ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 517.5

ОЦЕНКИ ПОПЕРЕЧНИКОВ ФУРЬЕ КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СО СМЕШАННЫМ МОДУЛЕМ ГЛАДКОСТИ[1]

Ш. А. Балгимбаева, Т. И. Смирнов

Получены точные по порядку оценки поперечников Фурье классов Никольского — Бесова $\mathrm{SB}^{\Omega,\,l}_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$ и Лизоркина — Трибеля $\mathrm{SF}^{\Omega,\,l}_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$ функций с заданной мажорантой Ω смешанного модуля гладкости порядка l в пространстве $L_q(\mathbb{T}^d)$ для всех соотношений между параметрами p, q, θ при некоторых условиях на Ω. Оценки сверху следуют из точных по порядку оценок приближения классов $\mathrm{SB}^{\Omega,\,l}_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$ и $\mathrm{SF}^{\Omega,\,l}_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$ специальными частными суммами рядов Фурье по кратной системе Ψ_d периодизированных всплесков Мейера.

Ключевые слова: поперечник Фурье, смешанный модуль гладкости, функциональные пространства, система всплесков.

Sh. A. Balgimbaeva, T. I. Smirnov. Bounds for Fourier widths of classes of periodic functions with a mixed modulus of smoothness.

Order-exact bounds are obtained for Fourier widths of the Nikol'skii–Besov classes $\mathrm{SB}^{\Omega,\,l}_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$ and Triebel–Lizorkin classes $\mathrm{SF}^{\Omega,\,l}_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$ of functions with a given majorant Ω for the mixed modulus of smoothness of order l in the space $L_q(\mathbb{T}^d)$ for all relations between the parameters p, q, and θ under some conditions on Ω. The upper bounds follow from order-exact bounds for approximations of the classes $\mathrm{SB}^{\Omega,\,l}_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$ and $\mathrm{SF}^{\Omega,\,l}_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$ by special partial sums of Fourier series in the multiple system Ψ_d of periodized Meyer wavelets.

Keywords: Fourier width, mixed modulus of smoothness, function spaces, wavelet system.

1. Введение. Постановка задачи

Пусть $L_p := L_p(\mathbb{T}^d)$ $(1 \le p \le \infty)$ — пространство 1-периодических по каждой переменной функций f, суммируемых в степени p (при $p = \infty$ существенно ограниченных) на $\mathbb{T}^d$, с нормой $\|f \mid L_p\|$, где

$$\|f \mid L_p\| = \left\{ \int\limits_{\mathbb{T}^d} |f(x)|^p dx \right\}^{1/p} \ (1 \le p < \infty); \quad \|f \mid L_\infty\| = \operatorname{ess\,sup}\{|f(x)| \mid x \in \mathbb{T}^d\},$$

где $\mathbb{T}^d := (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d$ — d-мерный тор; $\mathbb{T} \equiv \mathbb{T}^1$. Здесь и далее $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$ — множества натуральных, целых и вещественных чисел соответственно; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$.

Напомним, что поперечником Фурье (или, что то же, ортопоперечником) порядка M класса функций F в пространстве L_q называется величина

$$\varphi_M(F, L_q) = \inf_{\{h_\imath\}_{\imath=1}^M} \sup_{f \in F} \Big\| f - \sum_{\imath=1}^{M} \langle f, h_\imath \rangle h_\imath | L_q \Big\|, \tag{1.1}$$

где нижняя грань берется по всем ортонормированным системам $\{h_\imath\}_{\imath=1}^M \subset L_\infty$. Поперечники Фурье были введены В. Н. Темляковым в 1982 г. в [1].

[1]Работа выполнена при поддержке грантов 5130/ГФ4, 5129/ГФ4 и 0245/ГФ3 МОиН Республики Казахстан.

В предлагаемой работе устанавливаются точные по порядку оценки поперечников Фурье классов функций типа Никольского — Бесова $SB^{\Omega,l}_{p\theta}(\mathbb{T}^d)$ и Лизоркина — Трибеля $SF^{\Omega,l}_{p\theta}(\mathbb{T}^d)$, задаваемых с помощью мажоранты смешанного модуля гладкости, удовлетворяющей некоторым дополнительным условиям (определение и представление пространств см. в разд. 2).

Для различных функциональных классов оценки поперечников Фурье рассматривались многими авторами. В частности, В. Н. Темляков, Динь Зунг, Э. М. Галеев, а также А. В. Андрианов и В. Н. Темляков нашли точные порядковые оценки поперечников Фурье классов функций с ограниченной смешанной производной SW^r_p или разностью SH^r_p (подробнее см. [2; 3]).

Динь Зунг [4] получил точные порядковые оценки поперечников Фурье классов функций типа Никольского — Бесова, задаваемых посредством мажоранты специального вида для смешанного модуля гладкости 1-го и 2-го порядка смешанной (дробной) производной (в смысле Вейля) для некоторых соотношений между параметрами класса и пространства.

Далее отметим работы Н. Н. Пустовойтова [5; 6], в которых изучены поперечники Фурье классов периодических функций с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности порядка l в L_p, содержащей (помимо степенных) логарифмические множители.

Д. Б. Базарханов [7] получил точные в смысле порядка оценки поперечников Фурье классов типа Никольского — Бесова и Лизоркина — Трибеля периодических функций обобщенной смешанной гладкости, используя представление этих классов рядами Фурье по кратной системы всплесков Мейера (там же достаточно подробно освещена история вопроса).

Укажем, что при получении оценок сверху мы придерживаемся схемы работы [8], а при получении оценок снизу используются (адаптированные) примеры и техника работ [5–7; 9] (см. также [2; 10]).

В заключение введем некоторые обозначения, которыми будем пользоваться всюду ниже. Пусть $e_d = \{1, \dots, d\}$, $d \in \mathbb{N}$. Для $x = (x_1, \dots, x_d), y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ положим

$$x < y (x \le y) \Leftrightarrow x_j < y_j (x_j \le y_j), \quad j \in e_d; \quad (x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_d y_d;$$

$|s| = \sum_{k=1}^d s_k$ — длина мультииндекса $s \in \mathbb{N}_0^d$; $\log$ — это логарифм по основанию 2, $a_+ = \max\{a, 0\}$ для $a \in \mathbb{R}$; $\mathbf{1} = (1, \dots, 1), \mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d$.

Обозначим через

$$\delta_s(f) = \sum_{k \in \rho(s)} \widehat{f}(k) e^{2\pi i (k,x)}, \quad s \in \mathbb{N}^d, \quad k \in \mathbb{Z}^d,$$

“двоичные пачки” ряда Фурье функции $f \in L_1$; здесь $\widehat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}^d} f(x) e^{-2\pi i (k,x)} dx$, $k \in \mathbb{Z}^d$, — коэффициенты Фурье по тригонометрической системе $\{e^{2\pi i (k,x)} \,|\, k \in \mathbb{Z}^d\}$;

$$\rho(s) = \bigl\{k = (k_1, \dots, k_d) \colon [2^{s_j - 1}] \le |k_j| < 2^{s_j},\ j \in e_d\bigr\}, \quad s \in \mathbb{N}_0^d.$$

2. Классы функций

В этом разделе даются определения пространств Никольского — Бесова и Лизоркина — Трибеля периодических функций с заданной мажорантой смешанного модуля гладкости.

Пусть ℓ_θ $(1 \le \theta \le \infty)$ — пространство числовых последовательностей $\{a_s\}_{s \in \mathbb{N}_0^d}$ с конечной нормой $\|\{a_s\} \,|\, \ell_\theta\|$, где

$$\|\{a_s\} \,|\, \ell_\theta\| = \Biggl\{\sum_{s \in \mathbb{N}_0^d} |a_s|^\theta\Biggr\}^{1/\theta}, \quad 1 \le \theta < \infty; \quad \|\{a_s\} \,|\, \ell_\infty\| = \sup_{s \in \mathbb{N}_0^d} |a_s|;$$

$\ell_\theta(L_p) \equiv \ell_\theta(L_p(\mathbb{T}^d))$ $(L_p(\ell_\theta) \equiv L_p(\mathbb{T}^d; \ell_\theta))$ — пространство функциональных последовательностей $\{f_s(x)\}_{s \in \mathbb{N}_0^d}, x \in \mathbb{T}^d$, с конечной нормой (с обычной модификацией при $\theta = \infty$)

$$\|\{f_s\} \,|\, \ell_\theta(L_p)\| = \|\,\{\,\|f_s \,|\, L_p\|\,\} \,|\, \ell_\theta\|;$$

(соответственно $\|\{f_s\}\,|\,L_p(\ell_\theta)\| = \|\,\|\{f_s\}\,|\,\ell_\theta\,\|\,|\,L_p\|$).

Для функции $f(x)$, заданной на $\mathbb{T}^d$, пусть

$$\Delta^l_{\tau,j} f(x) = \Delta^{l-1}_{\tau,j}(\Delta^1_{\tau,j} f(x))$$

— ее разность порядка $l \in \mathbb{N}_0$ в точке $x \in \mathbb{T}^d$ с шагом $\tau \in \mathbb{R}$ по переменной x_j, здесь

$$\Delta^1_{\tau,j} f(x) = \Delta_{\tau,j} f(x) = f(\dots, x_{j-1}, x_j + \tau, x_{j+1}, \dots) - f(x), \quad \Delta^0_{\tau,j} f(x) := f(x).$$

Если теперь $l = (l_1, \dots, l_d) \in \mathbb{N}^d_0$ и $h = (h_1, \dots, h_d) \in \mathbb{R}^d$, то $\Delta^l_h f(x) = \Delta^{l_1}_{h_1,1} \Delta^{l_2}_{h_2,2} \dots \Delta^{l_d}_{h_d,d} f(x)$ — смешанная разность функции f порядка l в точке x с шагом h.

Наконец,

$$\Omega_l(f,t)_p = \sup_{|h_j| \le t_j, j \in \mathrm{e}_d} \|\Delta^l_h f(\cdot)\mid L_p\|$$

— смешанный модуль гладкости порядка l функции $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$; $t = (t_1, \dots, t_d)$.

Пусть функция $\Omega\colon [0,\infty)^d \to [0,+\infty)$ $(d \in \mathbb{N})$ — (одномерный, если $d = 1$, и смешанный, если $d \ge 2$) модуль гладкости порядка l, т. е. непрерывная на $[0,\infty)^d$ функция, которая удовлетворяет следующим условиям:

i) $\Omega(t) > 0$, если $t \in \mathbb{R}^d_+$, $\Omega(t) = \Omega(t_1, \dots, t_d) = 0$, если $\prod_{j\in \mathrm{e}_d} t_j = 0$;

ii) $\Omega(t^1) \le \Omega(t^2)$ для любых $t^1, t^2 \in [0,\infty)^d$ таких, что $t^1 \le t^2$;

iii) $\Omega(m_1 t_1, \dots, m_d t_d) \le C\left(\prod_{j\in \mathrm{e}_d} m_j^l\right)\Omega(t)$ для любых $t \in [0,\infty)^d$ и $m \in \mathbb{N}^d$.

Теперь определим пространство Никольского — Бесова $SB^{\Omega,l}_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$ функций с заданной мажорантой смешанного модуля гладкости.

О п р е д е л е н и е 1. *Пусть* $1 \le p, \theta \le \infty$, Ω *— смешанный модуль гладкости порядка* l. *Тогда пространство Никольского — Бесова* $SB^{\Omega,l}_{p\,\theta} = SB^{\Omega,l}_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$ *состоит из всех функций* $f \in L_p$, *для которых конечна норма*

$$\|\,f\,|\,SB^{\Omega,l}_{p\,\theta}\,\| = \|f\,|\,L_p\| + \left\{\sum_{\varnothing\ne e\subset e_d} \int_{[0,1]^{\#e}} \left(\frac{\Omega_l(f,t^e,1^{\bar e})}{\Omega(t^e,\mathbf{1}^{\bar e})}\right)^\theta \prod_{j\in e}\frac{dt_j}{t_j}\right\}^{1/\theta}, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{2.1}$$

$$\|\,f\,|\,SB^{\Omega,l}_{p\,\infty}\,\| = \|f\,|\,L_p\| + \sum_{\varnothing\ne e\subset e_d} \sup_{t^e>0} \frac{\Omega_l(f,t^e,1^{\bar e})}{\Omega(t^e,\mathbf{1}^{\bar e})}. \tag{2.1$'$}$$

Здесь мы использовали обозначения: для $x \in \mathbb{R}^d$ и $e \subset e_d$, $e = \{j_1, \dots, j_m\}$, $1 \le j_1 < \dots < j_m \le d$ $(m \le d)$, $x^e := (x_{j_1}, \dots, x_{j_m})$, $\bar e = e_d \setminus e$, а так же $x = (x^e, x^{\bar e})$; $\#e$ — число элементов e.

В случае, когда $\Omega(t) \equiv \Omega_r(t) = \prod_{j=1}^d t_j^{r_j}, r = (r_1, \dots, r_d) \in \mathbb{R}^d_+$ и $l > \max_{j\in e_d}\{r_j\}$, $SB^r_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d) \equiv SB^{\Omega_r}_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$ есть классические пространства Никольского — Бесова периодических функций с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера (см. [11] и приведенные там библиографию и исторические комментарии). Изучение функциональных пространств $SB^{\Omega}_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$ для общих Ω начато Динь Зунгом в [4].

Далее, напомним известные условия Бари — Стечкина $(\mathbf{S})$ и $(\mathbf{S}_l)$ в кратном случае $((\mathcal{S})$ и $(\mathcal{S}_k)$ при $d = 1)$ для модуля гладкости Ω порядка l (см. [12, с. 487]):

Ω удовлетворяет условию $(\mathbf{S})$ (в этом случае пишем $\Omega \in \mathbf{S}^\alpha_l$), если существует $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$ и постоянная $C_1 > 0$ такие, что

$$\frac{\Omega(\tau)}{\prod_{j\in e_d} \tau_j^{\alpha_j}} \le C_1 \frac{\Omega(\tau')}{\prod_{j\in e_d} \tau_j'^{\,\alpha_j}} \quad \forall\, \tau, \tau' \in \mathbb{R}^d_+ \colon \tau \le \tau';$$

Ω удовлетворяет условию $(\mathbf{S}_l)$ (в этом случае пишем $\Omega \in \mathbf{S}_l$), если существует $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d)$: $0 < \beta_j < l, j \in e_d$, и постоянная $C_2 > 0$ такие, что

$$\frac{\Omega(\tau)}{\prod_{j\in e_d} \tau_j^{\beta_j}} \ge C_2 \frac{\Omega(\tau)}{\prod_{j\in e_d} \tau_j'^{\,\beta_j}} \quad \forall\, \tau, \tau' \in \mathbb{R}^d_+ \colon \tau \le \tau'.$$

Напомним характеризацию пространств Никольского — Бесова $SB^{\Omega,l}_{p\theta}(\mathbb{T}^d)$ функций с заданной мажорантой смешанного модуля гладкости с соответствующей эквивалентной нормировкой.

Теорема А. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $\Omega \in \mathbf{S}^{\alpha}_{l} \cap \mathbf{S}_l$. *Тогда* $f \in L_p$ *принадлежит пространству* $SB^{\Omega,l}_{p\theta}$, *если и только если функциональная последовательность* $\{\Omega^{-1}(2^{-s})\delta_s(f)\}$ *принадлежит* $\ell_\theta(L_p)$*; в этом случае выражение* $\|f \,|\, SB^{\Omega,l}_{p\theta}\| = \|\{\Omega^{-1}(2^{-s})\delta_s(f)\} \,|\, \ell_\theta(L_p)\|$, $1 \le \theta < \infty$*; или* $\|f \,|\, SB^{\Omega,l}_{p\infty}\| = \sup_s \Omega^{-1}(2^{-s})\|\delta_s(f) \,|\, L_p\|$ *есть норма в пространстве* $SB^{\Omega,l}_{p\theta}$, *которая эквивалентна исходной норме* (2.1) *или* (2.1$'$).

При $\theta = \infty$ — это теорема Пустовойтова [13, теорема 1], а при $1 \le \theta < \infty$ эта теорема доказана в [14, теорема 3].

Приведем еще одну характеризацию пространств $SB^{\Omega,l}_{p\theta}$ и $SF^{\Omega,l}_{p\theta}$, которая позволяет охватить случаи $p = 1$ и $p = \infty$.

Обозначим через $V_n(t)$ ядро Валле — Пуссена порядка $2n-1$:

$$V_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kt + 2\sum_{k=n+1}^{2n-1} \Bigl(1 - \frac{k-n}{n}\Bigr) \cos kt.$$

Положим

$$A_s(x) = \prod_{j\in e_d} (V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j)), \quad s = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{N}^d_0;$$

для $f \in L_p$ через $A_s(f, x)$ обозначим (периодическую) свертку

$$A_s(f, x) = f * A_s(x).$$

Теорема В. *Пусть* $1 \le p, \theta \le \infty$, $\Omega \in \mathbf{S}^{\alpha}_{l} \cap \mathbf{S}_l$. *Тогда* $f \in L_p$ *принадлежит пространству* $SB^{\Omega,l}_{p\theta}$, *если и только если функциональная последовательность* $\{\Omega^{-1}(2^{-s})A_s(f,x)\}$ *принадлежит* $\ell_\theta(L_p)$*; в этом случае выражение* $\|f \,|\, SB^{\Omega,l}_{p\theta}\| = \|\{\Omega^{-1}(2^{-s})A_s(f,\cdot)\} \,|\, \ell_\theta(L_p)\|$, $1 \le \theta < \infty$, $\|f \,|\, SB^{\Omega,l}_{p\infty}\| = \sup_s \Omega^{-1}(2^{-s})\|A_s(f,\cdot) \,|\, L_p\|$ *есть норма в пространстве* $SB^{\Omega,l}_{p\theta}$.

Доказательство теоремы В см., например, [15, теорема 1].

Ввиду теорем А и В нам будет удобно определить пространства Лизоркина — Трибеля $SF^{\Omega,l}_{p\theta} = SF^{\Omega,l}_{p\theta}(\mathbb{T}^d)$ следующим образом.

О п р е д е л е н и е 2. *Пусть* $1 \le \theta \le \infty$, $\Omega \in \mathbf{S}^{\alpha}_{l} \cap \mathbf{S}_l$. *Тогда пространство Лизоркина — Трибеля* $SF^{\Omega,l}_{p\theta}(\mathbb{T}^d)$ *состоит из всех функций* $f \in L_p$, *для которых конечна следующая норма:*

$$\|f \,|\, SF^{\Omega,l}_{p\theta}\| = \|\{\Omega^{-1}(2^{-s})\delta_s(f)\} \,|\, L_p(\ell_\theta)\|, \quad \text{если } 1 < p < \infty, \tag{2.2}$$

$$\|f \,|\, SF^{\Omega,l}_{1\theta}\| = \|\{\Omega^{-1}(2^{-s})A_s(f,\cdot)\} \,|\, L_p(\ell_\theta)\|, \quad \text{если } 1 \le p < \infty. \tag{2.3}$$

Нетрудно показать, что при $1 < p < \infty$ нормы (2.2) и (2.3) эквивалентны.

Будем обозначать единичные шары пространств $SB^{\Omega,l}_{p\theta}$ и $SF^{\Omega,l}_{p\theta}$ через $\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{p\theta} = \mathrm{SB}^{\Omega,l}_{p\theta}(\mathbb{T}^d)$ и $\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p\theta} = \mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p\theta}(\mathbb{T}^d)$ и называть классами Никольского — Бесова и Лизоркина — Трибеля соответственно.

Заметим, что функциональные пространства $SF^{r}_{p2}(\mathbb{T}^d) \equiv SF^{\Omega_r}_{p2}(\mathbb{T}^d)$ при $1 < p < \infty$ совпадают с пространствами $SW^r_p(\mathbb{T}^d)$ функций с ограниченной смешанной производной.

3. Вспомогательные леммы. Система всплесков

Ниже будем использовать множества, впервые введенные в [16], и некоторые факты относительно них, установленные в этой работе.

Для произвольного натурального числа $N \in \mathbb{N}$ положим

$$\varkappa(N) := \varkappa(\Omega, N) = \big\{s = (s_1, \dots, s_d) : s_j \in \mathbb{N},\ \Omega(2^{-s})2^{|s|(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+} \ge 1/N\big\};$$

$$Q(N) := Q(\Omega, N) = \bigcup_{s \in \varkappa(N)} \rho(s),$$

где множества $Q(N)$ порождаются поверхностями уровня функции $\Omega(2^{-s})2^{|s|(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+}$.

Далее

$$\varkappa^{\perp}(N) = \big\{s = (s_1, \dots, s_d) : s_j \in \mathbb{N},\ \Omega(2^{-s})2^{|s|(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+} < 1/N\big\};$$

$$Q^{\perp}(N) = \bigcup_{s \in \varkappa^{\perp}(N)} \rho(s),\quad \Theta(N) = \varkappa^{\perp}(N) \setminus \varkappa^{\perp}(2^l N).$$

Нетрудно видеть, что $\Theta(N) \subset \varkappa^{\perp}(N)$ и $\Omega(2^{-s})2^{|s|(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+} \asymp 1/N,\ s \in \Theta(N)$.

В работе [16, с. 108–109] показано, что $\Theta(N) \neq \varnothing$, $|\Theta(N)| \asymp (\log N)^{d-1}$.

Приведем леммы, которые будем использовать при доказательстве основных результатов.

Лемма 1 [16, лемма 1]. *Пусть функция $\Omega(t)$ типа смешанного модуля непрерывности порядка l удовлетворяет условию (S). Тогда для $0 < p < \infty$*

$$\sum_{s \in \varkappa^{\perp}(N)} (\Omega(2^{-s}))^p \ll \sum_{s \in \Theta(N)} (\Omega(2^{-s}))^p.$$

Лемма 2 [16, лемма 2]. *Пусть функция $\Omega(t)$ удовлетворяет условию (S) при $0 < \alpha < 1$ таком, что $\alpha > \beta > 0$. Тогда при $0 < p < \infty$*

$$\sum_{s \in \varkappa^{\perp}(N)} (\Omega(2^{-s})2^{|s|\beta})^p \ll \sum_{s \in \Theta(N)} (\Omega(2^{-s})2^{|s|\beta})^p.$$

Теперь введем кратную систему (периодизированных) всплесков Мейера.

Пусть $\varphi = \psi^0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $\psi = \psi^1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — масштабирующая функция и всплеск Мейера соответственно [17, гл. 2, § 12, гл. 3 § 2], которые определяются следующим образом. Пусть $\theta(\tau)$ — нечетная бесконечно дифференцируемая функция, монотонная на $(-\pi/3, \pi/3)$. Далее, $\lambda(\tau)$ — четная функция, задаваемая функцией

$$\lambda(\tau) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} + \theta(\tau - \pi), & \text{если } \tau \in \Big[\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\Big]; \\ \dfrac{\pi}{4} - \theta\Big(\dfrac{\tau}{2} - \pi\Big), & \text{если } \tau \in \Big[\dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{8\pi}{3}\Big]; \\ 0, & \text{если } \tau \in \Big[\dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{8\pi}{3}\Big]. \end{cases}$$

Тогда

$$\varphi(t) = \psi^0(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{4\pi/3} \cos(t\tau)\cos(\lambda(\tau))d\tau \ \text{ и }\ \psi = \psi^1(t) = \frac{1}{\pi}\int_{2\pi/3}^{8\pi/3} \cos((t-1/2)\tau)\sin(\lambda(\tau))d\tau\ \ (t \in \mathbb{R}).$$

Пусть $\iota = \{0, 1\}$. Далее, положим $\psi_j^{(\iota)}(x) = \psi^{(\iota)}(2^j x),\ j \in \mathbb{N}_0$, и определим функции $\widetilde{\psi}_{jm}^{(\iota)} : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$:

$$\widetilde{\psi}_{jm}^{(\iota)}(t) = 2^{j/2}\widetilde{\psi_j^{(\iota)}}(t - 2^{-j}m),\quad m = 0, \dots, 2^j - 1,\quad j \in \mathbb{N}_0,$$

где $\tilde{h} : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ — периодизация функции $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$: $\tilde{h}(t) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} h(t - \xi)$.

Хорошо известно, что система всплесков Мейера $\Psi_1 = \{\widetilde{\psi}_{00}^{(0)}, \widetilde{\psi}_{jm}^{(1)} \,|\, m = 0, \ldots, 2^j - 1, j \in \mathbb{N}_0\}$ является полной ортонормированной системой функций в $L_2(\mathbb{T})$.

Наконец, положим $\mathrm{E}^{(\mathbf{0})} = \{0, 1\}, \mathrm{E}^{(\mathbf{1})} = \{1\}$ и введем (d–кратную) систему Ψ_d (периодизированных) всплесков Мейера

$$\Psi_d \equiv \Psi_1 \otimes \cdots \otimes \Psi_1 = \Big\{ \psi_{sk}^{(\varepsilon_1)}(x) = \psi_{s_1 k_1}^{(\varepsilon_1)}(x_1) \times \cdots \times \psi_{s_d k_d}^{(\varepsilon_d)}(x_d) \,\Big|$$

$$s = (s_1, \ldots, s_d) \in \mathbb{N}_0^d,\ \varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d) \in \mathrm{E}(s),\ k = (k_1, \ldots, k_d) \in \kappa(s) \Big\},$$

здесь $\mathrm{E}(s) = \mathrm{E}(s_1) \times \cdots \times \mathrm{E}(s_d)$, где $\mathrm{E}(j) = \mathrm{E}^{(\operatorname{sign} j)}$; $\kappa(s) = \{k \in \mathbb{N}_0^d \,|\, 0 \le k_j \le 2^{s_j} - 1, j \in e_d\}$.

Для $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$ запишем представление в виде ряда Фурье по системе Ψ_d

$$f(x) = \sum_{s \in \mathbb{N}_0^d} \Delta_s^{\Psi}(f, x),$$

здесь

$$\Delta_s^{\Psi}(f, x) = \sum_{\varepsilon \in \mathrm{E}(s)} \sum_{k \in \kappa(s)} \langle f, \psi_{sk}^{(\varepsilon)} \rangle \psi_{sk}^{(\varepsilon)}(x), \quad \text{где} \quad \langle f, \psi_{sk}^{(\varepsilon)} \rangle = \int_{\mathbb{T}^d} f(x) \psi_{sk}^{(\varepsilon)}(x) dx,$$

и последовательность $(S_N^{\Psi})_{N \in \mathbb{N}_0}$ операторов "частичных" сумм ряда Фурье по системе Ψ_d

$$S_N^{\Psi}(f, x) = \sum_{s \in \varkappa(N)} \Delta_s^{\Psi}(f, x).$$

Имеет место следующая теорема представления пространств Никольского — Бесова $SB_{p\theta}^{\Omega, l}(\mathbb{T}^d)$ и Лизоркина — Трибеля $SF_{p\theta}^{\Omega, l}(\mathbb{T}^d)$ по системе Ψ_d.

Теорема C. *Пусть $1 \le p, \theta \le \infty$, $\Omega \in \mathbf{S}_l^{\alpha} \cap \mathbf{S}_l$. Тогда*

1) *$f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ принадлежит пространству $SB_{p\theta}^{\Omega, l}(\mathbb{T}^d)$, если и только если конечна величина $\|\Omega^{-1}(2^{-s}) \Delta_s^{\Psi}(f, \cdot) \,|\, l_\theta(L_p)\|$, которая является нормой в пространстве $SB_{p\theta}^{\Omega, l}$, эквивалентной исходной;*

2) *если, кроме того, $p < \infty$, $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ принадлежит пространству $SF_{p\theta}^{\Omega, l}(\mathbb{T}^d)$, если и только если конечна величина $\|\Omega^{-1}(2^{-s}) \Delta_s^{\Psi}(f, \cdot) \,|\, L_p(l_\theta)\|$, которая является нормой в пространстве $SF_{p\theta}^{\Omega, l}$, эквивалентной исходной.*

Теорема C для пространств $SB_{p\theta}^r$ и $SF_{p\theta}^r$ доказана в работе [8, теорема 3.1]. В общем случае ее доказательство следует схеме доказательства теоремы 3.1 из [8] и в целом аналогично ему, поэтому мы его опускаем.

4. Приближение классов функций $\mathrm{SB}_{p\theta}^{\Omega, l}$ и $\mathrm{SF}_{p\theta}^{\Omega, l}$ всплесками по системе Ψ_d

Для $F \subset L_q$ рассмотрим величину

$$\mathcal{E}_{Q(N)}^{\Psi}(\mathrm{F}, L_q) = \sup_{f \in F} \|f - S_N^{\Psi}(f, \cdot) \,|\, L_q\|.$$

Далее будем использовать знаки $\ll$ и $\asymp$ порядкового неравенства и равенства: для функций $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ и $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ пишем $f(u) \ll h(u)$ при $u \to \infty$, если найдется такая постоянная $c = c(f, h) > 0$, что верно неравенство $f(u) \le c h(u)$ для $u \ge u_0 > 0$ и $f(u) \asymp h(u)$, если одновременно $f(u) \ll h(u)$ и $h(u) \ll f(u)$; обозначим $p_* = \min\{p, 2\}$.

Теорема 1. *Пусть* $1 \le p, q, \theta \le \infty$; $\Omega \in \mathbf{S}_l^{\alpha} \cap \mathbf{S}_l$, *причем* $\alpha > \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+$.

I. *Пусть* $1 \le q \le p \le \infty,\ (p,q) \ne (\infty,\infty),\ 1 \le \theta \le \infty$. *Тогда*

$$\mathcal{E}^{\Psi}_{Q(N)}(\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{p\,\theta}, L_q) \ll \frac{1}{N}|\Theta(N)|^{(\frac{1}{p_*}-\frac{1}{\theta})_+},$$

если $p < \infty$,

$$\mathcal{E}^{\Psi}_{Q(N)}(\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p\,\theta}, L_q) \ll \frac{1}{N}|\Theta(N)|^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}, \quad \mathcal{E}^{\Psi}_{Q(N)}(\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{1\,\theta}, L_1) \ll \frac{1}{N}|\Theta(N)|^{(1-\frac{1}{\theta})}.$$

II. *Пусть* $1 \le p < q < \infty,\ 1 \le \theta \le \infty$. *Тогда*

$$\mathcal{E}^{\Psi}_{Q(N)}(\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{p\,\theta}, L_q) \ll \frac{1}{N}|\Theta(N)|^{(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})_+}, \quad \mathcal{E}^{\Psi}_{Q(N)}(\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p\,\theta}, L_q) \ll \frac{1}{N}.$$

III. *Пусть* $1 \le p, \theta \le q = \infty$. *Тогда*

$$\mathcal{E}^{\Psi}_{Q(N)}(\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{p\,\theta}, L_\infty) \ll \frac{1}{N}|\Theta(N)|^{1-\frac{1}{\theta}},$$

если $p < \infty$,

$$\mathcal{E}^{\Psi}_{Q(N)}(\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p\,\theta}, L_\infty) \ll \frac{1}{N}|\Theta(N)|^{1-\frac{1}{p}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. I. Рассмотрим случай $1 \le q \le p \le \infty,\ q \ne \infty, 1 \le \theta \le \infty$. Сначала докажем оценки для классов $\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{p\,\theta}$.

а) Пусть $p = q = 1$.

$$\|f - S^{\Psi}_N(f,\cdot)\,|\,L_1\| = \Big\|f - \sum_{s \in \varkappa(N)} \Delta^{\Psi}_s(f,\cdot)\,|\,L_1\Big\| = \Big\|\sum_{s \in \varkappa^{\perp}(N)} \Delta^{\Psi}_s(f,\cdot)\,|\,L_1\Big\|$$

$$\le \|(\Delta^{\Psi}_s(f,\cdot))_{s \in \varkappa^{\perp}(N)}\,|\,\ell_1(L_1)\| = \|(\Omega(2^{-s})\Omega^{-1}(2^{-s})\Delta^{\Psi}_s(f,\cdot))_{s \in \varkappa^{\perp}(N)}\,|\,\ell_1(L_1)\| =: K_1.$$

Если $\theta = 1$, то справедлива оценка

$$K_1 \le \frac{1}{N}\|(\Omega^{-1}(2^{-s})\Delta^{\Psi}_s(f,\cdot))_{s \in \varkappa^{\perp}(N)}\,|\,\ell_1(L_1)\| \le \frac{1}{N}\|f\,|\,\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{11}\| \le \frac{1}{N}.$$

Если $1 < \theta < \infty$, применим неравенство Гельдера для рядов $\Big(\|c_j d_j\,|\,\ell_1\| \le \|c_j\,|\,\ell_P\| \cdot \|d_j\,|\,\ell_Q\|,\ \frac{1}{P} + \frac{1}{Q} = 1\Big)$ с $P = \theta, Q = \dfrac{\theta}{\theta - 1}$ и лемму 1

$$K_1 \le \Bigg(\sum_{s \in \varkappa^{\perp}(N)} \Omega(2^{-s})^{\frac{\theta}{\theta-1}}\Bigg)^{\frac{\theta-1}{\theta}} \|(\Omega^{-1}(2^{-s})\Delta^{\Psi}_s(f,\cdot))_{s \in \varkappa^{\perp}(N)}\,|\,\ell_\theta(L_1)\|$$

$$\ll \Bigg(\sum_{s \in \Theta(N)} \Omega(2^{-s})^{\frac{\theta}{\theta-1}}\Bigg)^{\frac{\theta-1}{\theta}} \|f\,|\,\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{1\theta}\| \le \frac{1}{N}|\Theta(N)|^{(1-\frac{1}{\theta})}.$$

Если $\theta = \infty$, то, используя лемму 1, получаем

$$K_1 \le \Bigg(\sum_{s \in \varkappa^{\perp}(N)} \Omega(2^{-s})\Bigg)\|(\Omega^{-1}(2^{-s})\Delta^{\Psi}_s(f,\cdot))_{s \in \varkappa^{\perp}(N)}\,|\,\ell_\infty(L_1)\|$$

$$\ll \Bigg(\sum_{s \in \Theta(N)} \Omega(2^{-s})\Bigg)\|f\,|\,\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{1\infty}\| \le \frac{1}{N}|\Theta(N)|.$$

b) Пусть $1 < p < \infty,\ 1 \le q \le p$.

$$\|f - S_N^\Psi(f,\cdot) \,|\, L_q\| = \Big\| \sum_{s \in \varkappa^\perp(N)} \Delta_s^\Psi(f,\cdot) \,|\, L_p \Big\| \le \big\| (\Omega(2^{-s})\Omega^{-1}(2^{-s})\Delta_s^\Psi(f,\cdot))_{s \in \varkappa^\perp(N)} \,|\, \ell_{p_*}(L_p) \big\| =: K_2.$$

Если $1 \le \theta \le p_*$, то используя неравенство Йенсена для рядов ($\|c_j \,|\, \ell_a\| \le \|c_j \,|\, \ell_b\|,\ 0 < b \le a \le \infty$), получим

$$K_2 \le \big\| (\Omega(2^{-s})\Omega^{-1}(2^{-s})\Delta_s^\Psi(f,\cdot))_{s \in \varkappa^\perp(N)} \,|\, \ell_\theta(L_p) \big\| \le \frac{1}{N} \|f \,|\, \mathrm{SB}_{p\,\theta}^{\Omega,\,l}\| \le \frac{1}{N}.$$

Если $p_* < \theta < \infty$, применим неравенство Гельдера для рядов с показателями $P = \dfrac{\theta}{p_*}$, $Q = \dfrac{\theta}{\theta - p_*}$ и лемму 1:

$$K_2 \ll \Big(\sum_{s \in \Theta(N)} \Omega(2^{-s})^{\frac{\theta p_*}{\theta - p_*}} \Big)^{\frac{\theta - p_*}{\theta p_*}} \|f \,|\, \mathrm{SB}_{p\,\theta}^{\Omega,\,l}\| \le \frac{1}{N} |\Theta(N)|^{(\frac{1}{p_*} - \frac{1}{\theta})}.$$

Если $\theta = \infty$, то, используя лемму 1, получаем

$$K_2 \ll \Big(\sum_{s \in \Theta(N)} \Omega(2^{-s})^{p_*} \Big)^{1/p_*} \|f \,|\, \mathrm{SB}_{p\infty}^{\Omega,\,l}\| \le \frac{1}{N} |\Theta(N)|^{1/p_*}.$$

c) Пусть $1 \le q < p = \infty$, тогда $p_* = 2$.

Обозначим $q^* = \max\{q, 2\}$. Так как $\|\cdot \,|\, L_q\| \le \|\cdot \,|\, L_{q^*}\| \le \|\cdot \,|\, L_\infty\|$, то верно элементарное вложение $SB_{\infty\,\theta}^{\Omega,\,l} \subset SB_{q^*\,\theta}^{\Omega,\,l},\ 1 \le \theta \le \infty$, и неравенство $\mathcal{E}_{Q(N)}^\Psi(\mathrm{SB}_{\infty\,\theta}^{\Omega,\,l}, L_q) \le \mathcal{E}_{Q(N)}^\Psi(\mathrm{SB}_{q^*\,\theta}^{\Omega,\,l}, L_{q^*})$, поэтому по уже доказанному в п. b) имеем ($\min\{q^*, q\} = 2$)

$$\mathcal{E}_{Q(N)}^\Psi(\mathrm{SB}_{\infty\,\theta}^{\Omega,\,l}, L_q) \ll \frac{1}{N} |\Theta(N)|^{(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})_+}.$$

Теперь получим оценку сверху для классов $\mathrm{SF}_{p\,\theta}^{\Omega,\,l}$.

a) Пусть сначала $p = q = 1$.

Если $\theta = 1$, то, поскольку $\mathrm{SF}_{11}^{\Omega,\,l} = \mathrm{SB}_{11}^{\Omega,\,l}$, оценка сверху уже получена.

Рассмотрим случай $1 < \theta \le \infty$. Тогда

$$\|f - S_N^\Psi(f,\cdot) \,|\, L_1\| = \Big\| \sum_{s \in \varkappa^\perp(N)} \Delta_s^\Psi(f,\cdot) \,|\, L_1 \Big\| = \big\| (\Omega(2^{-s})\Omega^{-1}(2^{-s})\Delta_s^\Psi(f,\cdot))_{s \in \varkappa^\perp(N)} \,|\, L_1(\ell_1) \big\| =: K_3.$$

Если $\theta < \infty$, применим неравенство Гельдера для рядов с $P = \theta,\ Q = \dfrac{\theta}{\theta - 1}$ и лемму 1:

$$K_3 \ll \Big(\sum_{s \in \Theta(N)} \Omega(2^{-s})^{\frac{\theta}{\theta - 1}} \Big)^{\frac{\theta - 1}{\theta}} \|f \,|\, \mathrm{SF}_{1\theta}^{\Omega,\,l}\| \le \frac{1}{N} |\Theta(N)|^{(1 - \frac{1}{\theta})}.$$

Если $\theta = \infty$, аналогично с помощью леммы 1 находим

$$K_3 \ll \Big(\sum_{s \in \Theta(N)} \Omega(2^{-s}) \Big) \|f \,|\, \mathrm{SF}_{1\infty}^{\Omega,\,l}\| \le \frac{1}{N} |\Theta(N)|.$$

b) Пусть теперь $1 < p < \infty$ и $1 \le q \le p$. Тогда

$$\|f - S_N^\Psi(f,\cdot) \,|\, L_q\| = \Big\| \sum_{s \in \varkappa^\perp(N)} \Delta_s^\Psi(f,\cdot) \,|\, L_q \Big\| \le \Big\| \sum_{s \in \varkappa^\perp(N)} \Delta_s^\Psi(f,\cdot) \,|\, L_p \Big\|$$

$$\asymp \left\|(\Omega(2^{-s})\Omega^{-1}(2^{-s})\Delta_s^{\Psi}(f,\cdot))_{s\in\varkappa^{\perp}(N)}\,|\,L_p(\ell_2)\right\| =: K_4.$$

Если $1\le\theta\le 2$, то применяя неравенство Йенсена для рядов, получаем

$$K_4 \le \frac{1}{N}\|(\Omega^{-1}(2^{-s})\Delta_s^{\Psi}(f,\cdot))_{s\in\varkappa^{\perp}(N)}\,|\,L_p(\ell_\theta)\| \ll \frac{1}{N}\|f\,|\,\mathrm{SF}_{p\theta}^{\Omega,l}\| \le \frac{1}{N}.$$

Если $2<\theta<\infty$, то применяя неравенство Гельдера для рядов с показателями $P=\dfrac{\theta}{\theta-2}$, $Q=\dfrac{\theta}{2}$ и лемму 1, получим

$$K_4 \ll \left(\sum_{s\in\Theta(N)}\Omega(2^{-s})^{\frac{2\theta}{\theta-2}}\right)^{\frac{\theta-2}{2\theta}}\|f\,|\,\mathrm{SF}_{p\theta}^{\Omega,l}\| \le \frac{1}{N}|\Theta(N)|^{(\frac12-\frac1\theta)}.$$

Если $\theta=\infty$, находим, используя лемму 1,

$$K_4 \ll \left(\sum_{s\in\Theta(N)}\Omega^2(2^{-s})\right)^{1/2}\|f\,|\,\mathrm{SF}_{p\infty}^{\Omega,l}\| \le \frac{1}{N}|\Theta(N)|^{1/2}.$$

II. Рассмотрим случай $1\le p<q<\infty$, $1\le\theta\le\infty$.

В работе [14, теорема 4] доказано, что справедливо вложение $SB_{p\theta}^{\Omega,l}\subset SB_{q\theta}^{\Omega_1,l+1}$, если $\Omega_1(t)=\Omega(t)\prod_{j=1}^d t_j^{-\frac1p+\frac1q}$; при $t=2^{-s}$ имеем $\Omega_1(2^{-s})=\Omega(2^{-s})2^{|s|(\frac1p-\frac1q)}$.

Следовательно, $\mathcal{E}_{Q(N)}^{\Psi}(\mathrm{SB}_{p\theta}^{\Omega,l},L_q)\le\mathcal{E}_{Q(N)}^{\Psi}(\mathrm{SB}_{q\theta}^{\Omega_1,l+1},L_q)$ и можно использовать случай I: при $1<q\le 2$ и $1\le\theta\le\infty$

$$\mathcal{E}_{Q(N)}^{\Psi}(\mathrm{SB}_{q\theta}^{\Omega_1,l+1},L_q)\ll\frac{1}{N}|\Theta(N)|^{(\frac1q-\frac1\theta)_+};$$

либо при $1\le\theta\le 2<q$

$$\mathcal{E}_{Q(N)}^{\Psi}(\mathrm{SB}_{q\theta}^{\Omega_1,l+1},L_q)\ll\frac{1}{N}.$$

При $q>2$ и $\theta>2$ полученные таким образом оценки грубее, чем требуется. Для более точных оценок нам понадобится предложение 5.1 из работы [8].

Тогда получаем

$$\|f-S_N^{\Psi}(f,\cdot)\,|\,L_q\| = \left\|\sum_{s\in\varkappa^{\perp}(N)}\Delta_s^{\Psi}(f,\cdot)\,|\,L_q\right\| \ll \left\|(2^{|s|(\frac1p-\frac1q)}\Delta_s^{\Psi}(f,\cdot))_{s\in\varkappa^{\perp}(N)}\,|\,\ell_q(L_p)\right\|$$

$$= \left\|(2^{|s|(\frac1p-\frac1q)}\Omega(2^{-s})\Omega^{-1}(2^{-s})\Delta_s^{\Psi}(f,\cdot))_{s\in\varkappa^{\perp}(N)}\,|\,\ell_q(L_p)\right\| =: K_5.$$

Если $q<\theta<\infty$, то, используя неравенство Гельдера с показателями $P=\dfrac{\theta}{\theta-q}$, $Q=\dfrac{\theta}{q}$ и лемму 2, получим

$$K_5 \le \left(\sum_{s\in\varkappa^{\perp}(N)}\left[2^{|s|(\frac1p-\frac1q)}\Omega(2^{-s})\right]^{\frac{q\theta}{\theta-q}}\right)^{\frac{\theta-q}{q\theta}}\left\|(\Omega^{-1}(2^{-s})\Delta_s^{\Psi}(f,\cdot))_{s\in\varkappa^{\perp}(N)}\,|\,\ell_\theta(L_p)\right\|$$

$$\le \left(\sum_{s\in\Theta(N)}\left[\Omega(2^{-s})2^{|s|(\frac1p-\frac1q)}\right]^{\frac{q\theta}{\theta-q}}\right)^{\frac{\theta-q}{q\theta}}\|f\,|\,\mathrm{SB}_{p\theta}^{\Omega,l}\| \le \frac{1}{N}|\Theta(N)|^{\frac1q-\frac1\theta}.$$

Если $q<\theta=\infty$, то с помощью леммы 2

$$K_5 \le \left(\sum_{s\in\varkappa^{\perp}(N)}\left[2^{|s|(\frac1p-\frac1q)}\Omega(2^{-s})\right]^q\right)^{1/q}\left\|(\Omega^{-1}(2^{-s})\Delta_s^{\Psi}(f,\cdot))_{s\in\varkappa^{\perp}(N)}\,|\,\ell_\infty(L_p)\right\|$$

$$\le \left(\sum_{s\in\Theta(N)} \left[\Omega(2^{-s}) 2^{|s|(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\right]^q \right)^{1/q} \|f \,|\, \mathrm{SB}^{\Omega,l}_{p\,\infty}\| \le \frac{1}{N}|\Theta|^{1/q}.$$

Если $2 < \theta \le q$, то по неравенству Йенсена для рядов имеем

$$K_5 \le \frac{1}{N}\left\|(\Omega^{-1}(2^{-s})\Delta^{\Psi}_s(f,\cdot))_{s\in\varkappa^{\perp}(N)} \,|\, \ell_\theta(L_p)\right\| \le \frac{1}{N}\|f \,|\, \mathrm{SB}^{\Omega,l}_{p\,\theta}\| \le \frac{1}{N}.$$

Теперь рассмотрим классы $\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p\,\theta}$. Справедливо вложение $SF^{\Omega,l}_{p\,\theta} \subset SF^{\Omega,l}_{q\,1}$. Следовательно, в соответствии со случаем I

$$\mathcal{E}^{\Psi}_{Q(N)}(\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p\,\theta}, L_q) \ll \mathcal{E}^{\Psi}_{Q(N)}(\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{q\,1}, L_q) \ll \frac{1}{N}.$$

III. Рассмотрим случай $1 \le p,\theta \le q = \infty$.

Согласно вложению $SB^{\Omega,l}_{p\,\theta} \subset SB^{\Omega,l}_{q\,\theta}$ достаточно получить оценку сверху для величины $\mathcal{E}^{\Psi}_{Q(N)}(\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{\infty\,\theta}, L_\infty)$.

Пусть $f \in \mathcal{E}^{\Psi}_{Q(N)}(\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{\infty\,\theta}, L_\infty)$, тогда, как и выше, по неравенству Гельдера для рядов имеем

$$\|f - S^{\Psi}_N(f,\cdot) \,|\, L_\infty\| \le \left\| \sum_{s\in\varkappa^{\perp}(N)} \Omega(2^{-s})\Omega^{-1}(2^{-s})\Delta^{\Psi}_s(f,\cdot) \,|\, L_\infty \right\| \le \|(\Omega(2^{-s}))_{s\in\varkappa^{\perp}(N)} \,|\, \ell_{\theta'}\|$$

$$\times \|(\Omega^{-1}(2^{-s})\Delta^{\Psi}_s(f,\cdot))_{s\in\varkappa^{\perp}(N)} \,|\, \ell_\theta(L_\infty)\| \ll \frac{1}{N}|\Theta(N)|^{1-\frac{1}{\theta}}\|f \,|\, \mathrm{SB}^{\Omega,l}_{\infty\,\theta}\| \le \frac{1}{N}|\Theta(N)|^{1-\frac{1}{\theta}}.$$

Рассмотрим класс $\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p\,\theta}$. В силу вложения $SF^{\Omega,l}_{p\,\theta} \subset SB^{\Omega,l}_{\infty\,p}$ получаем

$$\mathcal{E}^{\Psi}_{Q(N)}(\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p\,\theta}, L_\infty) \ll \mathcal{E}^{\Psi}_{Q(N)}(\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{\infty\,p}, L_\infty) \ll \frac{1}{N}|\Theta(N)|^{1-\frac{1}{p}}.$$

Таким образом оценки сверху в теореме 1 доказаны полностью.

З а м е ч а н и е 1. Точные по порядку оценки приближения классов функций $\mathrm{SB}^{r}_{p\,\theta}$ и $\mathrm{SF}^{r}_{p\,\theta}$ по системе Ψ_d получены в работе [8] (там же даны подробные комментарии по приближениям классов функций по различным системам типа всплесков).

S. Yongsheng и W. Heping (см. [14, теорема 5]) изучили приближение суммами Фурье по тригонометрической системе (определяемыми поверхностями уровня Ω) в случае $\Omega(t) = \omega(t_1 \times \cdots \times t_d)$ при $1 < p = q < \infty$, для классов $\mathrm{SB}^{\Omega}_{p\theta}(\mathbb{T}_d)$.

Далее, в работе [18] получены точные по порядку оценки наилучших приближений классов $\mathrm{B}^{\Omega}_{p\,\theta}$ периодических функций многих переменных тригонометрическими полиномами, спектры которых порождаются поверхностями уровня функции $\Omega(t)$, для параметров p и q: 1) $1 \le q = p < \infty$; 2)$1 < q < p \le \infty, p \ge 2$; 3) $1 \le q < p \le 2$ при $1 \le \theta < \infty$. Наконец, в [19] получены точные по порядку оценки приближений классов $\mathrm{MB}^{\Omega}_{p\,\theta}$ суммами Фурье в метрике L_q при $1 < p < q < \infty$, спектр приближающих полиномов лежит во множествах, порожденных поверхностями уровня функции $\Omega(t)/\prod_{j=1}^{d} t_j^{1/p-1/q}$.

5. Оценки поперечников Фурье

В этом разделе доказываются точные в смысле порядка оценки поперечников Фурье классов $\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{p\,\theta}$ и $\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p\,\theta}$ в метрике L_q в случае $\Omega(t) = \omega(t_1 \times \cdots \times t_d)$.

Наряду с поперечником Фурье (1.1) рассмотрим следующую величину, также введенную В. Н. Темляковым,

$$\varphi^{B}_{M}(F, L_q) = \inf_{G\in\mathcal{L}_M(B)_q} \sup_{f\in F} \| f - Gf(x)|L_q \|,$$

где $B \geq 1, \mathcal{L}_M(B)_q$ — множество линейных операторов G, в область определения которых входят все тригонометрические полиномы, а множество значений имеет размерность не выше M и содержится в пространстве $L_q(\mathbb{T}^d)$, таких, что $\|Ge^{i2\pi(k,x)} \mid L_2\| \leq B$, $k \in \mathbb{Z}^d$.

Из определения величин $\varphi_M(F, L_q)$ и $\varphi_M^B(F, L_q)$ легко видеть, что

$$\varphi_M^B(F, L_q) \leq \varphi_M(F, L_q). \tag{5.1}$$

Теорема 2. *Пусть* $1 \leq p, q, \theta \leq \infty$; $\omega \in \mathcal{S}_l \cap \mathcal{S}_l^\alpha$, *причем* $\alpha > \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+$.

I. *Если* $1 \leq q \leq p \leq \infty$, $(p, q) \neq (\infty, \infty)$, *тогда*

$$\varphi_M(\mathrm{SB}_{p\,\theta}^{\Omega,\,l}, L_q) \asymp \omega(M^{-1}\log^{d-1} M)(\log M)^{(d-1)(\frac{1}{p_*} - \frac{1}{\theta})_+},$$

если, кроме того, $p < \infty$, *тогда*

$$\varphi_M(\mathrm{SF}_{p\,\theta}^{\Omega,\,l}, L_q) \asymp \omega(M^{-1}\log^{d-1} M)(\log M)^{(d-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})_+},$$

$$\varphi_M(\mathrm{SF}_{1\,\theta}^{\Omega,\,l}, L_1) \asymp \omega(M^{-1}\log^{d-1} M)(\log M)^{(d-1)(1 - \frac{1}{\theta})}.$$

II. *Если* $1 \leq p < q < \infty$, *тогда*

$$\varphi_M(\mathrm{SB}_{p\,\theta}^{\Omega,\,l}, L_q) \asymp \omega(M^{-1}\log^{d-1} M)(M^{-1}\log^{d-1} M)^{-(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})}(\log M)^{(d-1)(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta})_+},$$

$$\varphi_M(\mathrm{SF}_{p\,\theta}^{\Omega,\,l}, L_q) \asymp \omega(M^{-1}\log^{d-1} M)(M^{-1}\log^{d-1} M)^{-(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})}.$$

III. *Если* $1 \leq p \leq q = \infty$, *тогда*

$$\varphi_M(\mathrm{SB}_{p\,\theta}^{\Omega,\,l}, L_\infty) \asymp \omega(M^{-1}\log^{d-1} M)(M^{-1}\log^{d-1} M)^{-\frac{1}{p}}(\log M)^{(d-1)(1 - \frac{1}{\theta})},$$

если, кроме того, $p < \infty$, *тогда*

$$\varphi_M(\mathrm{SF}_{p\,\theta}^{\Omega,\,l}, L_\infty) \asymp \omega(M^{-1}\log^{d-1} M)(M^{-1}\log^{d-1} M)^{-\frac{1}{p}}(\log M)^{(d-1)(1 - \frac{1}{p})}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Установим оценки снизу. Согласно неравенству (5.1) достаточно установить оценки снизу для величин $\varphi_M^B(\mathrm{SB}_{p\,\theta}^{\Omega,\,l}, L_q)$ и $\varphi_M^B(\mathrm{SF}_{p\,\theta}^{\Omega,\,l}, L_q)$. При доказательстве оценок снизу для этих величин во всех случаях для произвольного оператора $G \in \mathcal{L}_M(B)_q$ будет установлено существование тригонометрического полинома специального вида, принадлежащего соответствующему функциональному классу ($\mathrm{SB}_{p\theta}^{\Omega,\,l}$ или $\mathrm{SF}_{p\theta}^{\Omega,\,l}$), который плохо приближается с помощью оператора G. При этом считаем, не ограничивая общности, что оператор $G \in \mathcal{L}_M(B)_2$. По достаточно большому $M \in \mathbb{N}$ подберем $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы $2^n n^{d-1} \asymp M$.

Рассмотрим множества $\Theta_n = \{s\colon \|s\|_1 = n, s_j$ – натуральные числа, $j \in e_d\}$, $Q(n) = \bigcup\limits_{s \in \Theta_n} \rho(s)$, где $|\Theta_n| \asymp n^{d-1}$, $|Q(n)| \asymp 2^n n^{d-1}$.

I. $1 \leq q \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$.

Так как оценки $\varphi_M(\mathrm{SF}_{p\theta}^{\Omega,\,l}, L_q)$ не зависят от q, рассмотрим случай $q = 1$.

1. Пусть $1 \leq q \leq p \leq \infty$, $p \geq 2$, $1 \leq \theta \leq \infty$, тогда $p_* = 2$.

a) Рассмотрим подслучай $1 \leq \theta \leq 2$.

Имеют место вложения $SB_{\infty\,1}^{\Omega,\,l} \subset SB_{p\,1}^{\Omega,\,l}$ при $1 \leq p \leq \infty$, $SB_{p\,1}^{\Omega,\,l} \subset SB_{p\,\theta}^{\Omega,\,l}$ при $1 \leq \theta \leq \infty$, и $SB_{p\,\theta}^{\Omega,\,l} \subset SF_{p\,\theta}^{\Omega,\,l}$ при $1 \leq \theta \leq p < \infty$ (если $p = \infty$, то рассматриваем только классы (и пространства) Никольского — Бесова) и неравенство $\|\cdot \mid L_1\| \leq \|\cdot \mid L_q\|, q \geq 1$. Следовательно, нам достаточно доказать оценку снизу для $\varphi_M^B(\mathrm{SB}_{\infty\,1}^{\Omega,\,l}, L_1)$, т. е. доказать неравенство

$$\varphi_M^B(\mathrm{SB}_{\infty\,1}^{\Omega,\,l}, L_1) \gg \omega(2^{-n}). \tag{5.2}$$

Пусть задано число M, оператор $G \in \mathcal{L}_M(B)_1$. Тогда существует вектор $k^0 = (k_1^0, \dots, k_d^0) \in Q(n)$ (см. [9, пример 1]): $\|e^{2\pi i(k^0,\cdot)} - Ge^{2\pi i(k^0,\cdot)} \,|\, L_1\| \gg 1$.

Рассмотрим функцию $g_1(x) = e^{2\pi i(k^0,x)}$. Теперь оценим $\|g_1(\cdot+y^*) \,|\, \mathrm{SB}^{\Omega,l}_{\infty\,1}\|$, используя теорему B: $\|g_1(x+y^*) \,|\, \mathrm{SB}^{\Omega,l}_{\infty\,1}\| \ll \|\omega^{-1}(2^{-s})A_s(g_1,\cdot) \,|\, \ell_1(L_\infty)\| \asymp \omega^{-1}(2^{-n})\||e^{2\pi i(k^0,x)}| \,|\, L_p\| \asymp \omega^{-1}(2^{-n})$.

Следовательно, функция $f_1(x) = c_1\omega(2^{-n})g_1(x)$ с некоторой постоянной $c_1 > 0$, не зависящей от n, принадлежит классу $\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{\infty\,1}$:

$$\|f_1(\cdot) \,|\, \mathrm{SB}^{\Omega,l}_{\infty\,1}\| = \|\omega^{-1}(2^{-s})A_s(f_1,\cdot) \,|\, \ell_1(L_\infty)\| \asymp \omega^{-1}(2^{-n})\omega(2^{-n})\||e^{2\pi i(k^0,x)}| \,|\, L_p\| \ll 1.$$

Тогда $\|f_1(\cdot) - Gf_1(\cdot) \,|\, L_1\| = \omega(2^{-n})\|e^{2\pi i(k^0,\cdot)} - Ge^{2\pi i(k^0,\cdot)} \,|\, L_1\| \gg \omega(2^{-n})$. В силу произвольности оператора G получаем требуемую оценку (5.2).

b) Пусть $2 < \theta \le \infty$. Рассмотрим отдельно два возможных соотношения между p и θ.

b$_1$) Если $2 < \theta \le p \le \infty$, то в силу вложений $SB^{\Omega,l}_{p\,\theta} \subset SF^{\Omega,l}_{p\,\theta}$ при $p < \infty$ и $SB^{\Omega,l}_{\infty\,\theta} \subset SB^{\Omega,l}_{p\,\theta}$ и неравенства $\|\cdot \,|\, L_1\| \le \|\cdot \,|\, L_q\|$ здесь достаточно получить оценку

$$\varphi^B_M(\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{\infty\,\theta}, L_1) \gg \omega(2^{-n})n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}. \tag{5.3}$$

Далее возьмем множество $\Theta'_n \subset \Theta_n$. Рассмотрим функцию $g_2(x) = \sum_{s\in\Theta'_n} A_s(g_2,x)$, $A_s(g_2,x) = \sum_{k\in\bar\rho(s)} \hat g_2 e^{2\pi i(k^s,x)}$, где согласно [9, лемма 1.4] $\|A_s(g_2,\cdot) \,|\, L_\infty\| \le |\Theta'_n|^{-\frac{1}{2}}$.

Если возьмем линейный оператор $G \in \mathcal{L}_M(B)_1$, то несложно показать, что

$$\|g_2(\cdot) - Gg_2(\cdot) \,|\, L_1\| \ge C_2.$$

Теперь оценим $\|g_2(\cdot + y^*) \,|\, \mathrm{SB}^{\Omega,l}_{\infty\,\theta}\|$, используя теорему B:

$$\|g_2(\cdot + y^*) \,|\, \mathrm{SB}^{\Omega,l}_{\infty\,\theta}\| \ll \|\omega^{-1}(2^{-s})A_s(g_2,\cdot) \,|\, \ell_\theta(L_\infty)\| \asymp \omega^{-1}(2^{-n})\Bigg(\sum_{s\in\Theta'_n} \|A_s(g_2,\cdot) \,|\, L_\infty\|^\theta\Bigg)^{1/\theta}$$

$$\asymp \omega^{-1}(2^{-n})\Bigg(\sum_{s\in\Theta'_n} |\Theta'_n|^{-\frac{\theta}{2}}\Bigg)^{1/\theta} = \omega^{-1}(2^{-n})|\Theta'_n|^{\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2}} \asymp \omega^{-1}(2^{-n})n^{(d-1)(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2})}.$$

Тогда функция $f_2(x) = c_2\omega(2^{-n})n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}g_2(x)$ принадлежит $\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{\infty\,\theta}$, где положительная постоянная c_2 не зависит от n,

$$\|f(\cdot) \,|\, \mathrm{SB}^{\Omega,l}_{\infty\,\theta}\| \asymp \|\omega^{-1}(2^{-s})A_s(f_2,\cdot) \,|\, \ell_\theta(L_\infty)\| \asymp n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}\Bigg(\sum_{s\in\Theta'_n} |\|A_s(g_2,\cdot) \,|\, L_\infty\|^\theta\Bigg)^{1/\theta}$$

$$\asymp n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}\Bigg(\sum_{s\in\Theta'_n} |\Theta'_n|^{-\frac{\theta}{2}}\Bigg)^{1/\theta} = n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}|\Theta'_n|^{\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2}} \asymp n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}n^{(d-1)(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2})} \asymp 1.$$

Тогда $\|f_2(\cdot) - Gf_2(\cdot) \,|\, L_q\| \ge \|f_2(\cdot) - Gf_2(\cdot) \,|\, L_1\| \gg \omega(2^{-n})n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}$. Отсюда в силу произвольности оператора G с учетом выбора n по M получим (5.3).

b$_2$) Если $2 \le p < \theta \le \infty$, то в силу вложения $SF^{\Omega,l}_{p\,\theta} \subset SB^{\Omega,l}_{p\,\theta}$ и неравенства $\|\cdot \,|\, L_1\| \le \|\cdot \,|\, L_q\|$ достаточно оценить снизу величину

$$\varphi^B_M(\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p\,\theta}, L_1) \gg \omega(2^{-n})n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}. \tag{5.4}$$

Пусть $G \in L_M(B)_1$ (см. [9, пример 6]). Найдутся $n, \Theta^1_n \subset \Theta_n$ такие, что $|Q(n)| < c(B,d)M$, $|\Theta^1_n| \ge 1/2|\Theta_n|$, и в каждом $\rho(s), s \in \Theta^1_n$, найдутся векторы $k^s \in \rho(s)$, при которых для функции $g(x) = \sum_{s\in\Theta^1_n} e^{2\pi i(k^s,x)}$ найдется y^* такой, что

$$\|g(\cdot + y^*) - Gg(x + y^*) \,|\, L_1\| \gg (\log M)^{\frac{d-1}{2}}. \tag{5.5}$$

Возьмем в качестве $g_3(x) = g(x)$ и из условия теоремы $\log M \sim n$.

Теперь оценим $\|g_3(\cdot + y^*) \,|\, \mathrm{SF}^{\Omega,\, l}_{p\,\theta}\|$, используя представление для пространства Лизоркина — Трибеля:

$$\|g_3(\cdot + y^*) \,|\, \mathrm{SF}^{\Omega,\, l}_{p\,\theta}\| \ll \|\omega^{-1}(2^{-s}) A_s(g_3, \cdot) \,|\, L_p(\ell_\theta)\|$$

$$\asymp \omega^{-1}(2^{-n}) \Big\| \Big(\sum_{s \in \Theta^1_n} |e^{2\pi i(k^s, x)}|^\theta \Big)^{1/\theta} \,|\, L_p\Big\| \asymp \omega^{-1}(2^{-n}) |\Theta^1_n|^{1/\theta} \asymp \omega^{-1}(2^{-n}) n^{(d-1)\frac{1}{\theta}}.$$

Тогда функция $f_3(x) = c_3 \omega(2^{-n}) n^{-(d-1)\frac{1}{\theta}} g_3(x + y^*)$ с некоторой постоянной $c_3 > 0$, не зависящей от n, принадлежит классу $\mathrm{SF}^{\Omega,\, l}_{p\,\theta}$, причем в силу (5.5) имеем $\|f_3(\cdot) - Gf_3(\cdot) \,|\, L_1\| \gg \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})}$. Отсюда в силу произвольности оператора G с учетом выбора n по M получим (5.4).

2. Перейдем к случаю $1 \le q \le p \le 2,\ p > 1,\ 1 \le \theta \le \infty$ $(p_* = p)$.

a) Пусть $1 \le \theta \le p$.

В силу вложений $SB^{\Omega,\, l}_{2\,1} \subset SB^{\Omega,\, l}_{p\,1}$ при $1 < p \le 2$, $SB^{\Omega,\, l}_{p\,1} \subset SB^{\Omega,\, l}_{p\,\theta}$ и неравенства $\|\cdot \,|\, L_1\| \le \|\cdot \,|\, L_q\|$ при рассмотрении классов $SB^{\Omega,\, l}_{p\,\theta}$ достаточно доказать оценку

$$\varphi^B_M(\mathrm{SB}^{\Omega,\, l}_{2\,1}, L_1) \gg \omega(2^{-n}). \tag{5.6}$$

Пусть G — произвольный оператор из $\mathcal{L}_M(B)_1$. Так как $g_1 \in \mathrm{SB}^{\Omega,\, l}_{\infty\,1}$ из п.1, a) и $\|g_1 \,|\, \mathrm{SB}^{\Omega,\, l}_{2\,1}\| \le \|g_1 \,|\, \mathrm{SB}^{\Omega,\, l}_{\infty\,1}\|$. Следовательно, $f_1(x) \in \mathrm{SB}^{\Omega,\, l}_{2\,1}$. Тогда из произвольности оператора G следует требуемая оценка (5.6).

b) $1 \le \theta \le 2$.

В силу вложений $SB^{\Omega,\, l}_{2\,1} \subset SB^{\Omega,\, l}_{p\,1}$ при $1 < p \le 2$, $SB^{\Omega,\, l}_{p\,1} \subset SF^{\Omega,\, l}_{p\,1}$ и $SF^{\Omega,\, l}_{p\,1} \subset SF^{\Omega,\, l}_{p\,\theta}$ при $\theta \ge 1$ и неравенства $\|\cdot \,|\, L_1\| \le \|\cdot \,|\, L_q\|$ при рассмотрении классов $\mathrm{SF}^{\Omega,\, l}_{p\,\theta}$ достаточно оценить снизу величину $\varphi^B_M(\mathrm{SB}^{\Omega,\, l}_{2\,1}, L_1)$, что уже сделано выше в п. 2, a).

c) Пусть теперь $p < \theta \le \infty$.

По неравенству $\|\cdot \,|\, L_1\| \le \|\cdot \,|\, L_q\|$ при рассмотрении классов $\mathrm{SB}^{l,\Omega}_{p\,\theta}$ достаточно оценить величину $\varphi^B_M(\mathrm{SB}^{\Omega,\, l}_{p\,\theta}, L_1)$:

$$\varphi^B_M(\mathrm{SB}^{\Omega,\, l}_{p\,\theta}, L_1) \gg \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta})}. \tag{5.7}$$

Пусть $\tilde{\Theta}_n = \{s \in \Theta_n \colon s_j \ge n/2d, j \in e_d\}$. Ясно, что $|\tilde{\Theta}_n| \asymp n^{d-1}$. Положим $w = [|\tilde{\Theta}_n|^{\frac{1}{d}}]$. Разобьем $\mathbb{T}^d$ на w^d кубов со стороной $2\pi/m$. Далее между множеством $\tilde{\Theta}_n$ и множеством кубов установим взаимно однозначное соответствие. Вектору $s \in \tilde{\Theta}_n$ поставим в соответствие куб с центром x^s. Пусть $z = 2^{[\frac{d-1}{d} \log n]}$. Рассмотрим оператор $G \in \mathcal{L}_M(B)_1$. Тогда найдутся (см. [9, пример 7]) достаточно большое число n и множество $\Theta^2_n \subset \tilde{\Theta}_n$: $|\Theta^2_n| \ge 1/2 |\tilde{\Theta}_n|$, и в каждом $\rho(s), s \in \Theta^2_n$, существуют кубы с центром в k^s и длинами ребер $2z$ такие, что для функции

$$g_4(x) = \sum_{s \in \Theta^2_n} e^{2\pi i(k^s, x)} \prod_{j \in e_d} K_z(x_j - x^s_j)$$

(здесь $K_n(t) = 1 + \sum_{k=1}^n (1 - \frac{k}{n+1}) \cos kt$ — ядро Фейера порядка n) найдется y^* такой, что

$$\|g_4(\cdot + y^*) - Gg_4(\cdot + y^*) \,|\, L_1\| \gg n^{d-1}.$$

Здесь $k^{s_j}_j = 2^{s_j - 1} + 2^{s_j - 2}$, если $s_j \ge 2$, и $k^{s_j}_j = 1$, если $s_j = 1, j \in e_d$.

Оценим $\|g_4(\cdot + y^*) \,|\, \mathrm{SB}^{\Omega,\, l}_{p\,\theta}\|$, используя теорему B:

$$\|g_4(\cdot + y^*) \,|\, \mathrm{SB}^{\Omega,\, l}_{p\,\theta}\| \ll \|\omega^{-1}(2^{-s}) A_s(g_4, \cdot) \,|\, \ell_\theta(L_p)\| \asymp \omega^{-1}(2^{-n}) \Big(\sum_{s \in \Theta^2_n} \|A_s(g_4, \cdot) \,|\, L_p\|^\theta \Big)^{1/\theta}$$

$$\ll \omega^{-1}(2^{-n})\bigg(\sum_{s\in\Theta_n^2}\|\prod_{j\in e_d}K_z(x_j)\,|\,L_p\|^\theta\bigg)^{1/\theta}=\omega^{-1}(2^{-n})n^{(d-1)(1-\frac{1}{p})}|\Theta_n^2|^{1/\theta}\asymp\omega^{-1}(2^{-n})n^{(d-1)(1+\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})}.$$

Тогда функция $f_4(x)=c_4\omega(2^{-n})n^{-(d-1)(1+\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})}g_4(x)$, где постоянная $c_4>0$ не зависит от n, принадлежит $\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{p\,\theta}$:

$$\|f\,|\,\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{p\,\theta}\|\asymp\|\omega^{-1}(2^{-s})A_s(f_2,\cdot)\,|\,\ell_\theta(L_p)\|\asymp n^{-(d-1)(1+\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})}\bigg(\sum_{s\in\Theta_n^2}\|A_s(g_4,\cdot)\,|\,L_p\|^\theta\bigg)^{1/\theta}$$

$$\asymp n^{-(d-1)(1+\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})}\bigg(\sum_{s\in\Theta_n^2}\|\prod_{j\in e_d}K_z(x_j)\,|\,L_p\|^\theta\bigg)^{1/\theta}=n^{-(d-1)(1+\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})}n^{(d-1)(1-\frac{1}{p})}|\Theta_n^2|^{1/\theta}\asymp 1.$$

Имеем $\|f_4(\cdot)-Gf_4(\cdot)\,|\,L_1\|\gg\omega(2^{-n})n^{-(d-1)(1+\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})}\|g_4(\cdot)-Gg_4(\cdot)\,|\,L_1\|\ge\omega(2^{-n})n^{(d-1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta})}$. Отсюда в силу произвольности оператора G с учетом выбора n по M получим (5.7).

d) Пусть теперь $2<\theta\le\infty$.

В силу вложений $SF^{\Omega,l}_{2\,\theta}\subset SB^{\Omega,l}_{p\theta}$ при $1<p\le 2$ и неравенства $\|\cdot\,|\,L_1\|\le\|\cdot\,|\,L_q\|$ при рассмотрении классов $\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p\,\theta}$ достаточно доказать оценку $\varphi^B_M(\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{2\,\theta},L_1)\gg\omega(2^{-n})n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}$.

Но эта оценка есть частный случай установленной выше оценки (5.4).

3. Наконец, рассмотрим случай $p=q=1,\ 1\le\theta\le\infty$. Тогда $p_*=1$. В силу вложения $SF^{\Omega,l}_{1\,\theta}\subset SB^{\Omega,l}_{1\,\theta}$ здесь достаточно доказать оценку снизу

$$\varphi^B_M(\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{1\,\theta},L_1)\gg\omega(2^{-n})n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \tag{5.8}$$

Для доказательства воспользуемся построениями из работы [7, с. 33]. Пусть G — произвольный оператор из $\mathcal{L}_M(B)_2$. Рассмотрим одномерное периодизированное ядро Бесселя—Макдональда ($\delta>0$)

$$F_\delta(x)=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^d}\frac{1}{(4\pi)^{\delta/2}}\frac{1}{\Gamma(\frac{\delta}{2})}\int\limits_0^\infty e^{\frac{-\pi(x+\xi,x+\xi)}{\tau}}e^{-\frac{\tau}{4\pi}}\tau^{-\frac{k+\delta}{2}}\frac{d\tau}{\tau}$$

и d–кратное ядро Бесселя—Макдональда $F^d_\delta(x)=\prod_{k\in e_d}F_{\delta_k}(x_k)$. Рассмотрим функцию

$$g_5(x)=\sum_{s\in\varkappa_n^\perp}A_s(F_l,x_j).$$

Тогда можно показать аналогично тому, как это доказано в [7], что $\|g_5(\cdot+y^*)-Gg_5(\cdot+y^*)\,|\,L_1\|\gg 2^{-nl}n^{d-1}$. Ясно, что $\|A_s(F^d_l,x)\,|\,L_1\|\ll 2^{-\|s\|_1 l}$. Оценим $\|g_5(x+y^*)\,|\,\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{1\,\theta}\|$:

$$\|g_5(\cdot+y^*)\,|\,\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{1\,\theta}\|\ll\|\bigg(\sum_{s\in\Theta_n}\omega^{-\theta}(2^{-s})|A_s(F^d_l,x)|^\theta\bigg)\,|\,L_1\|\asymp\omega^{-1}(2^{-n})n^{(d-1)\frac{1}{\theta}}2^{-nl}.$$

Тогда функция $f_5(x)=c_5\omega(2^{-n})n^{-(d-1)\frac{1}{\theta}}2^{nl}g_5(x)$, где постоянная $c_5>0$ не зависит от n, принадлежит $\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{1\,\theta}$. Таким образом,

$$\|f_5(\cdot)-Gf_5(\cdot)\,|\,L_1\|\gg\omega(2^{-n})n^{-(d-1)\frac{1}{\theta}}2^{nl}\|g_5(\cdot)-Gg_5(\cdot)\,|\,L_1\|\ge\omega(2^{-n})n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

Отсюда в силу произвольности оператора G с учетом выбора n по M получим (5.8).

II. Рассмотрим теперь случай $1\le p<q<\infty,\ 1\le\theta\le\infty$.

Рассмотрим сначала класс $\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{p\,\theta}$.

a) Пусть $q < \theta \le \infty$.

Тогда требуется оценить снизу величину $\varphi_M^B(\mathrm{SB}_{p\,\theta}^{\Omega,\,l}, L_q)$ т. е. следует доказать оценку

$$\varphi_M^B(\mathrm{SB}_{p\,\theta}^{\Omega,\,l}, L_q) \gg \omega(2^{-n}) 2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})}. \tag{5.9}$$

Пусть G — произвольный оператор из $\mathcal{L}_M(B)_2$ (см. [9, пример 2]). Рассмотрим тригонометрический полином ($K_s(x)$ — ядро Фейра)

$$g(x) = \sum_{s\in\Theta_n} e^{2\pi i(k^s,x)} \prod_{j\in e_d} K_{2^{s_j-2}}(x_j).$$

Найдется y^* такой, что

$$\|g(\cdot - y^*) - Gg(\cdot - y^*)\,|\,L_q\| \gg \begin{cases} 2^{n(1-\frac{1}{q})} n^{\frac{d-1}{q}}, & 1 < q < \infty, \\ 2^n n^{d-1}, & q = \infty. \end{cases}$$

Положим $g_6(x) = g(x)$. Оценим $\|g_6(\cdot - y^*)\,|\,\mathrm{SB}_{p\,\theta}^{\Omega,\,l}\|$:

$$\|g_6(\cdot - y^*)\,|\,\mathrm{SB}_{p\,\theta}^{\Omega,\,l}\| \ll \left(\sum_{s\in\Theta_n} \omega^{-\theta}(2^{-s}) \|A_s(g_6,x)\,|\,L_p\|^\theta\right)^{1/\theta} \asymp \omega^{-1}(2^{-n}) n^{(d-1)\frac{1}{\theta}} 2^{n(1-\frac{1}{p})}.$$

Тогда функция $f_6(x) = c_6\omega(2^{-n}) n^{-(d-1)\frac{1}{\theta}} 2^{-n(1-\frac{1}{p})} g_6(x)$ принадлежит $\mathrm{SB}_{p\,\theta}^{\Omega,\,l}$ с некоторой постоянной $c_6 > 0$, не зависящей от n. Таким образом,

$$\|f_6(\cdot) - Gf_6(\cdot)\,|\,L_1\| \gg \omega(2^{-n}) n^{-(d-1)\frac{1}{\theta}} 2^{-n(1-\frac{1}{p})} \|g_6(\cdot) - Gg_6(\cdot)\,|\,L_1\| \ge \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})} 2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}.$$

Отсюда в силу произвольности оператора G с учетом выбора n по M получим (5.9).

b) Пусть $1 \le \theta \le q$.

В силу вложения $SB_{p\,1}^{\Omega,\,l} \subset SB_{p\,\theta}^{\Omega,\,l}$ здесь достаточно оценить снизу величину $\varphi_M^B(\mathrm{SB}_{p\,1}^{\Omega,\,l}, L_q)$, т. е. доказать оценку

$$\varphi_M^B(\mathrm{SB}_{p\,1}^{\Omega,\,l}, L_q) \gg \omega(2^{-n}) 2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}. \tag{5.10}$$

Пусть G — произвольный оператор из $\mathcal{L}_M(B)_q$ (см. [9, пример 4]). Тогда найдутся y^*, s^*, $s^* \in \Theta_n$ такие, что $\|K_{s^*}(\cdot - y^*) - GK_{s^*}(\cdot - y^*)\,|\,L_q\| \gg 2^{n(1-\frac{1}{q})}$.

Положим $g_7(x) = K_{s^*}(x - y^*)$. Оценим $\|g_7(\cdot)\,|\,\mathrm{SB}_{p\,1}^{\Omega,\,l}\|$: $\|g_7(\cdot)\,|\,\mathrm{SB}_{p\,1}^{\Omega,\,l}\| \ll \omega^{-1}(2^{-n}) 2^{n(1-\frac{1}{p})}$. Тогда с некоторой постоянной $c_7 > 0$, не зависящей от n, функция $f_7(x) = c_7\omega(2^{-n}) 2^{-n(1-\frac{1}{p})} g_7(x)$ принадлежит $\mathrm{SB}_{p\,1}^{\Omega,\,l}$. Таким образом, $\|f_7(\cdot) - Gf_7(\cdot)\,|\,L_q\| \gg \omega(2^{-n}) 2^{-n(1-\frac{1}{p})} \|g_7(\cdot) - Gg_7(\cdot)\,|\,L_q\| \ge \omega(2^{-n}) 2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}$. Отсюда в силу произвольности оператора G с учетом выбора n по M получим (5.10).

Рассмотрим класс $SF_{p\,\theta}^{\Omega,\,l}$. В силу вложения $SB_{p\,1}^{\Omega,\,l} \subset SF_{p\,\theta}^{\Omega,\,l}$ для всех $1 \le \theta \le \infty$ здесь достаточно оценить величину $\varphi_M^B(\mathrm{SB}_{p\,1}^{\Omega,\,l}, L_q)$, что уже сделано в п. II b).

III. Рассмотрим случай $1 \le p \le q = \infty$, $1 \le \theta \le \infty$.

Сначала получим оценку снизу для классов $SB_{p\,\theta}^{\Omega,\,l}$:

$$\varphi_M^B(\mathrm{SB}_{p\,\theta}^{\Omega,\,l}, L_\infty) \gg \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{p}} n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \tag{5.11}$$

Возьмем $g_8(x) = g(x - y^*)$ из п. II a). Пусть G — произвольный оператор из $\mathcal{L}_M(B)_2$. В п. II a) доказано, что

$$\|g_8(\cdot)\,|\,\mathrm{SB}_{p\,\theta}^{\Omega,\,l}\| \ll \omega^{-1}(2^{-n}) n^{(d-1)\frac{1}{\theta}} 2^{n(1-\frac{1}{p})}.$$

Функция $f_8(x) = c_8\omega(2^{-n})n^{-(d-1)\frac{1}{\theta}}2^{-n(1-\frac{1}{p})}g_8(x)$ принадлежит $\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{p\theta}$ с некоторой постоянной $c_8 > 0$, не зависящей от n. Таким образом,

$$\|f_8(\cdot) - Gf_8(\cdot)\,|\,L_\infty\| \gg \omega(2^{-n})n^{-(d-1)\frac{1}{\theta}}2^{-n(1-\frac{1}{p})}\|g_8(\cdot) - Gg_8(\cdot)\,|\,L_\infty\| \gg \omega(2^{-n})n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}2^{\frac{n}{p}}.$$

Отсюда в силу произвольности оператора G с учетом выбора n по M получим (5.11).

Теперь рассмотрим классы $SF^{\Omega,l}_{p\theta}$ при условии, что $p < \infty$. В силу вложения $SF^{\Omega,l}_{p1} \subset SF^{\Omega,l}_{p\theta}$ здесь достаточно оценить снизу величину $\varphi^B_M(\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p1}, L_\infty)$, т. е. следует доказать оценку

$$\varphi^B_M(\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p1}, L_\infty) \gg \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}}n^{(d-1)(1-\frac{1}{p})}. \tag{5.12}$$

Если $p = 1$, то $SF^{\Omega,l}_{11} \subset SB^{\Omega,l}_{11}$, и требуемая оценка следует из установленной выше оценки (5.11).

Пусть $1 < p < \infty$.

Возьмем $g_8(x)$ из предыдущего случая. Оценим норму $g_8(x)$ в $\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p1}$, используя лемму из [7, с. 19]:

$$\|g_8(\cdot)\,|\,\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p1}\| \ll \|\omega^{-1}(2^{-s})A_s(g_8,x)\,|\,L_p(\ell_1)\| \ll \|\omega^{-1}(2^{-s})2^{s(1-\frac{1}{p})}A_s(g_8,x)\,|\,\ell_p(L_1)\|$$
$$= \left(\sum_{s\in\Theta_n}\omega^{-1}(2^{-s})2^{s(1-\frac{1}{p})}\|g_8\,|L_1\|^p\right)^{1/p} \asymp \omega^{-1}(2^{-n})n^{(d-1)\frac{1}{p}}2^{n(1-\frac{1}{p})}.$$

Функция $f_9(x) = c_9\omega(2^{-n})n^{-(d-1)\frac{1}{p}}2^{-n(1-\frac{1}{p})}g_8(x)$ принадлежит $\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p1}$. Тогда

$$\|f_9(\cdot) - Gf_9(\cdot)\,|\,L_\infty\| \gg \omega(2^{-n})n^{-(d-1)\frac{1}{p}}2^{-n(1-\frac{1}{p})}\|g_8(\cdot) - Gg_8(\cdot)\,|\,L_\infty\| \gg \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}}n^{(d-1)(1-\frac{1}{p})}.$$

Отсюда в силу произвольности оператора G с учетом выбора n по M получим (5.12).

Таким образом, оценки снизу в теореме 2 доказаны полностью. Перейдем к доказательству оценок сверху. Из определения поперечников Фурье и величины $\mathcal{E}^\Psi_{Q(N)}(\mathrm{F}, L_q)$ следует, что при $|Q(N)| \le M$ верно неравенство $\varphi_M(\mathrm{F}, L_q) \le \mathcal{E}^\Psi_{Q(N)}(\mathrm{F}, L_q)$.

Далее, по M подберем n так, чтобы $2^n n^{d-1} \asymp M, |Q(N)| \le M$. Тогда, поскольку мажоранта имеет вид $\omega(t_1 \times \cdots \times t_d)$, находим, что $\omega(2^{-n}) \asymp 1/N,\ n \asymp \log N$, и из теоремы 1 вытекают все требуемые оценки сверху для поперечников $\varphi_M(\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{p\theta}, L_q)$, $\varphi_M(\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p\theta}, L_q)$. Таким образом, теорема 2 доказана полностью.

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что поперечники Фурье классов Лизоркина — Трибеля $\mathrm{SF}^r_{p\theta}(\mathbb{T}^d)$ впервые исследованы Д.Б. Базархановым в работе [7].

В работе [15, теорема 2] найдены точные по порядку оценки поперечников Фурье для классов $SB^\Omega_{p,\theta}$ при $1 \le q \le p \le \infty, p \ge 2, (q,p) \ne (\infty,\infty), 1 \le \theta \le \infty$, и $\Omega(t) = \omega(t_1 \times \cdots \times t_d)$.

З а м е ч а н и е 3. Из теорем 1 и 2 следует теорема 1′.

Теорема 1′. *Пусть* $1 \le p,q,\theta \le \infty$; $\omega \in \mathcal{S}_l \cap \mathcal{S}^\alpha_l$, *причем* $\alpha > \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+$.

I. *Пусть* $1 \le q \le p \le \infty,\ (p,q) \ne (\infty,\infty),\ 1 \le \theta \le \infty$. *Тогда*

$$\mathcal{E}^\Psi_{Q(N)}(\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{p\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-n})n^{(d-1)(\frac{1}{p_*}-\frac{1}{\theta})_+},$$

если $p < \infty$,

$$\mathcal{E}^\Psi_{Q(N)}(\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-n})n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}, \quad \mathcal{E}^\Psi_{Q(N)}(\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{1\theta}, L_1) \asymp \omega(2^{-n})n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

II. *Пусть* $1 \le p < q < \infty,\ 1 \le \theta \le \infty$. *Тогда*

$$\mathcal{E}^\Psi_{Q(N)}(\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{p\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-n})2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})_+}, \quad \mathcal{E}^\Psi_{Q(N)}(\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-n})2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})};$$

III. *Пусть* $1 \le p,\ \theta \le q = \infty$. *Тогда* $\mathcal{E}^\Psi_{Q(N)}(\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{p\theta}, L_\infty) \asymp \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}}n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}$,
если $p < \infty$,

$$\mathcal{E}^\Psi_{Q(N)}(\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p\theta}, L_\infty) \asymp \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}}n^{(d-1)(1-\frac{1}{p})}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Темляков В.Н.** Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267, № 3. С. 314–317.
2. **Temlyakov V.N.** Approximation of periodic functions. New York: Nova Science Publishers, 1993. 419 p. (Comput. Math. Analysis Ser.)
3. **Андрианов А.В., Темляков В.Н.** О двух методах распространения свойств систем функций от одной переменной на их тензорное произведение // Тр. МИАН. 1997. Т. 219. С. 32–43.
4. **Динь Зунг** Приближение функций многих переменных на торе тригонометрическими полиномами // Мат. сб. 1986. Т. 131 (173), № 2 (10). С. 251–271.
5. **Пустовойтов Н.Н.** Ортопоперечники некоторых классов периодических функций двух переменных с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности // Изв. РАН. Сер. математическая. 2000. Т. 64, № 1. С. 123–144.
6. **Пустовойтов Н.Н.** Ортопоперечники классов многомерных периодических функций, мажоранта смешанных модулей непрерывности которых содержит как степенные, так и логарифмические множители // Anal. Math. 2008. Т. 34, № 3. С. 187–224.
7. **Базарханов Д.Б.** Приближение всплесками и поперечники Фурье классов периодических функций многих переменных. II // Anal. Math. 2012. Т. 38, №. 4. С. 249–289.
8. **Базарханов Д.Б.** Приближение всплесками и поперечники Фурье классов периодических функций многих переменных. I // Тр. МИАН. 2010. Т. 269. С. 8–30.
9. **Темляков В.Н.** Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Тр. МИАН. 1989. Т. 189. С. 138–168.
10. **Темляков В.Н.** Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН. 1986. Т. 178. С. 3–113.
11. **Лизоркин П.И., Никольский С.М.** Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. МИАН. 1989. Т. 187. С. 143–161.
12. **Бари Н.К., Стечкин С.Б.** Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. математического общества. 1956. Т. 5. С. 483–522.
13. **Пустовойтов Н.Н.** Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. Math. 1994. Т. 20, № 1. С. 35–48.
14. **Yongsheng S., Heping W.** Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness// Proc. Steklov Inst. Math. 1997. Vol. 219. P. 350–371.
15. **Stasyuk S.A., Fedunyk O.V.** Approximation characteristics of the classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic functions of many variables // Ukr. Math. J. 2006. Vol. 58, no. 5. P. 779–793.
16. **Пустовойтов Н.Н.** Приближение многомерных функций с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности // Мат. заметки. 1999. Т. 65, № 1. С. 107–117.
17. **Meyer Y.** Wavelets and operators. New York; Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992. 223 p. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics; vol. 37.)
18. **Стасюк С.А.** Наилучшие приближения периодических функций многих переменных из классов $B^{\Omega}_{p\,\theta}$// Мат. заметки. 2010. Т. 87, № 1. С. 108–121.
19. **Стасюк С.А.** Приближение суммами Фурье и колмогоровские поперечники классов $MB^{\Omega}_{p\,\theta}$ периодических функций нескольких переменных// Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 1. С. 247–257.

Балгимбаева Шолпан Албановна
канд. физ.-мат. наук, доцент
ведущий научн. сотрудник
Институт математики и математического моделирования КН МОН РК
e-mail: balsholpan@yandex.ru; sc_s@mail.ru

Поступила 20.07.2015

Смирнов Тургай Игоревич
канд. физ.-мат. наук
ведущий научн. сотрудник
Институт математики и математического моделирования КН МОН РК