ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 1 2016

УДК 510.67, 519.1

РАЗРЕШИМОСТЬ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ И АКСИОМАТИЗИРУЕМОСТЬ НАСЛЕДСТВЕННЫХ КЛАССОВ ГРАФОВ

А. В. Ильев

В данной работе методами теории моделей изучаются наследственные классы графов, определенные в терминах запрещенных непорожденных подграфов. Рассмотрены вопросы универсальной аксиоматизируемости и рекурсивной аксиоматизируемости наследственных классов графов. Показано, что наследственный класс графов универсально аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он может быть определен в терминах конечных запрещенных подграфов. Доказана разрешимость универсальной теории графов и универсальной теории произвольного рекурсивно аксиоматизируемого наследственного класса графов.

Ключевые слова: наследственный класс графов, универсальная теория, универсальная аксиоматизируемость, разрешимость.

A. V. Il'ev. Decidability of universal theories and axiomatizability of hereditary classes of graphs.

Hereditary classes of graphs defined by forbidden non-induced subgraphs are studied by model theory methods. Problems of universal axiomatizability and recursive axiomatizability of hereditary classes of graphs are considered. It is shown that a hereditary class of graphs is universally axiomatizable if and only if it can be defined in terms of finite forbidden subgraphs. It is proved that the universal theory of graphs and the universal theory of any recursive axiomatizable hereditary class of graphs are decidable.

Keywords: hereditary class of graphs, universal theory, universal axiomatizability, decidability

Введение

В настоящее время алгебраические методы широко используются в теории графов, в ней сформировалось целое направление исследований, которое получило название алгебраической теории графов. Наряду с алгебраическими в теории графов с успехом применяются также логические методы, прежде всего методы теории моделей. По аналогии с алгебраической теорией графов можно говорить о формировании особого раздела теории графов — логической теории графов [3].

Напомним, что обыкновенный граф можно рассматривать как алгебраическую систему, сигнатура которой состоит из предиката равенства и бинарного предиката смежности вершин, удовлетворяющего аксиомам иррефлексивности и симметричности. Поэтому теория графов представляет собой теорию первого порядка, полученную из узкого исчисления предикатов с равенством путем добавления в его сигнатуру иррефлексивного симметричного бинарного отношения. Хорошо известно, что теория графов неразрешима, неразрешима также и теория конечных графов [6; 10]. В связи с этим возникает проблема выделения разрешимых теорий различных классов графов. Естественно возникают также вопросы о разрешимости универсальной теории графов, а также универсальных теорий различных классов графов.

Универсальные теории занимают особое место в теории моделей. С помощью хорошо известной процедуры скулемизации изучение любой теории можно свести к изучению универсальной теории в расширенном языке [4; 5]. Кроме того, некоторые общие проблемы разрешимости можно интерпретировать как проблемы разрешимости универсальных теорий [10]. Исследование универсальных теорий имеет также прикладное значение. Повышенный интерес к универсальным теориям (и к универсальной логике вообще) вызывает их применение в логическом программировании и теории баз данных [1]. Отметим также, что многие комбинаторные задачи, в частности задачи экстремальной комбинаторики, сформулированные на языке теории моделей, приводят к изучению моделей универсальных теорий первого порядка [14].

Традиционный интерес вызывают вопросы аксиоматизируемости и универсальной аксиоматизируемости различных классов графов и гиперграфов [11–13;16]. Так, в [12] обсуждаются вопросы аксиоматизируемости наследственных классов графов, определенных в терминах запрещенных порожденных подграфов. Однако существуют наследственные классы графов, которые определяются в терминах запрещенных непорожденных подграфов. Примерами таких классов являются класс планарных графов, класс двудольных графов, класс графов максимальной степени, не превосходящей фиксированного $p \in \mathbb{N}$ (где $p \geq 2$), и др. Поэтому естественно возникает задача поиска условий универсальной аксиоматизируемости наследственных классов графов, определенных в терминах запрещенных непорожденных подграфов.

В данной работе методами теории моделей изучаются наследственные классы графов, определенные в терминах запрещенных непорожденных подграфов. В разд. 1 приведены основные понятия и факты теории моделей и теории графов. В разд. 2 рассмотрены вопросы универсальной аксиоматизируемости и рекурсивной аксиоматизируемости наследственных классов графов. Показано, что наследственный класс графов универсально аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он может быть определен в терминах конечных запрещенных подграфов. Раздел 3 содержит основной результат данной работы: доказана разрешимость универсальной теории графов и универсальной теории произвольного рекурсивно аксиоматизируемого наследственного класса графов.

1. Предварительные сведения

В данном разделе напомним некоторые основные определения и утверждения теории моделей и теории графов.

Сигнатурой называется последовательность

$$\Sigma = \langle P_1^{(n_1)}, ..., P_s^{(n_s)}, ...; f_1^{(m_1)}, ..., f_t^{(m_t)}, ...; c_1, ..., c_k, \ldots \rangle,$$

где $P_s^{(n_s)}$ — символ (n_s)-местного предиката, $s = 1, 2, \ldots$; $f_t^{(m_t)}$ — символ (m_t)-местной функции, $t = 1, 2, \ldots$; c_k — символы выделенных элементов (констант), $k = 1, 2, \ldots$.

Алгебраической системой сигнатуры Σ, или Σ-*системой*, называется последовательность вида $\mathcal{M} = \langle M, \Sigma \rangle$, где M — непустое множество, называемое *основным множеством* или *носителем* системы $\mathcal{M}$; c_k — выделенные элементы в M; $P_s^{(n_s)}$ — (n_s)-местный предикат, определенный на множестве M; $f_t^{(m_t)}$ — (m_t)-местная функция, определенная на M. Алгебраическая система $\mathcal{M}$ называется *моделью* или *реляционной системой*, если в ней отсутствуют функции.

Формулой сигнатуры Σ называется формула узкого исчисления предикатов с равенством, внелогические константы которой содержатся в Σ. Формулу без свободных переменных называют *предложением*. Истинность предложения φ в алгебраической системе $\mathcal{M}$ обозначается через $\mathcal{M} \models \varphi$.

Две Σ-системы $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ называются *элементарно эквивалентными* (обозначается $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$), если для любого предложения φ сигнатуры Σ

$$\mathcal{M} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi.$$

Σ-система $\mathcal{M} = \langle M, \Sigma \rangle$ называется *подсистемой* Σ-системы $\mathcal{N} = \langle N, \Sigma \rangle$ (обозначается $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$), если

1) $M \subseteq N$;

2) функции и предикаты в $\mathcal{M}$ являются ограничениями на M соответствующих функций и предикатов в $\mathcal{N}$;

3) множество M замкнуто относительно функций.

Под *классом алгебраических систем* в дальнейшем будем понимать *абстрактный класс*, т. е. такое семейство Σ-систем, которое вместе с любой алгебраической системой содержит все изоморфные ей Σ-системы. Пусть L_Σ — множество всех предложений сигнатуры Σ, $\boldsymbol{K}$ — некоторый класс Σ-систем. *Теорией класса* $\boldsymbol{K}$ называется множество $T(\boldsymbol{K})$ всех предложений из L_Σ, истинных во всех системах из $\boldsymbol{K}$. Если существует алгоритм, который позволяет ответить на вопрос, принадлежит или нет произвольное предложение из L_Σ теории $T(\boldsymbol{K})$, то эта теория называется *разрешимой*.

Предложения φ и ψ сигнатуры Σ будем называть *эквивалентными* на классе $\boldsymbol{K}$ алгебраических систем сигнатуры Σ, если для любой системы $\mathcal{M}$ класса $\boldsymbol{K}$

$$\mathcal{M} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi.$$

Формула φ называется *универсальной формулой* или *$\forall$-формулой*, если $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_n\, \psi$, где ψ — бескванторная формула. Множество всех $\forall$-предложений теории $T(\boldsymbol{K})$ называется *универсальной теорией* или *$\forall$-теорией класса* $\boldsymbol{K}$.

Класс $\boldsymbol{K}$ алгебраических систем называется *аксиоматизируемым*, если существует такое множество предложений Z сигнатуры Σ, что для любой системы $\mathcal{M}$

$$\mathcal{M} \in \boldsymbol{K} \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi \text{ для всех } \varphi \in Z.$$

Множество предложений Z называется *множеством аксиом* для $\boldsymbol{K}$. Если для класса $\boldsymbol{K}$ существует конечное множество аксиом, то класс $\boldsymbol{K}$ называется *конечно аксиоматизируемым.* Если для класса $\boldsymbol{K}$ существует множество аксиом, состоящее только из $\forall$-предложений, то класс $\boldsymbol{K}$ называется *универсально аксиоматизируемым* или *$\forall$-аксиоматизируемым.* Если для класса $\boldsymbol{K}$ существует *рекурсивное множество аксиом* Z, т. е. Z — система аксиом класса $\boldsymbol{K}$, и существует алгоритм, который по любому предложению сигнатруры Σ позволяет узнать, принадлежит оно множеству Z или нет, то класс $\boldsymbol{K}$ называется *рекурсивно аксиоматизируемым.*

Многие утверждения из теории графов могут быть сформулированы на языке теории моделей. Далее напомним некоторые хорошо известные определения и теоремы и приведем логические формулировки для ряда из них.

Граф — это пара $G = (V, E)$, где V — непустое множество элементов, называемых *вершинами*, а E — множество неупорядоченных пар различных элементов из V, называемых *ребрами.* Если $(u, v) \in E$, то вершины u и v называются *смежными.* В данной работе рассматриваются только те графы, в которых множество V не более чем счетно. Граф *конечен*, если множество его вершин конечно, и *счетно бесконечен*, если множество его вершин счетно бесконечно.

Теперь дадим определение графа как алгебраической системы.

Граф — это алгебраическая система $G = \langle V, \Sigma\rangle$, носитель которой V — непустое не более чем счетное множество, а сигнатура $\Sigma = \langle E, =\rangle$ состоит из бинарного предиката смежности вершин и предиката равенства, причем предикат смежности $E(x, y)$ является *иррефлексивным и симметричным*, т. е. удовлетворяет условиям:

1) $\forall x\ \neg E(x, x)$ (иррефлексивность);

2) $\forall x \forall y\ (E(x, y) \to E(y, x))$ (симметричность).

Последовательность попарно различных ребер $(v_1, v_2),\ (v_2, v_3), \ldots, (v_{k-1}, v_k)$ называется *цепью.* Замкнутая цепь называется *циклом.*

Граф, в котором любые две вершины смежны, называется *полным графом.* Полный граф с n вершинами обозначается через K_n.

Граф $H = \langle V_H, \Sigma\rangle$ является *подграфом* графа $G = \langle V_G, \Sigma\rangle$, если $V_H \subseteq V_G$ и любая пара смежных вершин графа H смежна в графе G. Нетрудно видеть, что не всякий подграф H является подсистемой Σ-системы G. Подграфы, являющиеся подсистемами, называются *порожденными подграфами.*

Любому графу можно поставить в соответствие условие существования подграфа, изоморфного этому графу. Оно имеет вид

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n\, \psi, \tag{1.1}$$

где ψ — конъюнкт, который содержит условия попарного различия всех переменных и не содержит множителей вида $\neg E(x_i, x_j)$ и повторяющихся множителей. Например, для графа $K_{3,3}$ предложение (1.1) выглядит следующим образом:

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 \exists x_5 \exists x_6 \left[\bigwedge_{i \neq j} (x_i \neq x_j) \wedge \bigwedge_{\substack{i=1,3,5 \\ j=2,4,6}} E(x_i, x_j) \right],$$

переменные x_1, x_3, x_5 соответствуют вершинам одной доли, x_2, x_4, x_6 — вершинам другой доли.

Граф называется *планарным*, если его можно так уложить на плоскости, что его ребра не будут пересекаться вне вершин.

Граф называется *двудольным*, если множество его вершин можно разбить на два непересекающихся подмножества V_1 и V_2 (*доли*) так, что каждое ребро графа соединяет вершины из разных долей. Если в двудольном графе каждая вершина из V_1 смежна с каждой вершиной из V_2, то такой граф называется *полным двудольным графом* и обозначается $K_{m,n}$, где m и n — число вершин в V_1 и V_2 соответственно.

Довольно часто оказывается, что бесконечные графы обладают теми же свойствами, что и все их конечные подграфы. Типичной иллюстрацией этого является следующее утверждение.

Утверждение 1 [9, с. 53, теорема 8D]. *Пусть G — счетно бесконечный граф, каждый конечный подграф которого планарен, тогда и G планарен.*

Утверждение 1 важно тем, что оно позволяет сформулировать критерий планарности графа для счетного случая, а не только для конечного.

Два графа называются *гомеоморфными*, если они могут быть получены из одного и того же графа с помощью операции подразбиения ребер, т. е. заменой некоторых ребер цепями длины $k \geq 2$.

Теорема 1 (Куратовский). *Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$.*

По аналогии с утверждением 1 может быть доказано следующее утверждение.

Утверждение 2. *Пусть G — счетно бесконечный граф, каждый конечный подграф которого двудолен, тогда и G двудолен.*

В силу утверждения 2 можно сформулировать критерий двудольности графа для счетного случая. Выглядит он точно так же, как и для конечного случая.

Теорема 2 (Кёниг). *Граф двудолен, если и только если он не содержит циклов нечетной длины.*

Классы планарных и двудольных графов являются примерами наследственных классов графов. Дадим определение наследственного класса графов.

Пусть $\boldsymbol{H}$ — некоторый класс графов. Обозначим через $Forb(\boldsymbol{H})$ класс, состоящий из всех графов, не содержащих подграфов из $\boldsymbol{H}$. Этот класс может быть определен заданием графов $H \in \boldsymbol{H}$ в качестве *запрещенных подграфов. Наследственный класс* графов — это класс, замкнутый относительно взятия подграфов. Такой класс графов иногда называют *монотонным* [7].

З а м е ч а н и е 1. Под наследственностью класса иногда понимается его замкнутость только относительно подсистем (в случае графов — замкнутость относительно порожденных подграфов). Введенное выше понятие наследственности класса графов отличается тем, что охватывает подграфы, не являющиеся подсистемами.

В дальнейшем нам потребуется следующий критерий наследственности. Аналогичное утверждение для классов графов, определенных в терминах запрещенных миноров, можно найти в книге [2, предложение 12.4.1].

Теорема 3. *Класс графов $\boldsymbol{K}$ является наследственным тогда и только тогда, когда он может быть определен в терминах запрещенных подграфов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть $\boldsymbol{K}$ — наследственный класс графов, $\boldsymbol{H}$ — дополнение к классу $\boldsymbol{K}$ в классе всех графов. Тогда $\boldsymbol{K} = Forb(\boldsymbol{H})$.

Достаточность очевидна.

Теорема доказана.

2. Аксиоматизируемость наследственных классов графов

Утверждения 1 и 2 допускают следующее обобщение, которое легко доказывается от противного.

Теорема 4. *Пусть $\boldsymbol{K} = Forb(\boldsymbol{H})$, причем все графы класса $\boldsymbol{H}$ конечны, G — счетно бесконечный граф, каждый конечный подграф которого принадлежит классу $\boldsymbol{K}$. Тогда G также принадлежит классу $\boldsymbol{K}$.*

З а м е ч а н и е 2. Любой наследственный класс графов $\boldsymbol{K} = Forb(\boldsymbol{H})$, определяемый в терминах конечных запрещенных подграфов, является аксиоматизируемым.

Данное замечание следует из теорем 3 и 4. Аксиоматика такого класса графов содержит аксиомы теории графов и некоторое множество аксиом $\{\theta\}$, каждая из которых соответствует какому-либо из запрещенных подграфов (и всем изоморфным ему графам класса $\boldsymbol{H}$). То есть $\neg\theta$ является экзистенциальным предложением вида (1.1), его единственный конъюнкт ψ содержит условия попарного различия всех переменных и не содержит множителей вида $\neg E(x_i, x_j)$ и повторяющихся множителей.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится следующий критерий.

Утверждение 3 [5, теорема 5]. *Пусть $\boldsymbol{K}$ — аксиоматизируемый класс алгебраических систем сигнатуры Σ. Класс $\boldsymbol{K}$ $\forall$-аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подсистем.*

В силу этого критерия можно сделать следующий вывод.

З а м е ч а н и е 3. Любой аксиоматизируемый наследственный класс графов является $\forall$-аксиоматизируемым.

Приведем следующий критерий универсальной аксиоматизируемости класса алгебраических систем сигнатуры Σ, различные модификации которого хорошо известны [8; 15].

Утверждение 4 [12, lemma 1]. *Класс $\boldsymbol{K}$ является $\forall$-аксиоматизируемым классом Σ-систем тогда и только тогда, когда для него существует класс $\boldsymbol{H}$ запрещенных конечных подсистем.*

Переформулируя данное утверждение для графов, получим следующую теорему.

Теорема 5. *Класс $\boldsymbol{K}$ графов является $\forall$-аксиоматизируемым классом тогда и только тогда, когда для него существует класс $\boldsymbol{H}$ запрещенных конечных порожденных подграфов.*

Теорема 5, по существу, является критерием универсальной аксиоматизируемости наследственных классов графов, определенных в терминах запрещенных порожденных подграфов. Однако существуют наследственные классы графов, для которых вышеуказанный критерий непосредственно неприменим, поскольку они определяются в терминах запрещенных непорожденных подграфов. Примерами таких классов, в частности, являются:

∘ класс планарных графов — запрещенными подграфами являются все графы, гомеоморфные K_5 или $K_{3,3}$;

∘ класс двудольных графов — запрещенными подграфами являются все циклы нечетной длины;

∘ класс графов максимальной степени, не превосходящей фиксированного $p \in \mathbb{N}$ (где $p \geq 2$) — запрещенными подграфами являются все графы, изоморфные звездам $K_{1,p+1}$.

Поэтому было бы естественно получить критерий универсальной аксиоматизируемости для наследственных классов графов, определенных в терминах непорожденных запрещенных подграфов. Сформулируем и докажем соответствующую теорему.

Теорема 6. *Наследственный класс графов* $\boldsymbol{K}$ *является* $\forall$*-аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда* $\boldsymbol{K} = Forb(\boldsymbol{H})$*, где* $\boldsymbol{H}$ *— класс, состоящий из конечных запрещенных подграфов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Поскольку $\boldsymbol{K}$ является $\forall$-аксиоматизируемым, то любая его аксиома может считаться $\forall$-предложением. Тогда множество его запрещенных подграфов, которое существует по теореме 3, можно задать следующим образом.

Для каждой аксиомы φ ее отрицание $\neg\varphi$ имеет вид $\exists x_1 \ldots \exists x_n \psi$, где ψ — бескванторная формула. Очевидно, что можно определить конечное множество $\boldsymbol{H}_\varphi$ всех графов с числом вершин от 1 до n, на которых предложение $\neg\varphi$ истинно. Тогда, объединив множества $\boldsymbol{H}_\varphi$ для всех аксиом, получим семейство $\boldsymbol{H}$ конечных запрещенных подграфов для данного класса.

Достаточность. Аксиоматизируемость произвольного наследственного класса графов, определяемого в терминах конечных запрещенных подграфов, была установлена в замечании 2. Из замечания 3 следует его $\forall$-аксиоматизируемость.

Теорема доказана.

В качестве примеров $\forall$-аксиоматизируемых наследственных классов графов рассмотрим классы планарных и двудольных графов. С помощью теоремы Куратовского (см. теорему 1) можно аксиоматизировать класс планарных графов на логическом языке первого порядка. Для этого введем некоторые дополнительные обозначения:

$$P_0(x, y) = E(x, y),$$

$$P_1(x, y, z_1) = E(x, z_1) \wedge E(z_1, y),$$
$$P_2(x, y, z_1, z_2) = E(x, z_1) \wedge E(z_1, z_2) \wedge E(z_2, y),$$

и т. д.

С помощью этих обозначений сформулируем предложения $\varphi_{k_1 \ldots k_{10}}$, означающие существование подграфа, гомеоморфного K_5 (переменные $x_1, \ldots, x_5$ соответствуют вершинам графа K_5):

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 \exists x_5\ \exists z_{1,1} \ldots \exists z_{1,k_1}\ \ldots\ \exists z_{10,1} \ldots \exists z_{10,k_{10}}\ \Big[\bigwedge_{i \neq j} (x_i \neq x_j) \wedge \bigwedge_{\substack{p=1,\ldots,10 \\ q=1,\ldots,k_p}} (x_i \neq z_{p,q})$$

$$\wedge \bigwedge_{p \neq s\ \vee\ q \neq t} (z_{p,q} \neq z_{s,t}) \wedge P_{k_1}(x_1, x_2, z_{1,1}, \ldots, z_{1,k_1}) \wedge \ldots \wedge P_{k_{10}}(x_4, x_5, z_{10,1}, \ldots, z_{10,k_{10}}) \Big],$$

где $k_1, \ldots, k_{10} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Аналогично записываются предложения $\psi_{k_1 \ldots k_9}$, означающие существование подграфа, гомеоморфного $K_{3,3}$ (переменные x_1, x_3, x_5 соответствуют вершинам одной доли, x_2, x_4, x_6 — вершинам другой доли графа $K_{3,3}$):

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 \exists x_5 \exists x_6\ \exists z_{1,1} \ldots \exists z_{1,k_1}\ \ldots\ \exists z_{9,1} \ldots \exists z_{9,k_9}\ \Big[\bigwedge_{i \neq j} (x_i \neq x_j)$$

$$\wedge \bigwedge_{\substack{p=1,\ldots,9 \\ q=1,\ldots,k_p}} (x_i \neq z_{p,q}) \wedge \bigwedge_{p \neq s\ \vee\ q \neq t} (z_{p,q} \neq z_{s,t})$$

$$\wedge\ P_{k_1}(x_1, x_2, z_{1,1}, \ldots, z_{1,k_1}) \wedge P_{k_2}(x_1, x_4, z_{2,1}, \ldots, z_{2,k_2}) \wedge \ldots \wedge P_{k_9}(x_5, x_6, z_{9,1}, \ldots, z_{9,k_9})\Big],$$

где $k_1, \ldots, k_9 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Таким образом, аксиоматика класса планарных графов содержит аксиомы теории графов и счетное множество аксиом $\neg\varphi_{k_1 \ldots k_{10}}$ и $\neg\psi_{k_1 \ldots k_9}$.

Определим на языке теории моделей и класс двудольных графов. С помощью теоремы Кёнига (см. теорему 2) аксиоматизируем класс двудольных графов. Запишем предложение ξ_i, означающее существование подграфа — цикла нечетной длины $2i + 1$:

$$\exists x_1 \exists x_2\ \ldots\ \exists x_{2i+1}\ \Big[\bigwedge_{j \neq k}(x_j \neq x_k) \wedge \bigwedge_{j=1,\ldots,2i} E(x_j, x_{j+1}) \wedge E(x_{2i+1}, x_1)\Big].$$

Тогда аксиоматика класса двудольных графов содержит аксиомы теории графов и счетное множество аксиом $\neg\xi_i$.

Утверждение 5. *Классы планарных и двудольных графов рекурсивно аксиоматизируемы.*

Доказательство. Приведем общую схему алгоритма, потверждающего рекурсивную аксиоматизируемость данных классов графов. Рассмотрим аксиомы $\{\theta\}$, соответствующие запрещенным подграфам этих классов (в случае планарных графов это аксиомы $\neg\varphi_{kl\ldots t}$ и $\neg\psi_{kl\ldots s}$, в случае двудольных графов — аксиомы $\neg\xi_i$).

На вход алгоритму подается произвольное предложение φ сигнатуры Σ. Чтобы данное предложение принадлежало множеству $\{\theta\}$, оно должно соответствовать какому-либо запрещенному подграфу. Его отрицание в этом случае имеет вид $\exists x_1 \ldots \exists x_n\, \psi$, где ψ — конъюнкт, содержащий условия попарного различия всех переменных и не содержащий множителей вида $\neg E(x_i, x_j)$ и повторяющихся множителей. На первом шаге алгоритм проверяет, выполнены ли эти условия для предложения φ. Если выполнены, то переходим на следущий шаг, иначе $\varphi \notin \{\theta\}$.

Аксиомы $\{\theta\}$ классов планарных и двудольных графов могут быть упорядочены таким образом, что все аксиомы, содержащие m переменных, будут идти раньше, чем аксиомы, содержащие $m + 1$ переменных, причем это упорядочение может быть осуществлено для сколь угодно большого числа переменных. На втором шаге алгоритма для предложения φ нужно просмотреть все аксиомы, содержащие n переменных и проверить, не совпадет ли одна из них с φ. Данная проверка позволит сделать окончательный вывод о принадлежности φ множеству аксиом $\{\theta\}$.

Утверждение доказано.

3. Разрешимость универсальных теорий наследственных классов графов

Универсальные теории занимают особое место в теории моделей. С помощью метода скулемизации любая теория может быть расширена до универсально аксиоматизируемой теории путем расширения сигнатуры [4]. Однако данная процедура является сугубо теоретической, поскольку ее применение часто приводит к заметному усложнению теории. Тем не менее ряд задач, сформулированных на языке теории моделей, приводит к изучению моделей универсальных теорий.

При рассмотрении любой теории важное значение имеет вопрос о ее разрешимости. Положительный ответ на него для теории какого-либо класса $\boldsymbol{K}$ алгебраических систем позволяет сделать вывод о принципиальной возможности получения исчерпывающего перечня свойств, присущих всем системам класса $\boldsymbol{K}$. Поскольку разрешимые теории в чистом виде встречаются довольно редко, вопрос о разрешимости универсальных теорий является более чем актуальным.

Неразрешимость теории графов была установлена И. А. Лавровым (см. [10, теорема 3.3.3; 6]). Естественно возникают вопросы о разрешимости универсальной теории графов, а также универсальных теорий различных классов графов.

Теорема 7. 1) *Универсальная теория графов разрешима.*

2) *Универсальная теория произвольного рекурсивно аксиоматизируемого наследственного класса графов разрешима.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что первое утверждение теоремы является частным случаем второго утверждения — в классе всех графов множество конечных запрещенных подграфов пусто. Поэтому будем доказывать только второе утверждение. Для этого рассмотрим следующий алгоритм проверки предложения на принадлежность $\forall$-теории.

Пусть T — универсальная теория произвольного наследственного класса графов $\boldsymbol{K}$, определенного в терминах конечных запрещенных подграфов. На вход алгоритму подается произвольное универсальное предложение φ. Его отрицание $\neg\varphi$ преобразуется в эквивалентное на классе всех графов предложение, находящееся в предваренной дизъюнктивной форме (ДФ). Алгоритм пытается построить граф класса $\boldsymbol{K}$, на котором предложение $\neg\varphi$ будет истинно. Если удастся, то предложение φ не принадлежит универсальной теории T, и алгоритм выдает ответ НЕТ. Если же это невозможно, то φ принадлежит этой теории, и алгоритм выдает ответ ДА.

Алгоритм.

Шаг 1. Для универсального предложения φ формулируется предложение $\neg\varphi$. Это будет экзистенциальное предложение, т. е. $\neg\varphi = \exists x_1 \ \ldots \ \exists x_n \, \psi$, где ψ — бескванторная формула. Затем $\neg\varphi$ преобразуется в эквивалентное предложение $\neg\varphi_1$, находящееся в предваренной ДФ: $\neg\varphi_1 = \exists x_1 \ \ldots \ \exists x_n \, (\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m)$, где ψ_i — конъюнкты, $i = 1, \ldots, m$.

Шаг 2. Алгоритм последовательно просматривает все конъюнкты предложения $\neg\varphi_1$. Если конъюнкт ψ_i содержит множитель $E(x, y)$, то в этот конъюнкт добавляется множитель $x \neq y$ в случае его отсутствия. В итоге получается эквивалентное предложение $\neg\varphi_2$.

Шаг 3. Алгоритм просматривает все конъюнкты предложения $\neg\varphi_2$. Если в каком-то конъюнкте ψ_i содержатся переменные x и y, но нет ни множителя $x = y$, ни множителя $x \neq y$, то алгоритм заменяет конъюнкт ψ_i на дизъюнкцию $[\psi_i \wedge (x = y)] \vee [\psi_i \wedge (x \neq y)]$. Эта процедура продолжается, пока возможно. Таким образом получается эквивалентное предложение $\neg\varphi_3$.

Шаг 4. В каждом конъюнкте ψ_i предложения $\neg\varphi_3$, содержащем множитель $x = y$, алгоритм заменяет все вхождения переменной y на x в остальных множителях конъюнкта ψ_i и удаляет исходное равенство. Эта процедура повторяется до тех пор, пока не исключатся все равенства. В итоге получается эквивалентное предложение $\neg\varphi_4$ в предваренной ДФ, в котором каждый конъюнкт содержит условие попарного различия всех входящих в него переменных.

Шаг 5. Предложение $\neg\varphi$ в ДФ будет истинно для графа из $\boldsymbol{K}$, если на этом графе истинным будет хотя бы один из конъюнктов ψ_i предложения $\neg\varphi_4$. Алгоритмом последовательно просматриваются все конъюнкты ψ_i и удаляются те из них, которые ложны на любом графе. Признаки этих конъюнктов:

1) конъюнкт содержит множитель $x \neq x$;
2) конъюнкт содержит множитель $E(x, x)$;
3) конъюнкт одновременно содержит множители $E(x, y)$ и $\neg E(x, y)$;
4) конъюнкт одновременно содержит множители $E(x, y)$ и $\neg E(y, x)$.

Если все конъюнкты предложения $\neg\varphi_4$ удалены на этом шаге, то предложение φ истинно для всех графов и, следовательно, принадлежит универсальной теории T. В этом случае алгоритм заканчивает работу и выдает ответ ДА. Если же какие-то конъюнкты ψ_i предложения $\neg\varphi_4$ исключить не удалось, то они составят новое экзистенциальное предложение $\neg\varphi_5$, эквивалентное предложению $\neg\varphi_4$ на классе всех графов. В этом случае алгоритм переходит на шаг 6.

Ш а г 6. Алгоритм последовательно просматривает все конъюнкты предложения $\neg\varphi_5$. Для текущего конъюнкта ψ_i строится граф с минимальным числом ребер, на котором этот конъюнкт будет истинен. Затем идет проверка этого графа на принадлежность классу $\boldsymbol{K}$:

∘ Если построенный граф принадлежит классу $\boldsymbol{K}$, то алгоритм завершает свою работу и выдает ответ НЕТ.

∘ Если построенный граф не принадлежит классу $\boldsymbol{K}$, то осуществляется переход к следующему конъюнкту.

∘ Если все конъюнкты просмотрены и ни для одного из них не удалось построить модели из класса $\boldsymbol{K}$, то алгоритм заканчивает свою работу и выдает ответ ДА.

Для любого конъюнкта ψ_i предложения $\neg\varphi_5$ можно построить n-вершинный граф G, на котором этот конъюнкт будет истинен. Его симметричную матрицу смежности обозначим через A. Вершины графа G находятся во взаимно однозначном соответствии с переменными конъюнкта, на главной диагонали матрицы A стоят нули. Если матрица смежности не заполняется до конца по условию конъюнкта, то алгоритм дозаполняет ее нулями, исключая таким образом дополнительную возможность появления в рассматриваемом графе запрещенных подграфов класса $\boldsymbol{K}$.

Чтобы убедиться в принадлежности n-вершинного графа G классу $\boldsymbol{K}$, нужно рассмотреть все аксиомы θ, которые соответствуют запрещенным подграфам, имеющим не более n вершин. Для этого перебираются все предложения, содержащие не более n переменных, отрицания которых имеют вид $\exists x_1 \ \ldots\ \exists x_m\, \psi$, где ψ — конъюнкт, содержащий условия попарного различия всех переменных и не содержащий множителей вида $\neg E(x_i, x_j)$ и повторяющихся множителей. При рекурсивной аксиоматизируемости класса $\boldsymbol{K}$ среди этих предложений можно определить аксиомы.

Для выяснения того, не содержит ли граф G запрещенных подграфов, нужно проверить, все ли предложения $\neg\theta$ ложны на данном графе. С этой целью для каждой аксиомы θ, содержащей m переменных ($m \le n$), рассматриваются всевозможные соответствия между переменными $x_1, x_2, \ldots, x_m$ аксиомы θ и вершинами $1, 2, \ldots, n$ графа (см. таблицу из примера 2 для $m = 3$, $n = 4$). Для каждого соответствия проверяется ложность $\neg\theta$ на матрице смежности графа.

По окончании работы алгоритма для предложения $\neg\varphi$ будет построена модель — граф класса $\boldsymbol{K}$ либо будет доказана невозможность построения такой модели. Таким образом, будет получен ответ на вопрос о принадлежности универсального предложения φ теории T.

Теорема 7 доказана.

Следствие. *Универсальные теории планарных и двудольных графов разрешимы.*

Данное следствие справедливо в силу утверждения 5.

Следующие простые примеры помогут наглядно продемонстрировать работу алгоритма из теоремы 7.

П р и м е р 1. T — универсальная теория графов. Предложение φ имеет вид

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 [(x_1 = x_2) \vee (x_1 \ne x_3) \vee E(x_1, x_2) \vee \neg E(x_2, x_3)].$$

На шаге 1 формулируется его отрицание $\neg\varphi$, которое совпадает с $\neg\varphi_1$:

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 [(x_1 = x_3) \wedge (x_1 \ne x_2) \wedge E(x_2, x_3) \wedge \neg E(x_1, x_2)].$$

После выполнения шага 2 получаем предложение $\neg\varphi_2$:

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 [(x_1 = x_3) \wedge (x_1 \ne x_2) \wedge (x_2 \ne x_3) \wedge E(x_2, x_3) \wedge \neg E(x_1, x_2)].$$

Предложение $\neg\varphi_3$, построенное на шаге 3, совпадет с $\neg\varphi_2$.

На шаге 4 получаем предложение $\neg\varphi_4$:

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 [(x_1 \ne x_2) \wedge (x_2 \ne x_1) \wedge E(x_2, x_1) \wedge \neg E(x_1, x_2)].$$

На шаге 5 единственный конъюнкт $\neg\varphi_4$ будет удален, что позволит сделать вывод о принадлежности предложения φ универсальной теории графов.

П р и м е р 2. T — универсальная теория двудольных графов. Предложение φ имеет вид

$$\forall x_1\forall x_2\forall x_3\forall x_4[(x_1 = x_2) \vee (x_2 = x_3) \vee (x_2 = x_4) \vee (x_3 = x_4)$$

$$\vee E(x_1, x_4) \vee \neg E(x_1, x_2) \vee \neg E(x_2, x_3) \vee \neg E(x_3, x_4)].$$

На шаге 1 формулируется его отрицание $\neg\varphi$, которое совпадает с $\neg\varphi_1$:

$$\exists x_1\exists x_2\exists x_3\exists x_4[(x_1 \neq x_2) \wedge (x_2 \neq x_3) \wedge (x_2 \neq x_4) \wedge (x_3 \neq x_4)$$

$$\wedge E(x_1, x_2) \wedge E(x_2, x_3) \wedge E(x_3, x_4) \wedge \neg E(x_1, x_4)].$$

Оно состоит из единственного конъюнкта, что несколько упростит остальные шаги алгоритма.

Предложение $\neg\varphi_2$, построенное на шаге 2, совпадет с $\neg\varphi_1$.

На шаге 3 алгоритм вначале заменит единственный конъюнкт ψ предложения $\neg\varphi_2$ дизъюнкцией $(\psi \wedge (x_1 = x_3)) \vee (\psi \wedge (x_1 \neq x_3))$, а затем эту дизъюнкцию заменит на следующую:

$$(\psi \wedge (x_1 = x_3) \wedge (x_1 = x_4)) \vee (\psi \wedge (x_1 = x_3) \wedge (x_1 \neq x_4))$$

$$\vee \ (\psi \wedge (x_1 \neq x_3) \wedge (x_1 = x_4)) \vee (\psi \wedge (x_1 \neq x_3) \wedge (x_1 \neq x_4)).$$

После удаления равенств на шаге 4 будет получено предложение $\neg\varphi_4$, состоящее из четырех конъюнктов:

$$\exists x_1\exists x_2\exists x_3\exists x_4\Big[(x_1 \neq x_2) \wedge E(x_1, x_2) \wedge E(x_2, x_1) \wedge E(x_1, x_1) \wedge \neg E(x_1, x_1)$$

$$\wedge \bigwedge_{\substack{i\neq j\\ i,j=1,2,4}} (x_i \neq x_j) \wedge E(x_1, x_2) \wedge E(x_2, x_1) \wedge E(x_1, x_4) \wedge \neg E(x_1, x_4)$$

$$\wedge \bigwedge_{\substack{i\neq j\\ i,j=1,2,3}} (x_i \neq x_j) \wedge E(x_1, x_2) \wedge E(x_2, x_3) \wedge E(x_3, x_1) \wedge \neg E(x_1, x_1)$$

$$\wedge \bigwedge_{\substack{i\neq j\\ i,j=1,2,3,4}} (x_i \neq x_j) \wedge E(x_1, x_2) \wedge E(x_2, x_3) \wedge E(x_3, x_4) \wedge \neg E(x_1, x_4)\Big].$$

Соответствия между переменными аксиомы θ
и вершинами графа

№	x_1	x_2	x_3
1	1	2	3
2	1	2	4
3	1	3	2
4	1	3	4
5	1	4	2
6	1	4	3
...	...	...	...
23	4	3	1
24	4	3	2

На шаге 5 алгоритмом будут удалены первые два конъюнкта предложения $\neg\varphi_4$ как тождественно ложные на графах. В итоге предложение $\neg\varphi_5$ примет вид

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 \Big[\bigwedge_{\substack{i \neq j \\ i,j=1,2,3}} (x_i \neq x_j) \wedge E(x_1, x_2) \wedge E(x_2, x_3) \wedge E(x_3, x_1) \wedge \neg E(x_1, x_1)$$

$$\wedge \bigwedge_{\substack{i \neq j \\ i,j=1,2,3,4}} (x_i \neq x_j) \wedge E(x_1, x_2) \wedge E(x_2, x_3) \wedge E(x_3, x_4) \wedge \neg E(x_1, x_4) \Big].$$

На шаге 6 при просмотре первого конъюнкта будет построен граф K_3, его матрица смежности имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что этот граф не двудолен, так как является одним из запрещенных подграфов в классе двудольных графов. Для него нарушено условие аксиомы $\neg\xi_1$ — единственной аксиомы класса двудольных графов, выполнимость которой нужно проверить, поскольку число ее переменных не превосходит числа переменных конъюнкта.

При просмотре второго конъюнкта будет построена цепь длины 3 с ребрами $(1, 2)$, $(2, 3)$ и $(3, 4)$, ее матрица смежности имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\neg\xi_1$ — единственная аксиома класса двудольных графов, выполнимость которой необходимо проверить. Формулируем для этой аксиомы ее отрицание ξ_1:

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \big[(x_1 \neq x_2) \wedge (x_1 \neq x_3) \wedge (x_2 \neq x_3) \wedge E(x_1, x_2) \wedge E(x_1, x_3) \wedge E(x_2, x_3) \big].$$

Рассмотрим всевозможные соответствия между переменными аксиомы $\neg\xi_1$ и вершинами графа (см. таблицу). Чтобы рассматриваемый граф принадлежал классу двудольных графов, предложение ξ_1 должно быть ложно на нем для всех соответствий, т. е. этот граф не должен содержать цикла длины 3. Очевидно, что так оно и есть. Рассматриваемый граф не содержит циклов нечетной длины. Поэтому данный граф принадлежит классу двудольных графов.

Таким образом, существует двудольный граф, на котором истинно предложение $\neg\varphi$, т. е. исходное предложение φ не принадлежит универсальной теории двудольных графов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Горбунов В.А.** Алгебраическая теория квазимногообразий. Новосибирск: Науч. кн., 1999. 368 с.
2. **Дистель Р.** Теория графов. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002. 336 с.
3. **Зыков А.А.** Основы теории графов. М.: Наука, 1987. 384 с.
4. **Ершов Ю.Л.** Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980. 416 с.
5. **Ершов Ю.Л., Палютин Е.А.** Математическая логика. М.: Наука, 1987. 336 с.
6. **Лавров И.А.** Эффективная неотделимость множества тождественно истинных и множества конечно опровержимых формул некоторых элементарных теорий // Алгебра и логика. 1963. Т. 2, № 1. С. 5–18.
7. **Малышев Д.С.** Критические классы графов для задачи о реберном списковом ранжировании // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2013. Т. 20, № 5. С. 59–76.
8. **Мальцев А.И.** Универсально аксиоматизируемые подклассы локально конечных классов моделей // Сиб. мат. журн. 1967. № 5. С. 1005–1014.

9. **Уилсон Р.** Введение в теорию графов. М.: Мир, 1977. 208 с.
10. Элементарные теории / Ю.Л. Ершов, И.А. Лавров, А.Д. Тайманов, М.А. Тайцлин // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20, № 4. С. 37–108.
11. **Bozapalidis A., Kalampakas A.** An axiomatization of graphs // Acta inform. 2004. Vol. 41, no. 1. P. 19–61.
12. **Caicedo X.** Finitely axiomatizable quasivarieties of graphs // Algebra Universalis. 1995. Vol. 34, no. 2. P. 314–321.
13. Formalization of planar graphs / M. Yamamoto, S. Nishizaki, M. Hagiya, Y. Toda // 8th Int. Workshop on Higer Order Logic, Theorem Proving and Its Applications. Berlin: Springer, 1995. P. 369–384. (Lecture Notes in Comput. Sci.; vol. 971.)
14. **Razborov A.A.** Flag algebras // J. Symbolic Logic. 2007. Vol. 72, no. 4. P. 1239–1282.
15. **Tarski A.** Contributions to the theory of models I (II) // Indagationes Math. 1954. Vol. 16. P. 572–581; 582–583. (Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.)
16. **Taylor W.** Atomic compactness and graph theory // Fund. Math. 1969. Vol. 65. P. 139–145.

Ильев Артем Викторович
аспирант
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
e-mail: artyom_iljev@mail.ru

Поступила 27.11.2014