ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 519.62

ДВИЖУЩИЙСЯ ОБЪЕКТ И НАБЛЮДАТЕЛИ В $\mathbb{R}^2$ С КУСОЧНО-ГЛАДКИМ ЗАТЕНЯЮЩИМ МНОЖЕСТВОМ[1]

В. И. Бердышев

Рассматривается движение объекта t в $\mathbb{R}^2$, содержащем телесное ограниченное множество G с кусочно-гладкой границей, которое препятствует движению и видимости. В окрестности выпуклых участков границы находятся наблюдатели, способные в случае опасности со стороны t скрыться от него в теневом множестве $s(t) \subset \mathbb{R}^2 \backslash G$. Устанавливаются характеристические свойства траектории $\mathcal{T}$ объекта, максимизирующей величину $\min\{\rho(t, s(t)) :\ t \in \mathcal{T}\}$.

Ключевые слова: навигация, задача сопровождения, движущийся объект, наблюдатель.

V. I. Berdyshev. A moving object and observers in $\mathbb{R}^2$ with piecewise smooth shading set.

We consider the motion of an object t in the space $\mathbb{R}^2$, where a bodily bounded bounded set G with piecewise smooth boundary hinders the motion and visibility. In a neighborhood of convex parts of the boundary, there are observers, which can hide from t in a shade set $s(t) \subset \mathbb{R}^2 \backslash G$ in the case of danger from t. We find characteristic properties of the trajectory $\mathcal{T}$ of the object that maximizes the value $\min\{\rho(t, s(t)) :\ t \in \mathcal{T}\}$.

Keywords: navigation, escort problem, moving object, observer.

1. Постановка задачи

Пусть G — ограниченное, может быть, несвязное множество с кусочно-гладкой границей в $X = \mathbb{R}^2$, являющееся замыканием открытого множества $\overset{\circ}{G}$ и такое, что $X \backslash G$ связно. Множество G препятствует видимости и движению. Точки $x, y \in X$ видимы одна для другой, если $[x, y] \bigcap \overset{\circ}{G} = \varnothing$. В X движутся объект $t \notin G$ и наблюдатели $f \notin \overset{\circ}{G}$, враждебные по отношению к t. Объект движется из окрестности V_* точки t_* в окрестность V^* точки t^*, $V_* \bigcap V^* = \varnothing$, $(V_* \bigcup V^*) \bigcap G = \varnothing$, внутри заданного "коридора" $\widetilde{Y}$, $\widetilde{Y} \bigcap G = \varnothing$, являющегося односвязной окрестностью заранее рассчитанной траектории

$$\mathcal{T}_0 = \{t(\tau) \colon 0 \le \tau \le 1,\ t(0) = t_*,\ t(1) = t^*\}, \quad \mathcal{T}_0 \bigcap G = \varnothing.$$

Будем предполагать, что в окрестностях $V_* = V_R(t_*)$, $V^* = V_R(t^*)$ точек t_*, t^* наблюдателей нет. Здесь

$$V_R(t) = \{x :\ \|t - x\| < R\}, \quad R > 0.$$

Для любой точки $t \in X \backslash \overset{\circ}{G}$ обозначим

$$v(t) = \Big\{x \in X \colon [x, t] \bigcap \overset{\circ}{G} = \varnothing\Big\} \text{ — } \textit{множество видимых из } t \textit{ точек},$$

$$s(t) = X \backslash \Big(v(t) \bigcup G\Big) \text{ — } \textit{тень множества } G \ (\textit{при освещении из точки } t),$$

$$\overline{s}(t) \text{ — } \textit{ее замыкание}.$$

[1]Работа выполнена при поддержке комплексной программы ФНИ УрО РАН (проект 15-16-1-14), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4538.2014.1), а также при финансовой поддержке Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства Российской Федерации, контракт № 02.A03.21.0006).

Объект имеет возможность поразить наблюдателя посредством мини-объекта, способного двигаться в $X\setminus\overset{\circ}{G}$ прямолинейно с большой скоростью. Таким образом, свобода движения наблюдателя f ограничена: он должен находиться вблизи множества $s(t)$, чтобы в случае опасности укрыться в тени, а именно,

$$k\|t-f\| \geq \rho(f, s(t)),$$

где k — отношение максимальной скорости наблюдателя к скорости миниобъекта, здесь и далее $\rho(x, s(t))$ — длина кратчайшего пути от x до $s(t)$ в $X\setminus\overset{\circ}{G}$.

Задача объекта t состоит в выборе траектории $\widehat{\mathcal{T}}$ из класса $\mathbb{T}$ траекторий

$$\mathcal{T} = \{t(\tau):\ 0 \leq \tau \leq 1,\ t(0) \in V_*,\ t(1) \in V^*\} \subset \widetilde{Y},$$

для которой

$$\max_{\mathcal{T}\in\mathbb{T}} \min_{t\in\mathcal{T}} \rho(t, s(t)) = \min_{t\in\widehat{\mathcal{T}}} \rho(t, s(t)). \tag{1.1}$$

Задача (1.1) рассматривалась в [1] в частном случае, когда G — многоугольник. Цель данной работы — исследование этой задачи для множеств G с кусочно-гладкой границей и уточнение условий на оптимальную для (1.1) траекторию, приведенных в [1, теорема 3].

2. Теневые точки

Далее будем обозначать

$$\mathcal{P}_M(x) = \{y \in M\colon \|x-y\| = \rho(x, M)\}$$

— *множество ближайших к* x *точек из множества* $M \subset X$. Точку $x \in G$, ближайшую к t из множества

$$v(t) \bigcap \overline{s}(t) \bigcap \{t + \lambda(x-t)\colon \lambda > 0\},$$

назовем *теневой для точки* t.

Функция $\rho(t, s(t))$ и отображение, сопоставляющее точке t множество ближайших к t теневых точек, вообще говоря, не являются непрерывными. К тому же, из того, что $x \in \mathcal{P}_{\overline{s}(t)}(t)$, не следует, что $x \in \mathcal{P}_{\overline{s}(t')}(t')$ для $t' \in (t, x)$. Приведем пример (см. рис. 1).

П р и м е р 1. Пусть задана числовая последовательность $\{\alpha_n\}_1^\infty$, $\alpha_n \downarrow 0$, $\alpha_1 = 1$, $t_0 = (0,0)$, $t_n = (0, (\alpha_n + \alpha_{n+1})/4)$, множество G есть объединение треугольников с вершинами $(1, \alpha_n), (1, \alpha_{n+1})$, $a_n = t_n + (1/2, 0)$, отрезка $[1/2, 1]$ на оси абцисс и треугольника с вершинами $(0, 1-2\varepsilon)$, $(0, 1-\varepsilon)$, $(-\varepsilon, 1-\varepsilon)$ $(\varepsilon < 1/10)$ (рис. 1). Тогда при $\alpha_2 < 1-4\varepsilon$ для t_0 точка $(0, 1-\varepsilon)$ — единственная ближайшая точка из $\overline{s}(t_0)$, для t_n точка a_n — также единственная ближайшая точка из $\overline{s}(t_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. При этом $\rho(t_0, s(t_0)) = 1-\varepsilon$, $\rho(t_n, s(t_n)) = 1/2$.

Далее предполагается, что граница ∂G множества G является кусочно-гладкой, что она может включать в себя конечное число прямолинейных отрезков и конечное число участков выпуклости, что важно для построения алгоритмов поиска оптимальной траектории. При этом расстояние $\rho(t, s(t))$ достигается на теневых точках.

Будем рассматривать точки x локальной выпуклости границы. По определению считаем, что для каждой из них существуют окрестность $O(x)$ и прямая L, $x \in L$, такие, что множество $G \bigcap O(x)$ лежит по одну сторону относительно L. Точка выпуклости может быть угловой, если величина α угла между односторонними касательными полупрямыми в этой точке удовлетворяет неравенству $0 < \alpha < \pi$. Множество угловых точек границы G обозначим через $\mathbb{A}$.

Связный гладкий участок выпуклости границы множества G (участок, состоящий из гладких точек локальной выпуклости), максимальный по включению, будем обозначать через C.

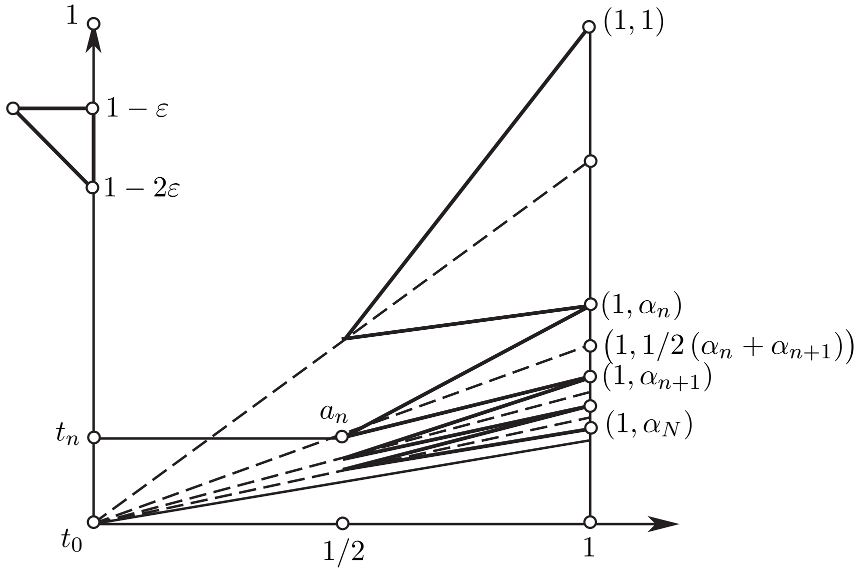

Рис. 1.

Итак, C — гладкая выпуклая связная кривая без концевых точек. Совокупность таких участков границы обозначим через $\mathbb{C}$.

Теневыми точками могут быть только угловые точки и точки из $\overline{C}, C \in \mathbb{C}$. Для иных точек $x \in \partial G$ любая прямая, содержащая x, содержит точки из $\overset{\circ}{G}$ в любой окрестности $O(x)$. Рассматривая множество точек на границе ∂G, видимых (освещенных) из точки t, $t \notin G$, с учетом ограниченности G и связности дополнения $X\backslash G$, можно установить (см. [1, теорема 1 для многогранного G]), что справедлива

Лемма. *Для любой точки $t \notin G$ множество теневых точек непусто.*

Для точки $s \in \partial G$ обозначим

$$\widetilde{T}(s) = \big\{t \in v(s)\colon\, s \in \overline{s}(t)\big\}, \quad T(s) = \overline{\big\{t \in v(s)\colon\, s \in \mathcal{P}_{\overline{s}(t)}(t)\big\}}$$

— замыкание множества точек $t \notin G$, для которых s является ближайшей из теневых для t точек.

Если $a \in \mathbb{A}$ — угловая точка, то $\widetilde{T}(a)$ является дополнением до $X\backslash(G\bigcup s(a))$ объединения угла при a и вертикального к нему угла. Если $c \in C \in \mathbb{C}$, то множество $\widetilde{T}(c)$ непусто и лежит на касательной прямой к дуге C в точке c.

Для гладкого выпуклого участка $C \in \mathbb{C}$ определим множества

$$\widetilde{T}(C) = \bigcup_{c\in C} \widetilde{T}(c), \quad T(C) = \overline{\bigcup_{c\in C} T(c)}.$$

В [1, теорема 1] установлено, что в случае многоугольного G для $a \in \mathbb{A}$ множество $T(a)$ является многоугольником, $\overset{\circ}{T}(a) \neq \varnothing$ и справедливы соотношения

$$\overset{\circ}{T}(a)\bigcap \overset{\circ}{T}(a') = \varnothing \ \text{ для } \ a' \in A,\ a \neq a' \ \text{ и } \ \bigcup_{a\in\mathbb{A}} T(a) = X\backslash\overset{\circ}{G}.$$

Из свойства гладкости дуги $C \in \mathbb{C}$ следует, что $\overset{\circ}{T}(C) \neq \varnothing$.

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$\Big(\bigcup_{a\in\mathbb{A}} T(s)\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{C\in\mathbb{C}} T(C)\Big) = X\backslash\overset{\circ}{G}, \tag{2.1}$$

и для любых $a \in \mathbb{A},\ C \in \mathbb{C}$

$$\mathring{T}(a) \bigcap \mathring{T}(C) = \varnothing. \tag{2.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любой точки $t \notin G$ по лемме множество $s(t)$ непусто, и ближайшая к t точка s из $\overline{s}(t)$ либо угловая, т. е. $t \in T(s)$, либо принадлежит некоторой дуге $C \in \mathbb{C}$, т. е. $t \in T(C)$. Соотношение (2.1) установлено. Докажем (2.2). Допустим, что для $a \in \mathbb{A}$ и дуги $C \in \mathbb{C}$ нашлась точка t с окрестностью $O(t)$ такая, что

$$O(t) \subset T(a) \bigcap T(C). \tag{2.3}$$

Существует точка $c \in C$, для которой $t \in T(c)$. Имеем $\|a - t\| = \|c - t\|$. Если угол $\angle atc$ не меньше 90°, то для точки $t_\lambda = t + \lambda(c - t) \in O(t),\ \lambda > 0$, выполняются соотношения

$$t_\lambda \in T(c), \quad \rho(t_\lambda, s(t_\lambda)) \le \|t_\lambda - c\| < \|t - c\| = \|t - a\| < \|t_\lambda - a\|,$$

что противоречит предположению (2.3). Пусть угол $\angle atc$ острый. Отметим на отрезке $[t, a]$ точки $x_\lambda^a,\ x_\lambda^t$ такие, что

$$\|t - x_\lambda^t\| = \|t - t_\lambda\|, \quad \|a - x_\lambda^a\| = \|a - t_\lambda\|.$$

Тогда

$$\rho(t_\lambda, s(t_\lambda)) \le \|t_\lambda - c\| = \|t - c\| - \|t - t_\lambda\| = \|t - a\| - \|t - x_\lambda^t\| < \|t - a\| - \|t - x_\lambda^a\| = \|a - x_\lambda^a\| = \|t_\lambda - a\|,$$

что противоречит (2.3). Теорема доказана. □

З а м е ч а н и е 1. Пример множества

$$G = \Big\{x = (x_1, x_2) \in V_1(0),\ |x_1| \ge 1/2\Big\},$$

где $C = \{x\colon \|x\| = 1,\ x_1 > 1/2\},\ C' = \{x\colon \|x\| = 1,\ x_1 < 1/2\}$, показывает, что множества $\mathring{T}(C),\ \mathring{T}(C')$ могут пересекаться для $C,\ C' \in \mathbb{C}$.

Приведем условия, при которых

$$t \notin \mathring{T}(C) \bigcap \mathring{T}(C') \tag{2.4}$$

для $C,\ C' \in \mathbb{C}$. Пусть $t \in \widetilde{T}(C) \bigcap \widetilde{T}(C'),\ c \in C,\ c' \in C',\ t \in T(c) \bigcap T(c')$, т. е. $\|t - c\| = \|t - c'\|$. Обозначим через γ угол ctc' с вершиной t и покажем, что (2.4) выполняется в двух случаях:

величина угла γ равна 180°,

внутренность угла γ в окрестности точек c, c' не пересекается хотя бы с одной из дуг C, C'.

Легко видеть, что в первом случае $(c, t) \subset \mathring{T}(C),\ (c', t) \subset \mathring{T}(C')$, поэтому (2.4) справедливо. Пусть во втором случае внутренность угла γ не пересекается с C, тогда при любом малом $\lambda > 0$ точка c' является теневой для $t_\lambda = t + \lambda(c' - t)$ и $\|t_\lambda - c'\| < \|t_\lambda - c\| < \|t_\lambda - c_\lambda\|$, где $c_\lambda \in C$ — теневая точка для t_λ, и, значит, (2.4) выполняется.

3. Характеризация наилучшей траектории

Определим множество $\mathbb{S} = \mathbb{A} \bigcup \mathbb{C}$, его элементы $s \in \mathbb{S}$ для краткости будем называть "вершинами". Множество $\mathbb{S}$ предполагается конечным. Для вершин s и точек $x \in \widetilde{T}(s)$ введем расстояние

$$\overline{\rho}(x, s) = \begin{cases} \|x - s\|, & \text{если } \ s = a \in \mathbb{A},\ x \in \widetilde{T}(a), \\ \|x - c\|, & \text{если } \ s = C \in \mathbb{C},\ c \in C,\ x \in \widetilde{T}(c). \end{cases} \tag{3.1}$$

Принадлежность объекта множеству $\overset{\circ}{T}(s)$ означает его близость к вершине s, где может присутствовать наблюдатель. Предпочтительным для него является месторасположение на общей границе $\mathcal{B}(s,s')$ смежных множеств $T(s)$ и $T(s')$. Важно, что по определению этих множеств точки общей границы $T(s)\bigcap T(s')$ равноудалены от s и s' по расстоянию (3.1). При поиске этих границ учитывается линейчатая структура множеств $\widetilde{T}(s)$ (коническая при $s\in\mathbb{A}$, а при $s\in\mathbb{C}$ — совокупность интервалов на касательных прямых к дуге C), и используется решение следующих задач о построении границ между

1) $T(a)$ и $T(a')$ $(a,a'\in\mathbb{A})$,

2) $T(a)$ и $T(C)$ $(a\in\mathbb{A},\ C\in\mathbb{C})$,

3) $T(C)$ и $T(C')$ $(C,C'\in\mathbb{C})$.

1) В случае многоугольного G множество $T(a)$ является (см. [1]) многоугольником, а в области, где $\widetilde{T}(a)\bigcap\widetilde{T}(a')\neq\varnothing$, множества $T(a)$, $T(a')$ разграничивает прямая L, ортогональная отрезку $[a,a']$ и содержащая точку $(a+a')/2$. Так что $\|a-z\|=\|z-a'\|$ $(z\in L)$.

2) Точки z границы между $T(a)$ и $T(C)$, попавшие в область $\widetilde{T}(a)\bigcap\widetilde{T}(C)$, определяются так, что $\|a-z\|=\|z-c\|$, где $c\in C$ — точка касания дуги C с прямой, содержащей точку z (см. пример 2 ниже).

3) Точка z границы между $T(C),T(C')$, попавшая в область $\widetilde{T}(C)\bigcap\widetilde{T}(C')$, есть пересечение прямых, касающихся дуг $C,\ C'$ в точках $c\in C,\ c'\in C'$ таких, что $\|c-z\|=\|z-c'\|$.

З а м е ч а н и е 2. Приведенные выше равенства можно заменить на соотношения

$$\|a-z\|=K\|z-a'\|,\quad \|a-z\|=K\|z-c\|,\quad \|c-z\|=K\|z-c'\|\quad (K>1),$$

если сближение с a',C,C' (в задачах 1),2),3) соответственно) менее опасно, чем с a,a,C.

Граница раздела $\mathcal{B}(s,s')$ указанных множеств может иметь сложную форму даже для множества простого вида.

П р и м е р 2. Множество G есть объединение круга C с центром в нуле радиуса r и треугольника с вершиной $(a,0)$, $a>r$ (см. рис. 2).

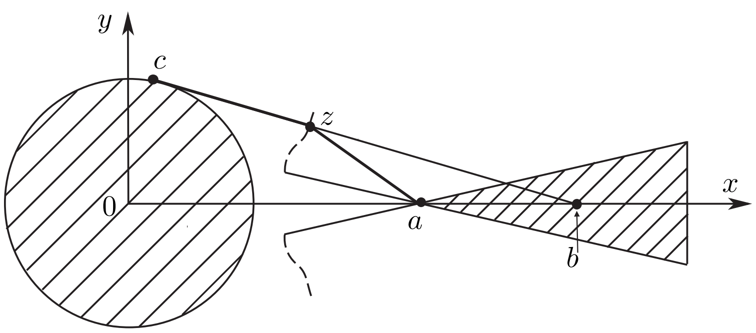

Рис. 2.

Пусть $b\geq a$ и $c=(x,y)$ — точка касания с C прямой, содержащей точку $(b,0)$, и $z=(1-\lambda)c+\lambda(b,0)$ — точка на этой прямой, удовлетворяющая равенству $\|c-z\|=\|z-(a,0)\|$. Тогда

$$\lambda=\frac{2bx-(x^2+a^2)}{2[a(x-b)+xb-r]},\quad y^2=\Big(\frac{bx}{r}\Big)^2-r^2.$$

Искомая граница изображена пунктирной линией.

Объект t должен проследовать из V_* до V^* внутри коридора $Y=\widetilde{Y}\backslash(V_*\bigcup V^*)$, максимизируя наименьшее расстояние до вершин $s\in\mathbb{S}$, поскольку в них, возможно, присутствуют наблюдатели. Далее будет удобно на границе коридора Y выделить левую границу Y_l и правую Y_r относительно движения от t_* к t^* по кратчайшей траектории, содержащейся в Y. Указанные границы берут свое начало на границе шара V_* и заканчиваются на границе шара V^*.

Необходимо указать все точки из Y, которые должны лежать на оптимальной для задачи (1.1) траектории. По теореме 1 коридор заполнен множествами $T(s)$.

Пусть $s \in \mathbb{S}$,

$$\widetilde{T}(s) \bigcap \overset{\circ}{Y} \neq \varnothing, \quad \widetilde{T}(s) \bigcap Y_l \neq \varnothing, \quad \widetilde{T}(s) \bigcap Y_r \neq \varnothing \tag{3.2}$$

и Y_s — более далекая по расстоянию $\overline{\rho}(s,x)$ от s граница Y_l или Y_r. Обозначим через S^1 множество вершин, удовлетворяющих условию (3.2). В связи с вершиной s рассмотрим задачу

$$M(s) = \overline{\rho}(s, Y_s) = \min_{y \in Y_s} \overline{\rho}(s,y), \tag{3.3}$$

и пусть $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{Y_s}(s)$ — множество ближайших к s по расстоянию $\overline{\rho}$ точек из Y_s. Любая траектория $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ пересекает любой отрезок, соединяющий s с точками из $\mathcal{P}$. В случае малости величины $\overline{\rho}(s, Y_s)$ траектория $\widehat{\mathcal{T}}$ должна содержать множество $\mathcal{P}$.

Теперь возьмем пару вершин $s, s' \in \mathbb{S}$ с противоположных сторон коридора Y (расстояния $\rho(s,Y)$, $\rho(s',Y)$ достигаются на разных сторонах Y_l, Y_r границы Y), для которых $Q = \widetilde{T}(s) \bigcap \widetilde{T}(s') \neq \varnothing$ и $Q \bigcap \overset{\circ}{Y} \neq \varnothing$. Множество таких пар вершин обозначим через S^2. Тогда любая траектория $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ пересекает любую двузвенную ломаную, соединяющую точку x из Q с s и s' (с точкой a, если $s = a \in A$, а если $s = C \in \mathbb{C}$, то с точкой $c \in C$, для которой $x \in \widetilde{T}(c)$).

В связи с парой таких вершин возникает задача

$$M(s,s') = \max_{x \in Q}\ \min\bigl\{\overline{\rho}(s,x),\ \overline{\rho}(s',x)\bigr\}. \tag{3.4}$$

Предположим, что общая граница

$$\mathcal{B}(s,s') = \bigl\{z \colon \overline{\rho}(s,z) = \overline{\rho}(s',z)\bigr\}$$

множеств $T(s)$, $T(s')$ не пересекается с Q, и пусть вершина s и Q лежат по одну сторону от $\mathcal{B}(s,s')$. Очевидно, что максимум (3.4) доставляет точка $\mathcal{P} = \mathcal{P}(s,s') \in Q$, для которой

$$\rho(s,\mathcal{P}) = \max_{x \in Q} \overline{\rho}(s,x) < \rho(s',\mathcal{P}) = \min_{x \in Q} \overline{\rho}(s',x)$$

и $M(s,s') = \rho(s',\mathcal{P})$. При малой величине $M(s,s')$ точка $\mathcal{P} = \mathcal{P}(s,s')$ должна лежать на $\widehat{\mathcal{T}}$. Здесь важно отметить, что $\mathcal{P} \in \partial\widetilde{T}(s)$, поэтому вершина s не является теневой для точки $\mathcal{P}$. Оптимальная траектория $\widehat{\mathcal{T}}$ лишь касается границы $\partial\widetilde{T}(s)$ в точке $\mathcal{P}$ и в окрестности $O(\mathcal{P})$ этой точки не пересекается с внутренностью множества $\widetilde{T}(s)$. Но $\widehat{\mathcal{T}}$ пересекается в окрестности $O(\mathcal{P})$ с внутренностью множества $\widetilde{T}(s')$.

Теперь предположим, что множество $Q^* = Q \bigcap \mathcal{B}(s,s')$ непусто. Тогда задача

$$M(s,s') = \max_{x \in Q^*}\ \min\bigl\{\overline{\rho}(s,x),\ \overline{\rho}(s',x)\bigr\}$$

сводится к эквивалентным задачам

$$M(s,s') = \min_{x \in Q^*} \overline{\rho}(s,x), \quad M(s,s') = \min_{x \in Q^*} \overline{\rho}(s',x),$$

и множество точек $\mathcal{P}(s,s')$, доставляющих минимум, в случае малости $M(s,s')$ обязано лежать на траектории $\widehat{\mathcal{T}}$.

Случай бóльшего числа вершин, лежащих по разные стороны от Y, рассматривать не надо, так как добавление новых вершин сужает множество $\widetilde{T}(s) \bigcap \widetilde{T}(s')$ и общую границу $\mathcal{B}(s,s')$ и, значит, не уменьшает величину $M(s,s')$. Сформулируем полученный результат.

Обозначим

$$M = \min\Bigl\{\min_{s \in S^1} M(s),\ \min_{(s,s') \in S^2} M(s,s')\Bigr\}. \tag{3.5}$$

Теорема 2. *Имеет место равенство*

$$\max_{\mathcal{T}\in\mathbb{T}} \min_{t\in\mathcal{T}} \overline{\rho}(t, s(t)) = M. \tag{3.6}$$

Траектория $\widehat{\mathcal{T}} \in \mathbb{T}$ *является оптимальной в задаче* (1.1) *тогда и только тогда, когда*

$$\overline{\rho}(t, s(t)) \geq M \quad \forall\ t \in \widehat{\mathcal{T}},$$

и она пересекается с множествами $\mathcal{P}(s),\ \mathcal{P}(s, s')$ *для всех* $s \in S^1$ *и* $(s, s') \in S^2$, *доставляющих минимум в* (3.5).

Итак, анализ положения всех вершин $s \in \mathbb{C}$ таких, что $\widetilde{T}(s) \bigcap \overset{\circ}{Y} \neq \varnothing$, позволяет найти величину (3.6) и набор точек $\mathcal{P}^* \subset \mathcal{P}(s) \bigcup \mathcal{P}(s, s')$, через которые проходит каждая оптимальная траектория $\widehat{\mathcal{T}}$ задачи (1.1). В силу теоремы 1 для любой точки $t \in \widehat{\mathcal{T}}$ найдется вершина $s_t \in \mathbb{S}$, для которой $t \in T(s_t)$. Поэтому любая точка траектории $\widehat{\mathcal{T}}$ удовлетворяет неравенству

$$\overline{\rho}(t, s) \geq \overline{\rho}(t, s_t) \geq M \quad \forall\ s \in \mathbb{S}.$$

З а м е ч а н и е 3. Возвращаясь к теореме 3 из [1], отметим, что в ней приведен неполный набор точек, которые должны располагаться на оптимальной траектории для задачи 3.1, сформулированной в [1] для многогранного множества G (см. [2]). Это показывает пример множества G, составленного из двух треугольников с вершинами

$$a_1 = (1, 0), \quad a_2 = (2, -1), \quad a_3 = (2, 1) \ \text{ и } \ a_1' = (-1, 0), \quad a_2' = (-2, -1), \quad a_3' = (-2, 1).$$

Среди траекторий, проходящих между треугольниками, оптимальная должна содержать точки $(0, -1),\ (0, 1)$, являющиеся ближайшими к a_1 и a_1' из множества $T(a_1) \bigcap T(a_1')$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бердышев В.И.** К задаче сопровождения движущегося объекта наблюдателями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 1. С. 46–55.
2. **Бердышев В.И.** Письмо в редакцию // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 316.

Бердышев Виталий Иванович
академик РАН
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета им. Б. Н. Ельцина
e-mail: bvi@imm.uran.ru

Поступила 01.09.2015