ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

ТРЕУГОЛЬНЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ С НОВЫМИ АППРОКСИМАТИВНЫМИ СВОЙСТВАМИ[1]

Н. В. Байдакова

Построен конечный элемент с новыми свойствами аппроксимации старших производных. Предлагается способ построения пространства конечных элементов в плоском случае, основанный на более ранних результатах Ю.Н.Субботина и результатах, полученных в данной статье. Результирующая кусочно полиномиальная функция обладает свойством непрерывности и новыми аппроксимационными свойствами.

Ключевые слова: многомерная интерполяция, метод конечных элементов, условие наибольшего угла, сплайны на триангуляциях.

N. V. Baidakova. A triangular finite element with new approximation properties.

A finite element with new properties of approximation of higher derivatives is constructed, and a method for the construction of a finite element space in the planar case is proposed. The method is based on Yu.N. Subbotin's earlier results as well as on the results obtained in this paper. The resulting piecewise polynomial function possesses the continuity property and new approximation properties.

Keywords: multidimensional interpolation, finite element method, maximum angle condition, splines on triangulations.

Введение

Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ имеет форму многоугольника, а функция f определена на Ω и принадлежит классу $W^{n+1}M$, т. е. f непрерывна на Ω вместе со всеми своими частными производными до порядка $n+1$ включительно, и все ее производные порядка $n+1$ ограничены по модулю константой M. Пусть имеется триангуляция области Ω и Δ — произвольный треугольник из триангуляции. Мы будем рассматривать задачу интерполяции функции f на Δ многочленом степени не выше n при $n \geq 3$. Обозначим через a_i $(i = 1, 2, 3)$ вершины треугольника Δ; через τ_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j)$ — единичные векторы, направленные от вершины a_i к вершине a_j; через n_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j)$ — единичные нормали к сторонам $[a_i, a_j]$; через α, β, θ — углы при вершинах a_1, a_2, a_3 соответственно; через H — диаметр треугольника. Пусть $\alpha \leq \beta \leq \theta$. Тогда $H = \|a_2 - a_1\|$. Через $D^s_{\xi_1 \ldots \xi_s}$ будем обозначать производную порядка s по направлениям произвольных единичных векторов $\xi_1, \ldots, \xi_s$.

Договоримся, что для величин φ_1 и φ_2, каждая из которых, вообще говоря, может зависеть от функции f, введенных выше геометрических характеристик H, α, β, θ треугольника Δ и точки $u \in \Delta$, имеет место отношение

$$\varphi_1 \overset{(\gtrsim)}{\lesssim} \varphi_2,$$

если существует число $C(n) > 0$, допускающее зависимость только от степени n интерполяционного многочлена, такое, что

$$\varphi_1 \overset{(\geq)}{\leq} C(n)\varphi_2.$$

Пусть $\mathcal{P}_n$ — множество многочленов степени не выше n по совокупности переменных (суммы степеней у мономов не превосходят n) таких, что все коэффициенты любого многочлена $P \in \mathcal{P}_n$ однозначно определяются тем, что он интерполирует значения функции f и, возможно, значения некоторых ее производных в выбранных точках треугольника Δ. Известно, что

[1]Работа выполнена за счет средств Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

для достаточно широкого множества $\mathcal{P}_n$ и любых единичных векторов $\xi_1, \ldots, \xi_s$ имеют место оценки (Ф. Сьярле и П. Равьяр, [1])

$$\|D^s_{\xi_1 \ldots \xi_s}(f - P)\|_{C(\Delta)} \lesssim MH^{n+1-s}\sin^{-s}\alpha, \quad 0 \le s \le n, \tag{0.1}$$

где $P \in \mathcal{P}_n$, $\|\cdot\|_{C(\Delta)}$ — равномерная норма на Δ.

Введем множество мультииндексов

$$I = \{(i,j,k)| \quad i,j,k \in \mathbb{Z}_+;\ i+j+k = n\}$$

и выделим следующее множество точек треугольника Δ:

$$Q = \{u_{ijk}\}_{(i,j,k)\in I} = \{u_{ijk}| \quad u_{ijk} = (i/n)a_1 + (j/n)a_2 + (k/n)a_3,\ (i,j,k) \in I\}.$$

Рассмотрим многочлен $\widetilde{P} \in \mathcal{P}_n$ такой, что

$$\forall\ u \in Q \quad \widetilde{P}(u) = f(u). \tag{0.2}$$

В [2] и [3] Ю. Н. Субботиным доказано, что для любых единичных векторов $\xi_1, \ldots, \xi_s$ имеют место оценки

$$\|D^s_{\xi_1 \ldots \xi_s}(f - \widetilde{P})\|_{C(\Delta)} \lesssim MH^{n+1-s}\sin^{-s}\theta, \quad 0 \le s \le n. \tag{0.3}$$

Отметим, что в работах [1] и [3] оценки типа (0.1) и (0.3) получены не только для плоского, но и для многомерных случаев (в частности, когда Δ является m-симплексом), однако мы остановимся на случае треугольника. Преимущество соотношения (0.3) перед (0.1) заключается в том, что использование оценок (0.1) требует наложения на триангуляцию “условия наименьшего угла”, т. е. требования ограничения снизу величин наименьших углов треугольников из триангуляции, в то время как наличие оценок (0.3) позволяет ограничиться более слабым условием отделенности от π наибольших углов треугольников. В данной работе предлагается сохранить те условия из (0.2), которые задаются в точках, принадлежащих сторонам треугольника Δ, и заменить оставшиеся на интерполяцию старших производных в точке a_2.

Рассмотрим множество

$$I_0 = \{(i,j,k) \in I| \quad i \cdot j \cdot k = 0\}$$

и соответствующее подмножество Q_0 множества Q (точки из Q, принадлежащие сторонам треугольника):

$$Q_0 = \{u_{ijk}\}_{(i,j,k)\in I_0} = \{u_{ijk}| \quad u_{ijk} = (i/n)a_1 + (j/n)a_2 + (k/n)a_3,\ (i,j,k) \in I_0\}.$$

Пусть многочлен P определяется следующими условиями:

$$P(u) = f(u) \tag{0.4}$$

для всех $u \in Q_0$ и

$$\frac{\partial^{i+j}P(a_2)}{\partial\tau^i_{12}\partial n^j_{12}} = \frac{\partial^{i+j}f(a_2)}{\partial\tau^i_{12}\partial n^j_{12}} \tag{0.5}$$

для всех $j = \overline{3,n}$, $i = \overline{0,n-j}$.

Множество всех многочленов степени не выше n, удовлетворяющих условию (0.4), обозначим через $\mathcal{P}_n[Q_0]$. Ясно, что $P, \widetilde{P} \in \mathcal{P}_n[Q_0] \subset \mathcal{P}_n$.

Поместим треугольник Δ в прямоугольную систему координат Oxy таким образом, что для некоторых положительных a, b, h координаты вершин будут записываться следующим образом: $a_1 = (a+b, 0)$, $a_2 = (0,0)$, $a_3 = (a,h)$ (см. рис. 1). Так как $\alpha \le \beta \le \gamma$, то $a \le b$, и имеет место равенство $H = a + b$ (очевидно также, что a, b, h являются некоторыми функциями величин H, α, β, θ, что следует учитывать при использовании отношения “$\lesssim$” или “$\gtrsim$”). В этом случае условия (0.5) принимают вид

$$\frac{\partial^{i+j}P(a_2)}{\partial x^i \partial y^j} = \frac{\partial^{i+j}f(a_2)}{\partial x^i \partial y^j},$$

где $j = \overline{3,n}$, $i = \overline{0,n-j}$.

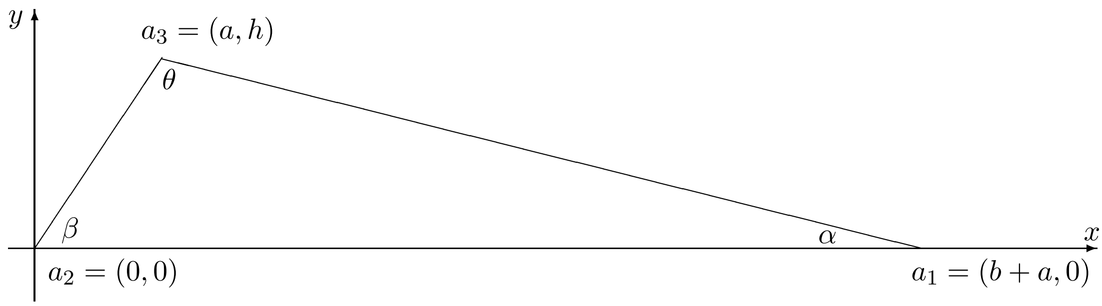

Рис. 1. Расположение треугольника Δ в системе координат Oxy.

Наша цель — доказать четыре теоремы, сформулированные ниже. Кроме того, в последнем разделе приводится описание способа построения пространства конечных элементов с новыми аппроксимационными свойствами. Данное пространство строится на основе результатов Ю. Н. Субботина и результатов, полученных в настоящей работе.

Теорема 1. *Пусть для $f \in W^{n+1}M$ многочлен $P \in \mathcal{P}_n$ определяется интерполяционными условиями* (0.4) *и* (0.5). *Тогда для любого $\beta_0 < \pi/2$, любого треугольника Δ, удовлетворяющего условию $\beta \le \beta_0$, и любого неотрицательного целого числа s такого, что $0 \le s \le n$, справедлива оценка*

$$\left\| \frac{\partial^{s-j}(f-P)}{\partial x^{s-j} \partial y^j} \right\|_{C(\Delta)} \le \begin{cases} C(n, \beta_0) M H^{n+1-s} \sin^{-j}\theta, & j = \overline{0, \min\{2, s\}}, \\ C(n, \beta_0) M H^{n+1-s}, & j = 3, \dots, s, \end{cases} \tag{0.6}$$

где $C(n, \beta_0)$ — неотрицательная величина, зависящая только от n и β_0.

Теорема 2. *Пусть для $f \in W^{n+1}M$ многочлен $P \in \mathcal{P}_n$ определяется интерполяционными условиями* (0.4) *и* (0.5). *Тогда для любого $\beta_0 < \pi/2$, любого треугольника Δ, удовлетворяющего условию $\beta \le \beta_0$, любого $s = 0, \dots, n$ и произвольных единичных векторов $\xi_1, \dots, \xi_s$ справедлива оценка*

$$\left\| D^s_{\xi_1 \dots \xi_s}(f-P) \right\|_{C(\Delta)} \le \begin{cases} C(n, \beta_0) M H^{n+1-s} \sin^{-s}\theta, & s = 0, 1, 2, \\ C(n, \beta_0) M H^{n+1-s} \sin^{-2}\theta, & s = 3, \dots, n, \end{cases} \tag{0.7}$$

где $C(n, \beta_0)$ — неотрицательная величина, зависящая только от n и β_0.

Вместо условий (0.5) можно использовать аналогичные условия в наибольшем угле

$$\frac{\partial^{i+j} P(a_3)}{\partial \tau_{31}^i \partial n_{31}^j} = \frac{\partial^{i+j} f(a_2)}{\partial \tau_{31}^i \partial n_{31}^j} \tag{0.8}$$

для всех $j = \overline{3, n}$, $i = \overline{0, n-j}$. В этом случае будут иметь место следующие теоремы.

Теорема 3. *Пусть для $f \in W^{n+1}M$ многочлен $P \in \mathcal{P}_n$ определяется интерполяционными условиями* (0.4) *и* (0.8). *Тогда для любого θ_0 такого, что $|\cos\theta_0| > 0$, любого треугольника Δ, удовлетворяющего условию $|\cos\theta| > |\cos\theta_0|$, и любого неотрицательного целого числа s такого, что $0 \le s \le n$, справедлива оценка*

$$\left\| \frac{\partial^{s-j}(f-P)}{\partial x^{s-j} \partial y^j} \right\|_{C(\Delta)} \le \begin{cases} C(n, \theta_0) M H^{n+1-s} \sin^{-j}\theta, & j = \overline{0, \min\{2, s\}}, \\ C(n, \theta_0) M H^{n+1-s}, & j = 3, \dots, s, \end{cases} \tag{0.9}$$

где $C(n, \theta_0)$ — неотрицательная величина, зависящая только от n и θ_0.

Теорема 4. *Пусть для $f \in W^{n+1}M$ многочлен $P \in \mathcal{P}_n$ определяется интерполяционными условиями* (0.4) *и* (0.8). *Тогда для любого θ_0 такого, что $|\cos\theta_0| > 0$, любого треугольника Δ, удовлетворяющего условию $|\cos\theta| > |\cos\theta_0|$, любого $s = 0,\dots,n$ и произвольных единичных векторов $\xi_1,\dots,\xi_s$ справедлива оценка*

$$\left\|D^s_{\xi_1\dots\xi_s}(f-P)\right\|_{C(\Delta)} \le \begin{cases} C(n,\theta_0)MH^{n+1-s}\sin^{-s}\theta, & s=0,1,2,\\ C(n,\theta_0)MH^{n+1-s}\sin^{-2}\theta, & s=3,\dots,n, \end{cases} \tag{0.10}$$

где $C(n,\theta_0)$ — неотрицательная величина, зависящая только от n и θ_0.

З а м е ч а н и е 1. Теоремы 2 и 4 являются тривиальными следствиями теорем 1 и 3 соответственно и приводятся здесь лишь по той причине, что запись оценок в виде (0.7) и (0.10) является более традиционной по сравнению с (0.6) и (0.9).

З а м е ч а н и е 2. Так как $\sin\theta \lesssim \sin\beta \lesssim \sin\theta$, то в оценках (0.3), (0.6), (0.7), (0.9), (0.10) вместо $\sin\theta$ можно писать $\sin\beta$, что не влияет на точность оценок.

З а м е ч а н и е 3. Вопрос оптимальности найденных условий интерполяции и полученных оценок на классе $W^{n+1}M$ остается открытым. В [4] для функции из $W^{n+1}M$ получены оценки снизу для широкого класса конечных элементов, обеспечивающих определенную гладкость или непрерывность результирующего сплайна на триангуляции. В случае непрерывности в оценках снизу в знаменателях присутствует синус наибольшего (или среднего) угла в первой степени. В полученных здесь оценках сверху в знаменателях оценок аппроксимации производных высоких порядков может присутствовать квадрат синуса наибольшего (или среднего) угла, в то время как рассматриваемые условия интерполяции обеспечивают непрерывность сплайна на Ω.

Обзоры, связанные с “условием наибольшего угла” в методе конечных элементов, можно найти, например, в [4; 5].

1. Подробнее об оценках Ю. Н. Субботина

Наряду с оценками (0.3) в [3, лемма 4] для многочлена $\widetilde{P}$ доказан следующий факт. Для одного из условий

$$\xi_k \in \{\tau_{21},\tau_{23}\} \quad \text{для всех} \quad k=\overline{1,s} \tag{1.1}$$

или

$$\xi_k \in \{\tau_{31},\tau_{32}\} \quad \text{для всех} \quad k=\overline{1,s} \tag{1.2}$$

для любого $s=0,\dots,n$ имеет место соотношение

$$\left\|D^s_{\xi_1\dots\xi_s}(f-\widetilde{P})\right\|_{C(\Delta)} \lesssim MH^{n+1-s}. \tag{1.3}$$

Способ выбора условия (1.1) или (1.2) указан в [3], но для нас он не будет иметь значения. Покажем, что это, в частности, означает, что

$$\left\|\frac{\partial^s(f-\widetilde{P})}{\partial x^{s-i}\partial y^i}\right\|_{C(\Delta)} \lesssim MH^{n+1-s}\sin^{-i}\beta \tag{1.4}$$

для $i=0,\dots,s$; $s=0,\dots,n$.

Рассмотрим сначала ситуацию, когда (1.3) выполняется для случая (1.1). Рассмотрим произвольное $s\in\{0,\dots,n\}$. Для $i=0$ оценка (1.4) совпадает с (1.3) при $\xi_1=\dots=\xi_s=\tau_{21}$. Пусть теперь $1\le j\le s$, и неравенство (1.4) имеет место для $i=0,\dots,j-1$. Тогда в (1.3) возьмем $\xi_1=\dots=\xi_{s-j+1}=\tau_{21}$, $\xi_{s-j+1}=\dots=\xi_s=\tau_{23}$ и представим s-ю производную по направлениям τ_{21} и τ_{23} через сумму частных производных

$$D^s_{\xi_1\dots\xi_s}(f-\widetilde{P}) = \sum_{k=0}^{j} C_j^k \frac{\partial^s(f-\widetilde{P})}{\partial x^{s-k}\partial y^k}\cos^{j-k}\beta\sin^k\beta,$$

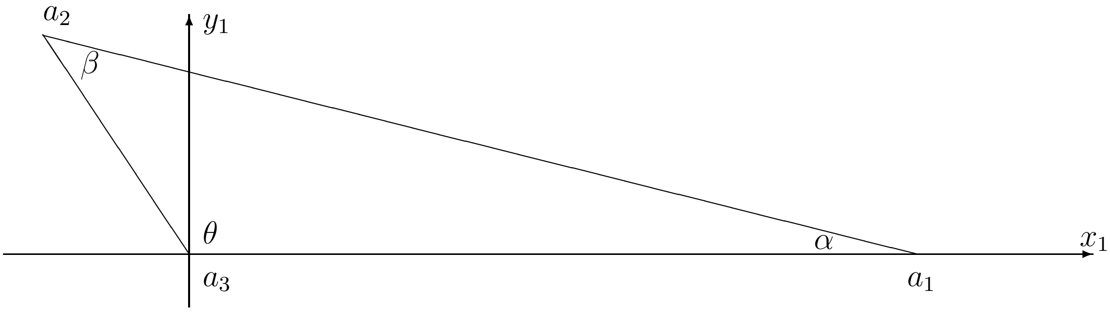

Рис. 2. Расположение треугольника Δ в системе координат Ox_1y_1.

откуда следует оценка

$$\Big\|\frac{\partial^s(f-\widetilde{P})}{\partial x^{s-j}\partial y^j}\sin^j\beta\Big\|_{C(\Delta)}=\Big\|D^s_{\xi_1\ldots\xi_s}(f-\widetilde{P})-\sum_{k=0}^{j-1}C_j^k\frac{\partial^s(f-\widetilde{P})}{\partial x^{s-k}\partial y^k}\cos^{j-k}\beta\sin^k\beta\Big\|_{C(\Delta)}$$

$$\lesssim\big\|D^s_{\xi_1\ldots\xi_s}(f-\widetilde{P})\big\|_{C(\Delta)}+\sum_{k=0}^{j-1}C_j^k\Big\|\frac{\partial^s(f-\widetilde{P})}{\partial x^{s-k}\partial y^k}\cos^{j-k}\beta\sin^k\beta\Big\|_{C(\Delta)}$$

$$\lesssim MH^{n+1-s}+\sum_{k=0}^{j-1}C_j^kMH^{n+1-s}\sin^{-k}\beta\cos^{j-k}\beta\sin^k\beta\lesssim MH^{n+1-s},$$

т. е. (1.4) доказано.

В ситуации, когда (1.3) выполняется при (1.2), введем вспомогательную систему координат Ox_1y_1 таким образом, чтобы точка a_3 совпадала с началом координат, вектор τ_{31} был сонаправлен с осью Ox_1 и треугольник Δ для определенности находился в верхней полуплоскости (см. рис. 2). Тогда аналогично уже рассмотренному случаю получаем оценки

$$\Big\|\frac{\partial^s(f-\widetilde{P})}{\partial x^{s-i}\partial y^i}\Big\|_{C(\Delta)}\lesssim MH^{n+1-s}\sin^{-i}\theta\lesssim MH^{n+1-s}\sin^{-i}\beta$$

для $i=0,\ldots,s$; $s=0,\ldots,n$. Далее, поскольку $\dfrac{\partial}{\partial\tau_{21}}=\dfrac{\partial}{\partial x_1}\cos\alpha-\dfrac{\partial}{\partial y_1}\sin\alpha$, $\dfrac{\partial}{\partial\tau_{23}}=-\dfrac{\partial}{\partial x_1}\cos\theta-\dfrac{\partial}{\partial y_1}\sin\theta$ и $\sin\beta\lesssim\sin\theta\lesssim\sin\beta$, можем утверждать, что (1.3) имеет место также при (1.1). Таким образом, мы оказываемся в условиях уже рассмотренного случая.

З а м е ч а н и е 4. Приведенные выше рассуждения означают также, что если соотношение (1.3) имеет место при одном из условий (1.1) или (1.2), то оно имеет место и при другом из этих условий (нами показано, что из справедливости (1.3) при (1.2) следует справедливость (1.3) при (1.1); обратное утверждение доказывается аналогично).

2. Доказательство теорем 1 и 2

Рассмотрим многочлен $R\in\mathcal{P}_n$. Введем обозначение

$$e[R](x,y)=f(x,y)-R(x,y).$$

Используя формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме Коши, получим следующее разложение для всех $(x,y)\in\Delta$:

$$\frac{\partial^s e[R](x,y)}{\partial x^{s-j}\partial y^j}=\sum_{i=j}^{n-s+j}\frac{1}{(i-j)!}y^{i-j}\sum_{k=0}^{n-s+j-i}\frac{\partial^{s-j+i+k}e[R](0,0)}{\partial x^{s-j+k}\partial y^i}\,\frac{x^k}{k!}$$

$$+\sum_{i=j}^{n-s+j}\frac{1}{(i-j)!}y^{i-j}\int\limits_0^x\frac{(x-v)^{n-s+j-i}}{(n-s+j-i)!}\;\frac{\partial^{n+1}e[R](v,0)}{\partial v^{n+1-i}\partial y^i}\;dv$$

$$+\int\limits_0^y\frac{(y-t)^{n-s}}{(n-s)!}\;\frac{\partial^{n+1}f(x,t)}{\partial x^{s-j}\partial t^{n+1-s+j}}\;dt\,. \tag{2.1}$$

Чтобы доказать (0.6), достаточно для многочлена $R=P$, определяемого условиями (0.4) и (0.5), оценить $\partial^s e[P](0,0)/\left(\partial x^{s-j}\partial y^j\right)$, $0\le s\le n$, $0\le j\le s$.

Лемма. *В условиях теоремы 1 найдется неотрицательная величина $K(n,\beta_0)$, зависящая только от n и β_0, такая, что для любого $s=1,\dots,n$ имеют место следующие соотношения:*

$$\Big|\frac{\partial^s e[P](0,0)}{\partial x^{s-j}\partial y^j}\Big|\le K(n,\beta_0)MH^{n+1-s}\sin^{-j}\beta,\quad \textit{если}\quad j=\overline{0,\min\{2,s\}}; \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial^s e[P](0,0)}{\partial x^{s-j}\partial y^j}=0,\quad \textit{если}\quad s\ge 3\quad \textit{и}\quad j=3,\dots,s. \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенства (2.3) следуют из (0.5). Остается доказать (2.2). Пусть s — произвольное натуральное число, удовлетворяющее неравенству $1\le s\le n$. Напомним, что $a_2=(0,0)$. Рассматривая $e[P](x,0)$ на отрезке $[a_2,a_1]$ и используя формулы для оценки ошибки интерполяции в одномерном случае (см., например, [6]), получаем

$$\frac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial x^s}=C_1(s)\frac{\partial^{n+1}f(\zeta_{21}^s)}{\partial x^{n+1}}H^{n+1-s}, \tag{2.4}$$

где $C_1(s)$ — величина, зависящая только от s и допускающая оценку сверху величиной, зависящей от n; ζ_{21}^s — точка между a_2 и a_1. Таким образом,

$$\Big|\frac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial x^s}\Big|\lesssim MH^{n+1-s},$$

т. е. (2.2) доказано для $j=0$ при любом выбранном нами $s=1,\dots,n$. Если $s\ge 2$, то для оценки оставшихся двух производных (при $j=1,2$) составим систему уравнений; при этом воспользуемся методом математической индукции.

Пусть (2.2) доказано для $s=r+1,\dots,n$, где $r\in\{2,\dots,n-1\}$. Тогда, принимая во внимание (2.1), можем утверждать, что формула (0.6) из теоремы 1 имеет место для всех $s=r+1,\dots,n$. Рассмотрим произвольное $s=r\in\{2,\dots,n-1\}$ (что соответствует шагу индукции) или $s=r=n$ (база индукции). Поскольку шаг и база индукции доказываются почти одинаково, мы будем рассматривать эти случаи одновременно, лишь иногда при необходимости отдельно останавливаясь на обсуждении случая $s=r=n$. Возьмем сужение функции $e[P]$ на отрезок $[a_2,a_3]$. С одной стороны, применяя известные результаты для оценок ошибок интерполяции в одномерном случае, получим равенство

$$\frac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial\tau_{23}^s}=C_2(s)\frac{\partial^{n+1}f(\zeta_{23}^s)}{\partial\tau_{23}^{n+1}}\left(a^2+h^2\right)^{(n+1-s)/2}, \tag{2.5}$$

где $C_2(s)$ — величина, зависящая только от s и допускающая оценку сверху величиной, зависящей от n; ζ_{23}^s — точка между a_2 и a_3. С другой стороны, производную по направлению τ_{23} можно разложить в сумму частных производных, принимая во внимание равенства (2.3):

$$\frac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial\tau_{23}^s}=\sum_{k=0}^{s}C_s^k\frac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial x^{s-k}\partial y^k}\cos^{s-k}\beta\sin^k\beta$$

$$=\frac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial x^s}\cos^s\beta+s\frac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial x^{s-1}\partial y}\cos^{s-1}\beta\sin\beta+\frac{s(s-1)}{2}\frac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial x^{s-2}\partial y^2}\cos^{s-2}\beta\sin^2\beta. \tag{2.6}$$

Объединяя (2.4)–(2.6), приходим к равенству

$$s\frac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial x^{s-1}\partial y}\cos^{s-1}\beta\sin\beta+\frac{s(s-1)}{2}\frac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial x^{s-2}\partial y^2}\cos^{s-2}\beta\sin^2\beta=m_1(s), \tag{2.7}$$

где

$$|m_1(s)|=\Big|C_2(s)\frac{\partial^{n+1}f(\zeta_{23}^s)}{\partial\tau_{23}^{n+1}}\left(a^2+h^2\right)^{(n+1-s)/2}-C_1(s)\frac{\partial^{n+1}f(\zeta_{21}^s)}{\partial x^{n+1}}H^{n+1-s}\cos^s\beta\Big|$$

$$\lesssim M\left(a^2+h^2\right)^{(n+1-s)/2}+MH^{n+1-s}\cos^s\beta.$$

Для получения второго уравнения системы рассмотрим произвольный многочлен $R\in\mathcal{P}_n[Q_0]$, т. е. многочлен, удовлетворяющий условиям (0.4). В частности, это могут быть $\widetilde{P}$ или P. Рассмотрим сужение функции $\partial^s e[R]/\left(\partial\tau_{31}^s\right)$ на отрезок $[a_2,a_3]$ и разложим значение этой функции в точке a_2 по формуле Тейлора в точке a_3. В результате имеем равенство

$$\frac{\partial^s e[R](a_2)}{\partial\tau_{31}^s}=\frac{\partial^s e[R](a_3)}{\partial\tau_{31}^s}+\sum_{k=1}^{n-s}\frac{(-1)^k}{k!}\;\frac{\partial^{s+k}e[R](a_3)}{\partial\tau_{31}^s\partial\tau_{23}^k}\left(a^2+h^2\right)^{k/2}$$

$$+\frac{(-1)^{n+1-s}}{(n+1-s)!}\;\frac{\partial^{n+1}f\left(\eta_{23}^s\right)}{\partial\tau_{31}^s\partial\tau_{23}^{n+1-s}}\left(a^2+h^2\right)^{(n+1-s)/2} \tag{2.8}$$

(если $s=n$, то в правой части этого равенства присутствуют только первое и последнее слагаемые, т. е. сумму $\sum_{k=1}^{0}$ считаем равной нулю). С другой стороны, производную по направлению τ_{31} можно разложить в сумму частных производных

$$\frac{\partial^s e[R](a_2)}{\partial\tau_{31}^s}=\sum_{k=0}^{s}C_s^k\frac{\partial^s e[R](a_2)}{\partial x^{s-k}\partial y^k}\cos^{s-k}\alpha(-\sin\alpha)^k. \tag{2.9}$$

Из (2.8) и (2.9) приходим к равенству

$$-s\frac{\partial^s e[R](a_2)}{\partial x^{s-1}\partial y}\cos^{s-1}\alpha\sin\alpha+\frac{s(s-1)}{2}\frac{\partial^s e[R](a_2)}{\partial x^{s-2}\partial y^2}\cos^{s-2}\alpha\sin^2\alpha=\mu_1^s[R]+\mu_2^s[R], \tag{2.10}$$

где

$$\mu_1^s[R]=\sum_{k=1}^{n-s}\frac{(-1)^k}{k!}\;\frac{\partial^{s+k}e[R](a_3)}{\partial\tau_{31}^s\partial\tau_{23}^k}\left(a^2+h^2\right)^{k/2}+\frac{(-1)^{n+1-s}}{(n+1-s)!}\;\frac{\partial^{n+1}f\left(\eta_{23}^s\right)}{\partial\tau_{31}^s\partial\tau_{23}^{n+1-s}}\left(a^2+h^2\right)^{(n+1-s)/2}$$

$$-\sum_{k=3}^{s}C_s^k\frac{\partial^s e[R](a_2)}{\partial x^{s-k}\partial y^k}\cos^{s-k}\alpha(-\sin\alpha)^k,$$

$$\mu_2^s[R]=\frac{\partial^s e[R](a_3)}{\partial\tau_{31}^s}-\frac{\partial^s e[R](a_2)}{\partial x^s}\cos^s\alpha.$$

Отметим, что $\mu_2^s[R]$ зависит только от условий интерполяции на сторонах $[a_3,a_1]$ и $[a_2,a_1]$, т. е. от части условий (0.4). Таким образом, $\mu_2^s[R]=\mu_2^s[\widetilde{P}]=\mu_2^s[P]$. Следовательно, для оценки этой величины можем использовать результат Ю. Н. Субботина (1.3), (1.4) и равенство (2.10)

$$\left|\mu_2^s[R]\right|=\left|\mu_2^s[\widetilde{P}]\right|=\Big|-s\frac{\partial^s e[\widetilde{P}](a_2)}{\partial x^{s-1}\partial y}\cos^{s-1}\alpha\sin\alpha+\frac{s(s-1)}{2}\frac{\partial^s e[\widetilde{P}](a_2)}{\partial x^{s-2}\partial y^2}\cos^{s-2}\alpha\sin^2\alpha-\mu_1^s[\widetilde{P}]\Big|$$

$$=\Big|\sum_{k=1}^{s}C_s^k\frac{\partial^s e[\widetilde{P}](a_2)}{\partial x^{s-k}\partial y^k}\cos^{s-k}\alpha(-\sin\alpha)^k-\sum_{k=1}^{n-s}\frac{(-1)^k}{k!}\;\frac{\partial^{s+k}e[\widetilde{P}](a_3)}{\partial\tau_{31}^s\partial\tau_{23}^k}\left(a^2+h^2\right)^{k/2}$$

$$- \frac{(-1)^{n+1-s}}{(n+1-s)!} \, \frac{\partial^{n+1} f\left(\eta_{23}^{s}\right)}{\partial \tau_{31}^{s} \partial \tau_{23}^{n+1-s}} \left(a^2+h^2\right)^{(n+1-s)/2} \Big|$$

$$\lesssim \sum_{k=1}^{s} C_s^k M H^{n+1-s} \frac{\cos^{s-k}\alpha \sin^k \alpha}{\sin^k \beta} + \sum_{k=1}^{n-s} M H^{n+1-s-k} \left(a^2+h^2\right)^{k/2} + M \left(a^2+h^2\right)^{(n+1-s)/2}$$

$$\lesssim M H^{n-s} \left(a^2+h^2\right)^{1/2}.$$

Подставим $R = P$ в (2.10) и с учетом условий (0.5) получим

$$-s \frac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial x^{s-1} \partial y} \cos^{s-1}\alpha \sin\alpha + \frac{s(s-1)}{2} \frac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial x^{s-2} \partial y^2} \cos^{s-2}\alpha \sin^2\alpha = \mu_1^s[P] + \mu_2^s[P], \qquad (2.11)$$

где

$$|\mu_2^s[P]| = |\mu_2^s[R]| \lesssim M H^{n-s} \left(a^2+h^2\right)^{1/2};$$

$$\mu_1^s[P] = \sum_{k=1}^{n-s} \frac{(-1)^k}{k!} \, \frac{\partial^{s+k} e[P](a_3)}{\partial \tau_{31}^{s} \partial \tau_{23}^{k}} \left(a^2+h^2\right)^{k/2} + \frac{(-1)^{n+1-s}}{(n+1-s)!} \, \frac{\partial^{n+1} f\left(\eta_{23}^{s}\right)}{\partial \tau_{31}^{s} \partial \tau_{23}^{n+1-s}} \left(a^2+h^2\right)^{(n+1-s)/2}$$

$$- \sum_{k=3}^{s} C_s^k \frac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial x^{s-k} \partial y^k} \cos^{s-k}\alpha (-\sin\alpha)^k$$

$$= \sum_{k=1}^{n-s} \frac{(-1)^k}{k!} \, \frac{\partial^{s+k} e[P](a_3)}{\partial \tau_{31}^{s} \partial \tau_{23}^{k}} \left(a^2+h^2\right)^{k/2} + \frac{(-1)^{n+1-s}}{(n+1-s)!} \, \frac{\partial^{n+1} f\left(\eta_{23}^{s}\right)}{\partial \tau_{31}^{s} \partial \tau_{23}^{n+1-s}} \left(a^2+h^2\right)^{(n+1-s)/2}. \qquad (2.12)$$

Если $s = n$, то правая часть равенства (2.12) состоит из одного слагаемого, и тогда

$$\left|\mu_1^s[P]|_{s=n}\right| = |\mu_1^n[P]| = \Big| - \frac{\partial^{n+1} f\left(\eta_{23}^{n}\right)}{\partial \tau_{31}^{n} \partial \tau_{23}} \left(a^2+h^2\right)^{1/2} \Big| \lesssim M \left(a^2+h^2\right)^{1/2}.$$

Если $s = r \in \{2, \ldots, n-1\}$, то правая часть равенства (2.12) содержит также сумму по k. В силу предположения индукции теорема 1 имеет место при всех $s = r+1, \ldots, n$, и тогда этот факт и то, что

$$\Big| \frac{\partial^{s+k} e[P](a_3)}{\partial \tau_{31}^{s} \partial \tau_{23}^{k}} \Big| \lesssim \Big| \frac{\partial^{s+k} e[P](a_3)}{\partial x^{s_1+k_1} \partial y^{s_2+k_2}} \cos^{s_1}\alpha \cos^{k_1}\beta (-\sin\alpha)^{s_2} \sin^{k_2}\beta \Big|,$$

где $s_1 + s_2 = s$, $k_1 + k_2 = k$, приводит к оценке

$$\left| \frac{\partial^{s+k} e[P](a_3)}{\partial \tau_{31}^{s} \partial \tau_{23}^{k}} \right| \lesssim M H^{n+1-s-k}.$$

Таким образом,

$$|\mu_1^s[P]| \lesssim M H^{n-s} \left(a^2+h^2\right)^{1/2}.$$

Объединяя (2.7) и (2.11), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} s \dfrac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial x^{s-1} \partial y} \cos^{s-1}\beta \sin\beta + \dfrac{s(s-1)}{2} \dfrac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial x^{s-2} \partial y^2} \cos^{s-2}\beta \sin^2\beta = m_1(s), \\[2ex] -s \dfrac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial x^{s-1} \partial y} \cos^{s-1}\alpha \sin\alpha + \dfrac{s(s-1)}{2} \dfrac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial x^{s-2} \partial y^2} \cos^{s-2}\alpha \sin^2\alpha = m_2(s), \end{cases}$$

где

$$|m_1(s)| \lesssim M \left(a^2+h^2\right)^{(n+1-s)/2} + M H^{n+1-s} \cos^s \beta,$$

$$|m_2(s)| = |\mu_1^s[P] + \mu_2^s[P]| \lesssim M H^{n-s} \left(a^2+h^2\right)^{1/2}.$$

Для решения системы используем формулы Крамера. Обозначим через A основную матрицу системы. Вычислим определитель основной матрицы

$$\det A = \frac{s^2(s-1)}{2}\cos^{s-2}\beta\sin\beta\cos^{s-2}\alpha\sin\alpha\begin{vmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$$

$$= \frac{s^2(s-1)}{2}\cos^{s-2}\beta\sin\beta\cos^{s-2}\alpha\sin\alpha\sin(\alpha+\beta).$$

Тогда, принимая во внимание то, что $\cos\alpha \gtrsim 1$, $\sin\beta = h/\left(a^2+h^2\right)^{1/2}$, $h/H \lesssim \sin\alpha = h/b \lesssim h/H$, $\sin\beta \lesssim \sin(\alpha+\beta) = \sin\theta \lesssim \sin\beta$, получаем

$$\left|\frac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial x^{s-1}\partial y}\right| \lesssim \frac{|m_1(s)|\cos^{s-2}\alpha\sin^2\alpha + |m_2(s)|\cos^{s-2}\beta\sin^2\beta}{\cos^{s-2}\beta\sin\beta\cos^{s-2}\alpha\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{|m_1(s)|\sin\alpha}{\cos^{s-2}\beta\sin\beta\sin(\alpha+\beta)} + \frac{|m_2(s)|\sin\beta}{\cos^{s-2}\alpha\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)} \lesssim \frac{|m_1(s)|\sin\alpha}{\cos^{s-2}\beta\sin^2\beta} + \frac{|m_2(s)|}{\cos^{s-2}\alpha\sin\alpha}$$

$$\lesssim \frac{M\left(a^2+h^2\right)^{(n+1-s)/2}\sin\alpha}{\cos^{s-2}\beta\sin^2\beta} + \frac{MH^{n+1-s}\cos^s\beta\sin\alpha}{\cos^{s-2}\beta\sin^2\beta} + \frac{MH^{n-s}\left(a^2+h^2\right)^{1/2}}{\cos^{s-2}\alpha\sin\alpha}$$

$$\lesssim MH^{n+1-s}\frac{\left(a^2+h^2\right)^{(n+1-s)/2}}{H^{n+1-s}}\frac{\sin\alpha}{\cos^{s-2}\beta\sin^2\beta} + \frac{MH^{n+1-s}}{\sin\beta}\cos^2\beta\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + \frac{MH^{n-s}\left(a^2+h^2\right)^{1/2}}{\sin\alpha}$$

$$\lesssim MH^{n+1-s}\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^{n+1-s}\frac{\sin\alpha}{\cos^{s-2}\beta\sin^2\beta} + \frac{MH^{n+1-s}}{\sin\beta} + \frac{MH^{n+1-s}\left(a^2+h^2\right)^{1/2}}{h}$$

$$\lesssim MH^{n+1-s}\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\frac{\sin\alpha}{\cos^{s-2}\beta\sin^2\beta} + \frac{MH^{n+1-s}}{\sin\beta} + \frac{MH^{n+1-s}}{\sin\beta}$$

$$\lesssim \frac{MH^{n+1-s}}{\cos^{s-2}\beta\sin\beta}\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} + \frac{MH^{n+1-s}}{\sin\beta}\ . \tag{2.13}$$

Так как $\sin\alpha \le \sin(2\beta)$ (это следует из того, что $\sin\alpha - \sin(2\beta) = \sin(\theta+\beta) - \sin(2\beta) = 2\sin\left((\theta-\beta)/2\right)\cos((\theta+\beta)/2+\beta) = 2\sin((\theta-\beta)/2)\cos((\pi-\alpha)/2+\beta) = -2\sin((\theta-\beta)/2)\sin(\beta-\alpha/2) \le 0$) и $\beta \le \beta_0$, то (2.13) приводит к оценке

$$\left|\frac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial x^{s-1}\partial y}\right| \lesssim \frac{MH^{n+1-s}}{\cos^{s-4}\beta\sin\beta}\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2(2\beta)} + \frac{MH^{n+1-s}}{\sin\beta} \lesssim \frac{MH^{n+1-s}}{\cos^{n-4}\beta\sin\beta}$$

$$\le \left(\frac{1}{\cos\beta_0}\right)^{n-4}\frac{MH^{n+1-s}}{\sin\beta}\ . \tag{2.14}$$

Аналогично оцениваем оставшуюся производную

$$\left|\frac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial x^{s-2}\partial y^2}\right| \lesssim \frac{|m_1(s)|\cos^{s-1}\alpha\sin\alpha + |m_2(s)|\cos^{s-1}\beta\sin\beta}{\cos^{s-2}\beta\sin\beta\cos^{s-2}\alpha\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{|m_1(s)|\cos\alpha}{\cos^{s-2}\beta\sin\beta\sin(\alpha+\beta)} + \frac{|m_2(s)|\cos\beta}{\cos^{s-2}\alpha\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)} \lesssim \frac{|m_1(s)|}{\cos^{s-2}\beta\sin^2\beta} + \frac{|m_2(s)|\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\lesssim \frac{M\left(a^2+h^2\right)^{(n+1-s)/2}}{\cos^{s-2}\beta\sin^2\beta} + \frac{MH^{n+1-s}\cos^s\beta}{\cos^{s-2}\beta\sin^2\beta} + \frac{MH^{n-s}\left(a^2+h^2\right)^{1/2}\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\lesssim MH^{n+1-s}\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^{n+1-s}\frac{1}{\cos^{s-2}\beta\sin^2\beta} + MH^{n+1-s}\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta} + MH^{n+1-s}\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\frac{\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\lesssim \frac{MH^{n+1-s}}{\cos^{s-2}\beta\sin^2\beta}\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + \frac{MH^{n+1-s}}{\sin^2\beta} + \frac{MH^{n+1-s}}{\sin^2\beta}\ . \tag{2.15}$$

Окончательно с учетом того, что $\sin\alpha \le \sin(2\beta)$ и $\beta \le \beta_0$, неравенство (2.15) дает оценку

$$\left|\frac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial x^{s-2}\partial y^2}\right| \lesssim \frac{MH^{n+1-s}}{\cos^{s-3}\beta\sin^2\beta}\,\frac{\sin\alpha}{\sin(2\beta)} + \frac{MH^{n+1-s}}{\sin^2\beta} \lesssim \Big(\frac{1}{\cos\beta_0}\Big)^{n-3}\frac{MH^{n+1-s}}{\sin^2\beta}\,. \qquad (2.16)$$

Для завершения доказательства леммы осталось доказать (2.2) при $s = 1$.

В случае $s = 1$ нет необходимости составлять систему уравнений. Достаточно рассмотреть сужение функции $e[P]$ на сторону $[a_2, a_3]$ и использовать оценки ошибки аппроксимации производной функции производной интерполяционного многочлена, с одной стороны, и разложение производной по направлению в сумму частных производных — с другой. Таким образом,

$$\frac{\partial e[P](a_2)}{\partial \tau_{23}} = C_2(1)\frac{\partial^{n+1} f(\zeta^1_{23})}{\partial \tau_{23}^{n+1}}\left(a^2+h^2\right)^{n/2} = \frac{\partial e[P](a_2)}{\partial x}\cos\beta + \frac{\partial e[P](a_2)}{\partial y}\sin\beta,$$

где $C_2(1)$ — величина, допускающая оценку сверху величиной, зависящей от n; ζ^1_{23} — точка между a_2 и a_3. Принимая во внимание то, что (2.2) доказано при всех s для $j = 0$, получаем

$$\left|\frac{\partial e[P](a_2)}{\partial y}\right| \lesssim \frac{MH^n}{\sin\beta}\,.$$

Лемма доказана.

Для окончательного доказательства теоремы 1 применяем разложение (2.1) и лемму. □

Теорема 2 является тривиальным следствием теоремы 1 и вытекает из того, что производная любого порядка функции по любым направлениям может быть разложена в сумму частных производных того же порядка с коэффициентами, модули которых могут быть оценены сверху величинами, зависящими только от n.

Следствие. *Если $n = 3$, то в формулировках теорем 1 и 2 можно исключить ограничения на угол β и зависимость величины $C(n, \beta_0)$ от β_0.*

Доказательство следует из (2.14), (2.16) и разложения (2.1).

3. Доказательство теорем 3 и 4

Теорема 3 доказывается аналогично теореме 1. Вводится прямоугольная система координат Ox_1y_1 так, чтобы точка a_3 совпадала с началом координат, точка a_1 принадлежала оси Ox_1, точка a_2 находилась в верхней полуплоскости (см. рис. 2). Почти полностью повторяется доказательство леммы с заменой угла β на θ, переменных x и y — на x_1 и y_1 соответственно. Исключением является то, что не доказываются оценки вида (2.14) и (2.16). Доказательство останавливается на оценках вида (2.13) и (2.15), откуда для любого $s = 2, \dots, n$ следуют неравенства

$$\left|\frac{\partial^s e[P](a_3)}{\partial x_1^{s-1}\partial y_1}\right| \lesssim \Big(\frac{1}{\cos\beta_0}\Big)^{n-2}\frac{MH}{\sin\beta}\,, \qquad \left|\frac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial x_1^{s-2}\partial y_1^2}\right| \lesssim \Big(\frac{1}{\cos\beta_0}\Big)^{n-2}\frac{MH}{\sin^2\beta}\,.$$

Прочая часть доказательства леммы остается без изменений. □

Теорема 4 является следствием теоремы 3.

4. Построение пространства конечных элементов

Пусть Δ — произвольный треугольник из триангуляции области Ω, β — средний угол этого треугольника. Очевидно, $0 \le \beta \le \pi/2$. Представим отрезок $[0, \pi/2]$ в виде объединения двух отрезков. Например, $[0, \pi/2] = [0, \pi/3] \cup [\pi/3, \pi/2]$.

Если $\beta < \pi/3$, то при построении конечного элемента выберем многочлен P, задаваемый условиями (0.4), (0.5), для которого имеют место оценки (0.6) и (0.7). В частности, для любых единичных векторов $\xi_1, \ldots, \xi_s$ и $0 \le s \le n$ будет

$$\left\| D^s_{\xi_1 \ldots \xi_s}(f - P) \right\|_{C(\Delta)} \lesssim MH^{n+1-s} (\sin\theta)^{-\min\{s,2\}}.$$

Если $\beta \ge \pi/3$, то выберем многочлен $\widetilde{P}$, задаваемый условиями (0.2). В силу (0.3) и существующего ограничения на угол β для любых единичных векторов $\xi_1, \ldots, \xi_s$ и $0 \le s \le n$ имеют место оценки

$$\left\| D^s_{\xi_1 \ldots \xi_s}(f - \widetilde{P}) \right\|_{C(\Delta)} \lesssim MH^{n+1-s} \sin^{-s}\theta \lesssim MH^{n+1-s} \sin^{-s}\beta \lesssim MH^{n+1-s}.$$

Так как в определении многочлена P и многочлена $\widetilde{P}$ участвуют условия (0.4), то результирующий сплайн на Ω будет непрерывной функцией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ciarlet P.G., Raviart P.A.** General Lagrange and Hermite interpolation in R^n with applications to finite element methods // Arch. Rational Mech. Anal. 1972. Vol. 46, no. 3. P. 177–199.
2. **Субботин Ю.Н.** Многомерная кусочно-полиномиальная интерполяция // Методы аппроксимации и интерполяции / под ред. А.Ю. Кузнецова. Новосибирск: ВЦН, 1981. С. 148–153.
3. **Субботин Ю.Н.** Зависимость оценок многомерной кусочно-полиномиальной аппроксимации от геометрических характеристик триангуляции // Тр. МИАН. 1989. Т. 189. С. 117–137.
4. **Байдакова Н. В.** Влияние гладкости на погрешность аппроксимации производных при локальной интерполяции на триангуляциях // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 83–97.
5. On angle conditions in the finite element method / J. Brandts, A. Hannukainen, S. Korotov, M. Krizek // SeMA J. 2011. No. 56. P. 81–95.
6. **Березин И.С., Жидков Н.П.** Методы вычислений. Т. 1. М.: Физматгиз, 1962. 464 с.

Байдакова Наталия Васильевна
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: baidakova@imm.uran.ru

Поступила 18.02.2015