{=} v(z)$

$$Av + Bzv_z + Cz^2 v_{zz} = D + zg_1(z,v) + z^2 g_2(z,v,v_z) + z^3 g_3(z,v,v_z,v_{zz}), \tag{4.5}$$

где $A, B, C \in \mathbb{R}_+$, $D \in \mathbb{R}$, а функции $g_{1,2,3}$ являются аналитическими функциями своих аргументов (конкретный вид этих констант и функций для доказательства несущественен).

Мажорантная задача для уравнения (4.5) имеет вид

$$V_{zz} = E[(G_1)_z + (G_1)_V V_z + G_2 + zG_3], \quad V(0) = V_0,\ V_z(0) = V_1, \tag{4.6}$$

где

$$E = \max_{n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}} \Big[\frac{(n-1)n+1}{A + nB + (n-1)nC} \Big], \quad G_1 \stackrel{\text{def}}{=} G_1(z,V), \quad G_2 \stackrel{\text{def}}{=} G_2(z,V,V_z), \quad G_3 \stackrel{\text{def}}{=} G_3(z,V,V_z,V_{zz}),$$

$$V_0 > v_0, \quad V_1 > v_1, \quad G_i > g_i, \quad i = \overline{1,3}.$$

Докажем, что у задачи (4.6) имеется аналитическое, мажорирующее нуль решение. Положим $z = 0$ и подставим в правую часть уравнения (4.6) V_0, V_1, тогда $V_2 = V_{zz}(0)$ однозначно определяется из соотношения $V_2 = E[G_{1z}(0,V_0) + G_{1V}(0,V_0)V_1 + G_2(0,V_0,V_1)]$, причем $V_2 > 0$.

Дифференцируя (4.6) по z, а затем выражая V_{zzz}, в конечном счете, приходим к дифференциальному уравнению третьего порядка с аналитической правой частью:

$$V_{zzz} = \frac{E}{1 - Ez(G_3)_{V_{zz}}} \big[(G_1)_{zV} + 2(G_1)_{zVV} V_z + (G_1)_{zzVV} V_z + (G_1)_{VV} V_{zz}$$
$$+ (G_2)_z + (G_2)_V V_z + (G_2)_{V_z} V_{zz} + (G_3) + z(G_3)_z + z(G_3)_V V_z + z(G_3)_{V_z} V_{zz} \big]. \tag{4.7}$$

Величины V_0, V_1, V_2 представляют собой начальные условия для уравнения (4.7) и являются строго положительными, значит, по теореме Коши о существовании аналитического решения в некоторой окрестности точки $z = 0$ у задачи (4.6) существует единственное решение — аналитическая, мажорирующая нуль функция $V(z)$. Следовательно, функции $v(z)$ и $w(z)$ также являются аналитическими.

Теорема доказана. □

Поскольку уравнения (3.2), (3.4), (3.10) являются частными случаями уравнения (4.1), то в силу теоремы каждая из задач Коши (3.2), (3.3); (3.4), (3.5); (3.10), (3.11) имеет единственное аналитическое в окрестности $z = 0$ решение.

5. Оценка области существования решения

Доказанная выше теорема обеспечивает локальную разрешимость задач Коши в классе аналитических функций, однако не позволяет оценить область сходимости рядов. В данном разделе этот сложный и содержательный вопрос исследуется для одного частного случая. Рассмотрим задачу Коши

$$\sigma w w_{zz} + w_z^2 + \sigma w_z - \frac{\sigma}{\alpha} w = 0, \tag{5.1}$$

$$w(0) = 0, \quad w_z(0) = -\sigma, \tag{5.2}$$

к которой, как показано ранее, сводится построение решения уравнения (1.1) в случае, когда $\nu = 0$, а уравнение теплового фронта имеет вид $a(t) = -\ln(C_1 t + C_2)^\alpha$.

Построим решение задачи (5.1), (5.2) в виде степенного ряда

$$w(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n z^n, \quad A_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{w_n}{n!}, \quad w_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^n}{dz^n} w(z)\Big|_{z=0}. \tag{5.3}$$

В этом случае $A_0 = 0$, $A_1 = -\sigma$, а остальные коэффициенты ряда (5.3) определяются согласно рекуррентному соотношению

$$A_{n+1} = \frac{1}{\sigma(\sigma n + 1)(n+1)} \left[\sum_{k=0}^{n-2} ((k+1)\sigma + n - k)(k+2) A_{k+2} A_{n-k} - \frac{\sigma}{\alpha} A_n \right], \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.4}$$

Для получения оценки радиуса сходимости ряда (5.3) воспользуемся следующей леммой.

Лемма. Для коэффициентов A_{n+1} степенного ряда (5.3), определяемых из рекуррентного соотношения (5.4), при $n \geqslant 2$, $\sigma \geqslant 1$ имеет место оценка

$$|A_{n+1}| < \frac{M^n}{(n+1)^2}, \quad M = \frac{1}{|\alpha|\sigma}. \tag{5.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следует отметить, что для $A_2 = \sigma/[2\alpha(\sigma+1)]$ при $\alpha > 0$, $\sigma > 1$ оценка (5.5) не выполняется. Это в значительной мере осложняет доказательство леммы.

Доказательство проводится индукцией по $n \geqslant 2$.

Рассмотрим в качестве базы индукции значения $2 \leqslant n \leqslant 5$. Используя формулу (5.4), получаем

$$|A_3| = \frac{\sigma}{6\alpha^2(\sigma+1)^2(2\sigma+1)} < \frac{M^2}{(2+1)^2}, \quad |A_4| = \frac{\sigma(3\sigma+5)}{24|\alpha|^3(\sigma+1)^3(2\sigma+1)(3\sigma+1)} < \frac{M^3}{(3+1)^2},$$

$$|A_5| = \frac{\sigma(36\sigma^3 + 132\sigma^2 + 143\sigma + 41)}{120\alpha^4(\sigma+1)^4(2\sigma+1)^2(3\sigma+1)(4\sigma+1)} < \frac{M^4}{(4+1)^2},$$

$$|A_6| = \frac{\sigma(360\sigma^4 + 1824\sigma^3 + 3203\sigma^2 + 2232\sigma + 469)}{720|\alpha|^5(\sigma+1)^5(2\sigma+1)^2(3\sigma+1)(4\sigma+1)(5\sigma+1)} < \frac{M^5}{(5+1)^2}.$$

Можно убедиться, что каждое из представленных неравенств верно для любого $\sigma \geqslant 1$. База индукции установлена.

Предположим теперь, что формула (5.5) верна для любого $n = m-1$. Тогда для $n = m \geqslant 6$ имеем

$$A_{m+1} = \frac{1}{\sigma(\sigma m + 1)(m+1)} \left[\sum_{k=0}^{m-2} ((k+1)\sigma + m - k)(k+2) A_{k+2} A_{m-k} - \frac{\sigma}{\alpha} A_m \right].$$

Введем обозначение

$$B_m = \sum_{k=0}^{m-2}((k+1)\sigma + m - k)(k+2)A_{k+2}A_{m-k} - \frac{\sigma}{\alpha}A_m$$

и перегруппируем слагаемые следующим образом:

$$B_m = \sum_{k=1}^{m-3}((k+1)\sigma + m - k)(k+2)A_{k+2}A_{m-k} + 2(m+\sigma)A_2A_m + m(\sigma m - \sigma + 2)A_2A_m - \frac{\sigma}{\alpha}A_m.$$

Подставляя в последнее выражение явный вид коэффициента A_2 и учитывая предположение индукции, получаем

$$|B_m| < M^m\Big[\sigma\sum_{k=1}^{m-3}\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{2}{m+2}\sum_{k=1}^{m-3}\frac{1}{k+1} + \frac{\sigma^2(\sigma m - \sigma + 4)}{2(\sigma+1)m}\Big].$$

Теперь воспользуемся двумя известными неравенствами:

$$\sum_{k=1}^{m-3}\frac{1}{k+1} \leqslant \ln\Big(\frac{2m-1}{5}\Big), \quad \sum_{k=1}^{m-3}\frac{1}{(k+1)^2} < \beta_1 = \frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}.$$

Последовательность $\dfrac{2}{m+2}\ln\Big(\dfrac{2m-1}{5}\Big)$ ограничена сверху величиной $\beta_2 = 2\ln(17/5)/11$. Таким образом,

$$|A_{m+1}| < \frac{M^m}{(m+1)^2}\Big[\beta_1\frac{m+1}{\sigma m+1} + \beta_2\frac{m+1}{\sigma(\sigma m+1)} + \frac{\sigma(\sigma m - \sigma + 4)(m+1)}{2(\sigma+1)m(\sigma m+1)}\Big]$$
$$< \frac{M^m}{(m+1)^2}\Big[\beta_1 + \frac{\beta_2}{\sigma} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4(\sigma+1)} - \frac{(\sigma-3)(\sigma-1)}{2(\sigma+1)m(\sigma m+1)}\Big].$$

При $\sigma \geqslant 1$ имеем, что

$$-\frac{(\sigma-3)(\sigma-1)}{2(\sigma+1)m(\sigma m+1)} \leqslant \beta_3 = \frac{11}{50} - \frac{\sqrt{266}}{75},$$

в итоге получаем

$$|A_{m+1}| < \frac{M^m}{(m+1)^2}\Big[\beta_1 + \frac{\beta_2}{\sigma} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4(\sigma+1)} - \frac{(\sigma-3)(\sigma-1)}{2(\sigma+1)m(\sigma m+1)}\Big]$$
$$< \frac{M^m}{(m+1)^2}\Big(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\Big) < \frac{M^m}{(m+1)^2}.$$

Справедливость предположения индукции установлена. Лемма доказана. □

Утверждение 6. *Степенной ряд* (5.3) *является сходящимся при* $|z| \leqslant |\alpha|\sigma$, $\sigma \geqslant 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку верно неравенство (5.5), то справедлива оценка

$$\sum_{n=3}^{+\infty}|A_n|z^n < S(z) = \sum_{n=3}^{+\infty}\frac{M^{n-1}}{n^2}z^n.$$

Используя лемму и теорему Адамара о степенном ряде, получаем следующую оценку для радиуса сходимости R ряда (5.3):

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|A_n|}} \geqslant \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{\dfrac{M^{n-1}}{n^2}}} = \frac{1}{M} = |\alpha|\sigma,$$

т. е. доказано, что ряд (5.3) сходится при $|z| < |\alpha|\sigma$. Покажем, что при $|z| = 1/M = |\alpha|\sigma$ ряд также является сходящимся. Действительно,

$$S(|\alpha|\sigma) = |\alpha|\sigma \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = |\alpha|\sigma\Big(\frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}\Big).$$

Таким образом, ряд (5.3) сходится при $|z| \leqslant |\alpha|\sigma$. Утверждение доказано. □

Утверждение 6 позволяет уточнить область существования аналитического решения задачи Коши (5.1), (5.2). Полученный результат означает, что решение данной задачи существует и единственно на отрезке $z \in [-|\alpha|\sigma, |\alpha|\sigma]$. Выясним, к каким выводам приводит этот факт для исходной задачи.

Напомним, что в рассматриваемом случае

$$u(t,x) = -\frac{\alpha C_1}{C_1 t + C_2} w(z), \quad z = x + \ln(C_1 t + C_2)^{\alpha}, \quad t \geqslant 0.$$

Будем предполагать, что тепловая волна начинает движение из начала координат. Для этого функция $a(t) = -\alpha \ln(C_1 t + C_2)$, задающая фронт тепловой волны, должна удовлетворять условию $a(0) = 0$. Таким образом, $C_2 = 1$, следовательно, $a(t) = -\alpha \ln(C_1 t + 1)$. Поскольку $t \geqslant 0$, то $a(t)$ будет обладать свойством аналитичности при $0 \leqslant t \leqslant 1/C_1$, $C_1 > 0$.

Следует отметить, что в зависимости от знака величины α тепловая волна может иметь два направления движения. Пусть $\alpha < 0$, тогда $u(t,x) \geqslant 0$, если и только если $z \leqslant 0$. Поскольку нас интересует аналитическое решение, то предполагаем $\alpha\,\sigma \leqslant z \leqslant 0$. В этом случае можем заключить, что тепловая волна распространяется вправо (первый координатный октант), а область существования аналитического решения имеет вид $0 \leqslant t \leqslant 1/C_1$, $0 \leqslant x \leqslant -\alpha \ln 2$. При $\alpha > 0$ тепловая волна движется влево (четвертый координатный октант). Этот случай симметричен предыдущему относительно оси t.

З а м е ч а н и е 3. Ограничение $\sigma \geqslant 1$, разумеется, нарушает общность рассмотрения, однако является вполне обоснованным с точки зрения физики, поскольку для задач фильтрации σ является показателем адиабаты газа, которая, как известно [1], должна быть больше единицы.

Заключение

Подведем итог представленной работы. Нами получены новые точные решения нелинейного уравнения теплопроводности вида (1.1), которые ранее в литературе не встречались. Посредством анализа структуры найденных инвариантных решений выделены классы допустимых граничных условий вида (3.1) уравнения (1.1) как в случае плоской, так и в случаях цилиндрической и сферической симметрии. С учетом этих условий построены краевые задачи (1.1), (3.1) (задачи с заданным тепловым фронтом) и их точные решения типа тепловой волны (утверждения 4, 5 и теорема). В одном из рассмотренных случаев получена оценка области существования решения (утверждение 6).

Задачи такого типа ввиду их важности и содержательности прикладного характера часто исследуются методами вычислительной математики — строятся численные решения. Однако, доказать сходимость применяемых численных методов удается далеко не всегда. Поэтому для установления корректности расчетов точные решения оказываются очень полезными.

Следует отметить, что из соответствующих видов инвариантных решений уравнений эволюционного типа, как показано в работе, можно “извлекать” допустимые граничные условия вида (3.1). Тем самым появляется возможность построения новых краевых задач и их точных решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Курант Р.** Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
2. **Овсянников Л.В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
3. Applications of group-theoretical methods in hydrodynamics / V. K. Andreev, O. V. Kaptsov, V. V. Pukhnachev, A. A. Rodionov. New York : Springer, 2010. 396 p.
4. **Сидоров А.Ф.** Избранные труды: Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
5. **Vazquez J.L.** The porous medium equation: Mathematical theory. Oxford: Clarendon Press, 2007. 648 p.
6. **Дородницын В.А.** Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1982. Т. 22, № 6. С. 1393–1400.
7. **Лагно В.И., Спичак С.В., Стогний В.И.** Симметрийный анализ уравнений эволюционного типа. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2004. 392 с.
8. **Рубина Л.И., Ульянов О.Н.** Решение нелинейных уравнений в частных производных геометрическим методом // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 265–280.
9. **Капцов О.В.** Методы интегрирования уравнений с частными производными. М.: Физматлит, 2009. 184 с.
10. **Зельдович Я.Б., Компанеец А.С.** К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // Сборник, посвященный 70-летию А. Ф. Иоффе. М.: Изд-во АН СССР, 1950. С. 61–71.
11. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений / А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов. М.: Наука, 1987. 480 с.
12. **Баутин С.П.** Аналитическая тепловая волна. М.: Физматлит, 2003. 87 с.
13. **Казаков А.Л., Лемперт А.А.** О существовании и единственности краевой задачи для параболического уравнения нестационарной фильтрации // Прикл. механика и техн. физика. 2013. Т. 54, № 2. С. 97–105.
14. **Ваганова Н.А.** Построение новых классов решений нелинейного уравнения фильтрации с помощью специальных согласованных рядов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2003. Т. 9, № 2. С. 10–20.
15. **Казаков А.Л.** Применение характеристических рядов для построения решений нелинейных параболических уравнений и систем с вырождением // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 114–122.
16. **Казаков А.Л., Лемперт А.А.** Аналитическое и численное исследование одной краевой задачи нелинейной фильтрации с вырождением // Вычисл. технологии. 2012. Т. 17, № 1. С. 57–68.
17. **Kazakov A.L., Spevak L.F.** Numerical and analytical studies of a nonlinear parabolic equation with boundary conditions of a special form // Appl. Math. Model. 2013. Vol. 37, iss. 10–11. P. 6918–6928.
18. **Казаков А.Л., Кузнецов П.А., Спевак Л.Ф.** Об одной краевой задаче с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности в сферических координатах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 119–129.
19. **Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
20. **Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И.** Методы решений нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005. 256 с.

Поступила 15.09.2015

Исправленный вариант 12.01.2016

Казаков Александр Леонидович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. лаб.
Ин-т динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН
e-mail: kazakov@icc.ru

Орлов Святослав Сергеевич
программист
Ин-т динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН
e-mail: orlov_svyatoslav@list.ru