ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 517.5

ОЦЕНКИ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНЫХ НОРМ ФУНКЦИЙ, РЯДЫ ФУРЬЕ КОТОРЫХ ЯВЛЯЮТСЯ ЛАКУНАРНЫМИ[1]

А. Г. Бабенко, В. А. Юдин

Рассматриваются свойства функций f, принадлежащих пространству $L^2(\mathbb{T})$ на периоде $\mathbb{T}=[-\pi,\pi)$, ряды Фурье которых лакунарны, причем размер всех лакун не меньше заданного натурального числа $q-1$. Для указанных функций найдены двусторонние оценки их L^2-норм на $\mathbb{T}$ через аналогичные нормы (а точнее, полунормы) на интервалах I длины $|I|=2h<2\pi$. Оценки получены в терминах наилучших односторонних интегральных приближений характеристической функции интервала $(-h,h)$ тригонометрическими полиномами порядка не выше $q-1$. Тема, рассматриваемая в статье, впервые появилась в исследованиях Н. Винера (1934). Важные результаты в этом направлении получили А. Е. Ингам (1936) и А. Сельберг в 70-е годы прошлого века.

Ключевые слова: лакунарные тригонометрические ряды, среднеквадратичные нормы, одностороннее приближение функций тригонометрическими полиномами.

A. G. Babenko, V. A. Yudin. Estimates for mean-square norms of functions with lacunary Fourier series.

We consider the properties of functions f from the space $L^2(\mathbb{T})$ on the period $\mathbb{T}=[-\pi,\pi)$ with lacunary Fourier series such that the size of each lack is not less than a given positive integer $q-1$. We find two-sided estimates of the L^2 norms of such functions on $\mathbb{T}$ in terms of similar norms (more exactly, seminorms) on intervals I of length $|I|=2h<2\pi$. The estimates are obtained in terms of best one-sided integral approximations of the characteristic function of the interval $(-h,h)$ by trigonometric polynomials of order at most $q-1$. The issue considered in this paper appeared first in N. Wiener's studies (1934). Important results in this area were obtained by A.E. Ingham (1936) and by A. Selberg in the 1970s.

Keywords: lacunary trigonometric series, mean-square norms, one-sided approximation of functions by trigonometric polynomials.

1. Введение

Обозначим через $\mathcal{P}(q)$, $q>0$, множество конечных сумм (тригонометрических полиномов)

$$P(x)=\sum c_k e^{in_k x} \quad \bigl(c_k\in\mathbb{C},\quad n_k\in\mathbb{Z},\quad |n_k-n_j|\ge q \ \text{ при } \ k\ne j\bigr) \tag{1.1}$$

с комплексными коэффициентами, номера гармоник которых целые и отстоят друг от друга не менее, чем на число q. В монографии [3, гл. 5, § 9, теоремы (9.1), (9.9), примечания к гл. 5, § 9] содержится следующий результат.

Теорема A. *Пусть $q>0$, I — интервал, длина $|I|$ которого больше $2\pi/q$, т. е. $|I|=2\pi(1+\delta)/q$, $\delta>0$, и пусть J — интервал, длина которого равна $2\pi\eta/q$, где $\eta>0$. Тогда для любого $P\in\mathcal{P}(q)$*

$$\frac{B}{|J|}\int\limits_J |P(x)|^2\,dx \le \sum|c_k|^2 \le \frac{A}{|I|}\int\limits_I |P(x)|^2\,dx, \tag{1.2}$$

где положительные величины $A=A_\delta$ и $B=B_\eta$ конечны и зависят соответственно только от δ и η.

Оценку сверху в (1.2) впервые установил Н. Винер [18] при $|I|\ge 16\pi/q$, и он показал, что в этом случае в качестве A можно взять число 8.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

А. Е. Ингам [11] рассмотрел не только периодический случай. В частности, он исследовал аналоги неравенств (1.2) на более широком в сравнении с $\mathcal{P}(q)$ множестве $\mathcal{F}(q)$ конечных экспоненциальных сумм

$$P(x)=\sum c_k e^{i\lambda_k x} \quad \big(c_k\in\mathbb{C},\quad \lambda_k\in\mathbb{R},\quad |\lambda_k-\lambda_j|\ge q \quad \text{при} \quad k\ne j\big). \tag{1.3}$$

В статье [11] доказано, что для таких функций имеют место следующие утверждения. *При фиксированном* $h=(\pi+\varepsilon)/q$, $\varepsilon>0$, *справедлива оценка сверху*

$$\sum |c_k|^2\le \frac{\mathcal{A}}{2h}\int\limits_{-h}^{h}|P(x)|^2\,dx, \tag{1.4}$$

где $\mathcal{A}=\mathcal{A}(\varepsilon)>0$ *есть конечная величина, зависящая только от* ε; *в качестве* $\mathcal{A}(\varepsilon)$ *можно взять*

$$\mathcal{A}(\varepsilon)=\min\Big\{\frac{\pi(\pi+\varepsilon)^2}{2\varepsilon(2\pi+\varepsilon)},\ \frac{3(\pi+\varepsilon)}{2\varepsilon}\Big\}. \tag{1.5}$$

В случае $0<h\le\pi/q$ *оценка* (1.4) (*с конечной константой* $\mathcal{A}$) *невозможна. Кроме того, при* $h=\tau/q>0$ *выполняется оценка снизу*

$$\frac{\min\{\tau,\pi\}}{20h}\int\limits_{-h}^{h}|P(x)|^2\,dx\le\sum|c_k|^2.$$

Для заданных чисел $h>0$, $q>0$ положим

$$\begin{aligned}\widetilde{b}_q(h)&:=\inf\left\{\frac{\sum|c_k|^2}{M_I(P)}:\quad P\in\mathcal{P}(q),\ P\not\equiv 0,\ |I|=2h\right\},\\ \widetilde{a}_q(h)&:=\sup\left\{\frac{\sum|c_k|^2}{M_I(P)}:\quad P\in\mathcal{P}(q),\ P\not\equiv 0,\ |I|=2h\right\};\end{aligned} \tag{1.6}$$

здесь для (невырожденного, конечного) промежутка I и функции P принято обозначение

$$M_I(P):=\|P\|^2_{L^2(I)}=\frac{1}{|I|}\int\limits_I|P(x)|^2\,dx.$$

С учетом 2π-периодичности произвольной функции P из множества $\mathcal{P}(q)$ (см. (1.1)) имеем

$$M_{(-\pi,\pi)}(P)=\|P\|^2_{L^2(\mathbb{T})}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|P(x)|^2\,dx=\sum|c_k|^2.$$

Поэтому

$$\widetilde{b}_q(\pi)=\widetilde{a}_q(\pi)=1 \quad \text{при всех} \quad q>0. \tag{1.7}$$

Доказательство теоремы А фактически основано на переходе от изучения величин $\widetilde{a}_q(h)$, $\widetilde{b}_q(h)$ при $q>0$, $h>0$ к исследованию величин

$$\begin{aligned}b_q(h)&:=\inf\left\{\frac{\sum|c_k|^2}{M_I(P)}:\quad P\in\mathcal{F}(q),\ P\not\equiv 0,\ |I|=2h\right\},\\ a_q(h)&:=\sup\left\{\frac{\sum|c_k|^2}{M_I(P)}:\quad P\in\mathcal{F}(q),\ P\not\equiv 0,\ |I|=2h\right\}.\end{aligned} \tag{1.8}$$

Следующие утверждения по существу содержатся в [11; 3, гл. 5, § 9]. Во-первых, в силу инвариантности относительно сдвига множеств $\mathcal{P}(q)$, $\mathcal{F}(q)$ и модулей коэффициентов c_k величины $\widetilde{b}_q(h)$, $\widetilde{a}_q(h)$, $b_q(h)$, $a_q(h)$ не зависят от расположения интервала I, а зависят лишь от его длины. Поэтому, не нарушая общности, можно считать, что $I=(-h,h)$. Кроме того, в силу вложения $\mathcal{P}(q)\subset\mathcal{F}(q)$ имеем

$$b_q(h)\le \widetilde{b}_q(h)\le \widetilde{a}_q(h)\le a_q(h)\quad \text{при}\quad h>0,\quad q>0. \tag{1.9}$$

Во-вторых, при фиксированном $\gamma>0$ величины $b_q(\gamma/q)$, $a_q(\gamma/q)$ не зависят от q, точнее,

$$b_q(\gamma/q)=b_1(\gamma),\quad a_q(\gamma/q)=a_1(\gamma)\quad \text{для всех}\quad q>0. \tag{1.10}$$

В самом деле, положим $h=\gamma/q$. Для любой функции $P\in\mathcal{F}(q)$, имеющей представление (1.3), сделав замену переменного $x=t/q$, получаем

$$\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h}\Big|\sum c_k e^{i\lambda_k x}\Big|^2\,dx=\frac{1}{2\gamma}\int\limits_{-\gamma}^{\gamma}\Big|\sum c_k e^{i\frac{\lambda_k}{q}t}\Big|^2\,dt.$$

Функция $P\left(t/q\right)=\sum c_k e^{i\frac{\lambda_k}{q}t}$ принадлежит уже $\mathcal{F}(1)$. Отсюда следуют соотношения (1.10).

Оценка сверху А. Е. Ингама (1.4), (1.5) вместе с (1.9) влечет оценку

$$\widetilde{a}_q(h)\le\mathcal{A}(\varepsilon)=\min\Big\{\frac{\pi(\pi+\varepsilon)^2}{2\varepsilon(2\pi+\varepsilon)},\ \frac{3(\pi+\varepsilon)}{2\varepsilon}\Big\}\quad \text{при}\quad q>0,\quad h=\frac{\pi+\varepsilon}{q},\quad \varepsilon>0. \tag{1.11}$$

Обозначим через $\theta^-(\xi)$ и $\theta^+(\xi)$ величины наилучшего одностороннего приближения в $L(\mathbb{R})$ характеристической функции интервала $(0,\xi)$ соответственно снизу и сверху множеством функций экспоненциального типа 2π, сужения которых на вещественную прямую $\mathbb{R}$ являются вещественными и принадлежат $L(\mathbb{R})$. В 70-е годы прошлого века А. Сельберг [16, art. 45, sec. 20, p. 224, (20.38)] доказал утверждение, которое приведем в следующей эквивалентной форме.

Теорема B. *Пусть $q>0$, I — интервал длины $|I|=2h>0$. Тогда для произвольной конечной суммы $P\not\equiv 0$ вида* (1.3) *имеют место неравенства*

$$\Big(1-\frac{\pi}{qh}\theta^-\Big(\frac{qh}{\pi}\Big)\Big)\sum|c_k|^2<\frac{1}{2h}\int\limits_I|P(x)|^2\,dx<\Big(1+\frac{\pi}{qh}\theta^+\Big(\frac{qh}{\pi}\Big)\Big)\sum|c_k|^2. \tag{1.12}$$

А. Берлинг и А. Сельберг (см. [16, art. 45, sec. 19, 20, 21; 17; 14, ch. 1; 15, sec. 1]) изучали одностороннее приближение в $L(\mathbb{R})$ ступенчатых функций $\operatorname{sign}x$, функции Хевисайда и характеристической функции интервала целыми функциями заданного экспоненциального типа. В [16, art. 45, sec. 20] доказано, что

$$\theta^-(\xi)\le 1,\quad \theta^+(\xi)\le 1\quad \text{при}\quad \xi>0, \tag{1.13}$$

$$\theta^-(\xi)=\xi\quad \text{при}\quad 0<\xi\le 1,\quad \theta^-(k)=\theta^+(k)=\lim_{\xi\to+0}\theta^+(\xi)=1\quad \text{при}\quad k\in\mathbb{N}. \tag{1.14}$$

Утверждение $\lim\limits_{\xi\to+0}\theta^+(\xi)=1$ следует также из одного результата Р. П. Боаса и М. Каца (1945) [6, Theorem 5, p. 198] для целых функций заданного экспоненциального типа; подробности приведены ниже в разд. 4.

Теорема B и оценки (1.13) влекут неравенства [16, art. 45, sec. 20, p. 225, (20.38′)]

$$\Big(1-\frac{\pi}{qh}\Big)\sum|c_k|^2<\frac{1}{2h}\int\limits_I|P(x)|^2\,dx<\Big(1+\frac{\pi}{qh}\Big)\sum|c_k|^2,$$

которые справедливы для любых интервалов I длины $2h$ и конечных сумм $P \not\equiv 0$ вида (1.3).

Таким образом, неравенства (1.9), (1.13) и теорема B приводят к следующим оценкам:

$$\frac{1}{1+\dfrac{\pi}{qh}} \le \frac{1}{1+\dfrac{\pi}{qh}\theta^+\Big(\dfrac{qh}{\pi}\Big)} \le b_q(h) \le \widetilde{b}_q(h) \quad \text{при} \quad q>0, \quad h>0, \tag{1.15}$$

$$\widetilde{a}_q(h) \le a_q(h) \le \frac{1}{1-\dfrac{\pi}{qh}\theta^-\Big(\dfrac{qh}{\pi}\Big)} \le \frac{1}{1-\dfrac{\pi}{qh}} \quad \text{при} \quad q>0, \quad h>\frac{\pi}{q}. \tag{1.16}$$

Д. Л. Донохо и Б. Ф. Логан установили результат [7, Lemma 10], из которого следует (см. [13, формула (1.3)]), что

$$\theta^+(\xi) = \frac{2\pi\xi}{\pi\xi+\sin\pi\xi} - \xi \quad \text{при} \quad \xi \in (0,1). \tag{1.17}$$

Относительно недавно задачу о вычислении величин $\theta^-(\xi)$ и $\theta^+(\xi)$ для значений ξ, при которых они оставались неизвестными, решил Ф. Литтманн [13]. Он выразил эти величины в виде специальных конечных сумм в терминах решений уравнений, содержащих трансцендентные и алгебраические выражения. При этом сумма $\theta^-(\xi)+\theta^+(\xi)$ свернулась в простое выражение [13, формула (1.5)], которое в принятых здесь обозначениях принимает вид

$$\theta^-(\xi)+\theta^+(\xi) = \frac{2|\pi\xi|}{|\pi\xi|+|\sin\pi\xi|}, \quad \xi>1. \tag{1.18}$$

В данной работе для каждого натурального $q \ge 2$ найдены двусторонние оценки величин $\widetilde{b}_q(h)$ и $\widetilde{a}_q(h)$ при $0<h\le\pi$ и $\pi/q<h\le\pi$ соответственно в терминах величин $\mathcal{E}^+_{q-1}(h)$, $\mathcal{E}^-_{q-1}(h)$ наилучшего интегрального приближения соответственно сверху и снизу характеристической функции интервала $(-h,h)$ тригонометрическими полиномами порядка не выше $q-1$ (см. определения (3.1), (3.2) в разд. 3 ниже). А именно,

$$\frac{1}{1+\dfrac{\pi}{q}\mathcal{E}^+_{q-1}(h)} \le \widetilde{b}_q(h) \quad \text{при} \quad 0<h\le\pi, \quad q\in\{2,3,4,\ldots\},$$

$$\widetilde{a}_q(h) \le \frac{1}{1-\dfrac{\pi}{q}\mathcal{E}^-_{q-1}(h)} \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{q}<h\le\pi, \quad q\in\{2,3,4,\ldots\}. \tag{1.19}$$

Упомянутые выше результаты результаты Д. Л. Донохо и Б. Ф. Логана, а также Ф. Литтманна (в том числе, (1.17), (1.18)), касающиеся величин $\theta^-(\xi)$ и $\theta^+(\xi)$, не были известны авторам работы [2]; внимание авторов на эти результаты недавно обратил Д. В. Горбачев.

Периодические аналоги $\mathcal{E}^-_{q-1}(h)$, $\mathcal{E}^+_{q-1}(h)$ величин $\theta^-(\xi)$, $\theta^+(\xi)$ к настоящему времени изучены полностью [2; 9; 12; 17] (соответствующая история вопроса приведена ниже в разд. 3). В частности, с помощью (1.19) и результатов работы [2] получаем, что для любых $q\in\{2,3,4,\ldots\}$, $\pi/q<h<2\pi/q$, и произвольной функции $P\in\mathcal{P}(q)$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |P(x)|^2\,dx \le \Upsilon(q,h)\int\limits_{-h}^{h} |P(x)|^2\,dx, \tag{1.20}$$

где

$$\Upsilon(q,h) = \frac{(q+1)\sin\dfrac{(q-1)h}{2} - (q-1)\sin\dfrac{(q+1)h}{2}}{\sin\dfrac{(q-1)h}{2} - \sin\dfrac{(q+1)h}{2}}.$$

Заметим, что

$$\Upsilon(q,h)=q+\frac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{\varepsilon}{2}\operatorname{tg}\dfrac{h}{2}}\quad \text{при}\quad h=\frac{\pi+\varepsilon}{q},\quad 0<\varepsilon<\pi.$$

Следовательно, выполняется неравенство

$$\widetilde{a}_q(h)\le\frac{\pi+\varepsilon}{\pi}+\frac{\pi+\varepsilon}{\pi q\operatorname{tg}\dfrac{\varepsilon}{2}\operatorname{tg}\dfrac{h}{2}}\quad \text{при}\quad q=2,3,4,\dots,\quad h=\frac{\pi+\varepsilon}{q},\quad 0<\varepsilon<\pi, \tag{1.21}$$

которое уточняет оценку (1.11) при указанных в (1.21) ограничениях на q, h, поскольку в этом случае выражение, расположенное в правой части неравенства (1.21), меньше $\mathcal{A}(\varepsilon)$.

Кроме того, здесь доказаны следующие соотношения:

$$\lim_{h\to\frac{2\pi}{q+1}-0}\widetilde{a}_q(h)=\lim_{h\to\frac{2\pi}{q}-0}\widetilde{a}_q(h)=2,\quad q\in\mathbb{N},\quad q\ge 2. \tag{1.22}$$

Сравнивая последние равенства в (1.22), (1.7) при $q=2$, приходим к выводу, что величина $\widetilde{a}_2(h)$ (как функция переменного h) терпит разрыв в точке π.

2. Постановка задачи и примеры

Напомним некоторые стандартные обозначения, которые здесь будут использоваться. Пусть $\mathbb{T}:=\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ есть период длины 2π, т. е. полуинтервал $[-\pi,\pi)$ с отождествленными концами. Символом $L^p:=L^p(\mathbb{T})$ $(1\le p<\infty)$, как обычно, обозначается пространство 2π-периодических измеримых комплекснозначных функций $f:\ \mathbb{T}\to\mathbb{C}$ с нормой

$$\|f\|_p:=\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}}|f(t)|^p\,dt\right)^{1/p};$$

положим $L:=L^1$.

Функцию $f\in L^2$ разложим в ряд Фурье $f(x)=\sum\limits_{\nu\in\mathbb{Z}}\widehat{f}_\nu e^{i\nu x}$, $\quad\widehat{f}_\nu=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-i\nu x}\,dx$. Множество $\operatorname{sp}f:=\{\nu\in\mathbb{Z}:\ \widehat{f}_\nu\ne 0\}$ называют спектром функции f; будем считать его упорядоченным по возрастанию: $\operatorname{sp}f=\{\nu_k:\ \nu_k<\nu_{k+1}\}$. Зафиксируем произвольное натуральное число $q\ge 2$. Обозначим через $\mathcal{D}(q)$ множество функций $f\in L^2$, у которых любые две точки спектра $\operatorname{sp}f$ находятся на расстоянии не меньшем, чем число q. Иными словами, функция $f\in L^2$ принадлежит $\mathcal{D}(q)$ в том и только в том случае, если ее ряд Фурье имеет вид

$$\sum\widehat{f}_{\nu_k}e^{i\nu_k x},\quad \nu_k\in\mathbb{Z},\quad \nu_k<\nu_{k+1}\quad\text{при всех}\quad k,\quad |\nu_k-\nu_j|\ge q\quad\text{при}\quad k\ne j.$$

Ясно, что $\mathcal{D}(q+1)\subset\mathcal{D}(q)$.

Теорема A влечет следующее утверждение: *если* $q\in\mathbb{N}$, $h>\pi/q$, *то для любой функции* $f\in\mathcal{D}(q)$, $f\not\equiv 0$, *и любого* $a\in\mathbb{R}$ *выполняется неравенство* $\displaystyle\int_a^{a+2h}|f(x)|^2dx>0$.

Приведем пример, показывающий существенность ограничения $h>\pi/q$ в том смысле, что число π в этом ограничении нельзя заменить на меньшее; напомним, что этот факт был установлен ранее в [11, § 3] другим способом.

П р и м е р 1. При $q\in\mathbb{N}$, $0<h<\pi/q$ существует функция $f\in\mathcal{D}(q)$ такая, что

$$\|f\|_2>0\quad \textit{и}\quad \int\limits_{-h}^{h}|f(x)|^2dx=0. \tag{2.1}$$

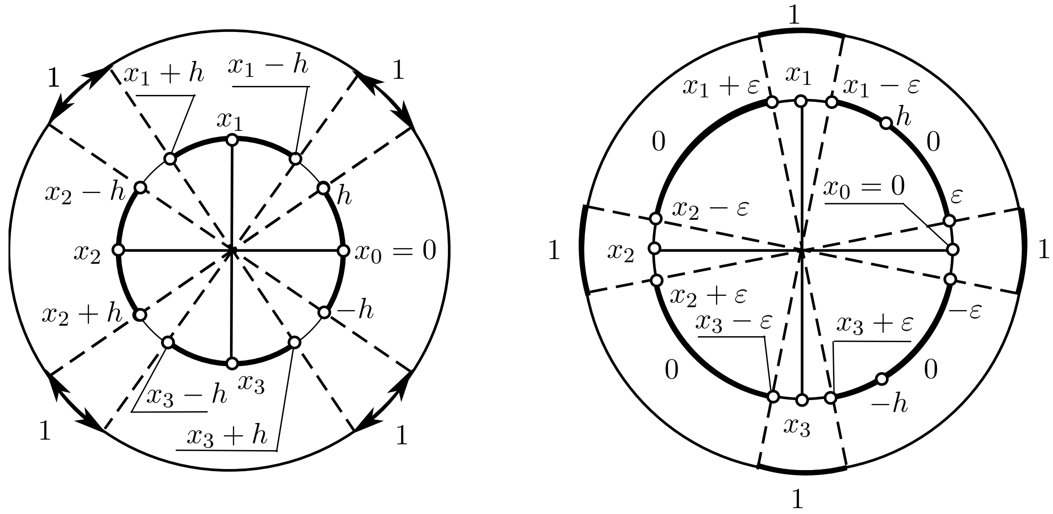

Рис. 1.

Действительно, рассмотрим набор точек $\left\{x_k := \dfrac{2k\pi}{q}\right\}_{k=0}^{q-1}$ и определим функцию f на периоде[2] $\mathbb{T}$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad |x - x_k| \le h, \quad k = 0, 1, \ldots, q-1; \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Функция f является $2\pi/q$-периодической, следовательно, $\operatorname{sp} f \subseteq \{0, \pm q, \pm 2q, \ldots\}$, поэтому $f \in \mathcal{D}(q)$. Для этой функции выполняются равенства $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2(\pi - hq)$, $\int_{-h}^{h} |f(x)|^2 dx = 0$, которые вместе с ограничением $0 < h < \pi/q$ влекут (2.1). $\square$

В левой части рис. 1 изображен рассмотренный пример функции f в случае $q = 4$.

Рис. 1 состоит из двух частей (левой и правой), каждая из которых соответствует случаю $q = 4$, $x_k = 2k\pi/q = k\pi/2$, $k = 0, 1, 2, 3$. В центре каждой части расположена единичная окружность Γ.

На левой части рисунка малые вертикальные углы, изображенные пунктирными линиями, высекают на Γ дуги, на которых функция $\varphi(e^{ix}) := f(x)$ принимает единичное значение, в остальных точках окружности эта функция равна нулю.

Правая часть рисунка является визуализацией функции f, построенной ниже в примере 2; на этой части рисунка малые вертикальные углы, изображенные пунктирными линиями, высекают на Γ дуги, на которых функция $\varphi(e^{ix}) := f(x)$ принимает единичное значение, в остальных точках окружности эта функция равна нулю.

На обеих частях рисунка числа $\pm h$, $\pm\varepsilon$, $x_k \pm h$, x_k, $x_k \pm \varepsilon$ означают углы (функция e^{ix} переводит их в точки на Γ).

Зафиксируем число $h \in (0, \pi]$ и натуральное число $q \ge 2$. Нас интересует, в каких пределах может изменяться отношение

$$\Psi(f; 2h) := \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx \Bigg/ \int\limits_{-h}^{h} |f(x)|^2\, dx,$$

[2]Удобно отождествить период $\mathbb{T} = [-\pi, \pi)$ с единичной окружностью $\Gamma := \{z = e^{ix} : x \in \mathbb{T}\}$. В этом случае набору точек $\{x_k\}_{k=0}^{q-1} \subset \mathbb{T}$ будет соответствовать набор точек $\left\{z_k := e^{ix_k}\right\}_{k=0}^{q-1} \subset \Gamma$, а функции f на $\mathbb{T}$ будет соответствовать функция φ на Γ, которая определяется равенством $\varphi(e^{ix}) := f(x)$.

когда f пробегает класс $\mathcal{D}(q)$, т. е. чему равняются величины

$$\beta_q(h) := \inf_{f\in\mathcal{D}(q),\,\|f\|_2>0} \Psi(f;2h), \quad \alpha_q(h) := \sup_{f\in\mathcal{D}(q),\,\|f\|_2>0} \Psi(f;2h). \tag{2.2}$$

Заметим, что величины (2.2) связаны с величинами (1.6) равенствами

$$\frac{h}{\pi}\beta_q(h) = \widetilde{b}_q(h), \quad \frac{h}{\pi}\alpha_q(h) = \widetilde{a}_q(h). \tag{2.3}$$

Это следует из того, что, во-первых, при фиксированном $h\in(0,\pi]$ функционал

$$\rho_h(f) := \left(\int\limits_{-h}^{h} |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$$

является полунормой в L^2 (в частности, выполняется неравенство треугольника), а во-вторых, для каждой функции $f\in\mathcal{D}(q)$, не эквивалентной нулевой, ее частичная сумма Фурье $S_n(f)$ порядка n принадлежит множеству $\mathcal{P}(q)$, и начиная с некоторого достаточно большого n выполняется свойство $S_n(f)\not\equiv 0$.

Последнее равенство в (2.3) вместе с примером 1 влекут следующее утверждение, полученное ранее в [11, § 3] другим способом: $\widetilde{a}_q(h)=+\infty$ при $0<h<\pi/q,\ q\in\mathbb{N}$.

Ниже построен пример функции, которая дает оценку

$$q \le \alpha_q(h) \quad \text{при} \quad h\in\left(\frac{\pi}{q},\frac{2\pi}{q}\right), \quad q\in\mathbb{N}, \quad q\ge 2. \tag{2.4}$$

П р и м е р 2. Пусть $q\in\mathbb{N}$, $q\ge 2$. Рассмотрим набор точек $X := \left\{x_k := \dfrac{2k\pi}{q}\right\}_{k=0}^{q-1}$. Зафиксируем произвольное число $h\in(\pi/q,2\pi/q)$. Возьмем положительное число ε настолько малым, чтобы отрезок $[-h,h]$ содержал в себе ε-окрестность точки $x_0=0$ и не пересекался с ε-окрестностями остальных точек из X. Ясно, что среди точек из $X\setminus x_0=\{x_k\}_{k=1}^{q-1}$ ближайшими к x_0 в смысле метрики на периоде[3] $\mathbb{T}$ являются две точки x_1 и x_{q-1} (каждая из них удалена от x_0 на расстояние $2\pi/q$). В качестве ε можно взять любое число из интервала $(0,2\pi/q-h)$. Действительно, неравенство $\varepsilon<2\pi/q-h$ равносильно неравенству $h<2\pi/q-\varepsilon=x_1-\varepsilon$, которое, в частности, означает, что ближайшая к точке x_0 концевая точка отрезка $[x_1-\varepsilon,x_1+\varepsilon]$ не лежит в отрезке $[-h,h]$. Кроме того, из неравенств $\pi/q<h<2\pi/q$, $\varepsilon<2\pi/q-h$ следует, что $\varepsilon<h$.

Положим

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{при} \quad |x-x_k|\le\varepsilon, \quad k=0,1,\dots,q-1;\\ 0, & \text{иначе}.\end{cases}$$

Функция f является $2\pi/q$-периодической, следовательно, $\operatorname{sp} f\subseteq\{0,\pm q,\pm 2q,\pm 3q,\dots\}$ и $f\in\mathcal{D}(q)$. Эта функция принимает единичное значение на отрезках $[x_k-\varepsilon,x_k+\varepsilon]$, $k=0,1,\dots,q-1$; в остальных точках периода она равна нулю. В частности, $f(x)=0$ при $\varepsilon<|x|<x_1-\varepsilon$. Следовательно, $f(x)=0$ при $\varepsilon<|x|\le h$, поскольку $\varepsilon<h<x_1-\varepsilon$. Поэтому $\displaystyle\int_{-h}^{h}|f(x)|^2\,dx=2\varepsilon$. Кроме того, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx=2\varepsilon q$. Откуда вытекает (2.4). □

В правой части рис. 1 изображен рассмотренный пример функции f в случае $q=4$.

[3] Здесь также, как и в предыдущем примере (см. сноску 2 на с. 59), удобно отождествить период $\mathbb{T}$ с единичной окружностью Γ на комплексной плоскости; расстояние $\rho(x,y)$ на $\mathbb{T}$ между двумя точками x,y определяется так: $\rho(x,y)=\min\{|x-y-2\pi k|:\ k\in\mathbb{Z}\}$.

Следующие два известных факта (см., например, [3, гл. 5, § 9]) применяются ниже для исследования величин $\alpha_q(h)$, $\beta_q(h)$. Первый факт заключается в равенстве

$$\int_{-h}^{h} |f(x)|^2\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \chi_h(x)|f(x)|^2\,dx, \quad 0 < h \le \pi,$$

где χ_h есть 2π-периодическое продолжение характеристической функции

$$\chi_{(-h,h)}(x) = \begin{cases} 1, & |x| < h, \\ 0, & h \le |x| \end{cases}$$

интервала $(-h, h)$.

Второй факт состоит в том, что для $f \in \mathcal{D}(q)$ функция $F(x) := |f(x)|^2$ ортогональна гармоникам $e_j(x) := e^{ijx}$ при $j = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(q-1)$. Это утверждение следует из цепочки равенств

$$|f(x)|^2 = f(x)\overline{f}(x) = \Big(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_\nu e^{i\nu x}\Big)\Big(\sum_{\mu\in\mathbb{Z}} \overline{\widehat{f}_\mu} e^{-i\mu x}\Big) = \sum_{(\nu,\mu)\in\mathbb{Z}^2} \widehat{f}_\nu \overline{\widehat{f}_\mu} e^{i(\nu-\mu)x}$$

$$= \sum_{s\in\mathbb{Z}} \Big(\sum_{\nu-\mu=s} \widehat{f}_\nu \overline{\widehat{f}_\mu}\Big) e^{isx} = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}_\nu|^2 + \sum_{s\in\mathbb{Z},\ |s|\ge q} \Big(\sum_{\nu-\mu=s} \widehat{f}_\nu \overline{\widehat{f}_\mu}\Big) e^{isx}. \tag{2.5}$$

3. Применение одностороннего приближения в L характеристической функции интервала тригонометрическими полиномами

Пусть $\mathcal{T}_n$ есть подпространство тригонометрических полиномов порядка не выше n, принимающих вещественные значения на $\mathbb{T}$; элементами $\mathcal{T}_n$ являются полиномы вида

$$\tau(x) = \sum_{\nu=-n}^{n} \widehat{\tau}_\nu e^{i\nu x}, \quad \widehat{\tau}_{-\nu} = \overline{\widehat{\tau}_\nu} \in \mathbb{C}.$$

Для вещественнозначной ограниченной функции $g \in L$ определим величины

$$E_n^-(g) := \inf_{\tau\in\mathcal{T}_n,\,\tau\le g} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \{g(x) - \tau(x)\}\,dx, \quad E_n^+(g) := \inf_{\tau\in\mathcal{T}_n,\,g\le\tau} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \{\tau(x) - g(x)\}\,dx \tag{3.1}$$

наилучшего интегрального приближения снизу и соответственно сверху подпространством $\mathcal{T}_n$; здесь $\tau \le g$ означает, что $\tau(x) \le g(x)$ при всех $x \in \mathbb{T}$.

В дальнейшем в качестве приближаемой функции g будет рассматриваться 2π-периодическое продолжение характеристической функции интервала $(-h, h)$, обозначенное выше символом χ_h. Положим

$$\mathcal{E}_n^-(h) := E_n^-(\chi_h), \quad \mathcal{E}_n^+(h) := E_n^+(\chi_h), \quad 0 < h \le \pi, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{3.2}$$

Несложно убедиться в том, что

$$\mathcal{E}_n^+(h) = \mathcal{E}_n^-(\pi - h) \quad \text{для} \quad n \in \mathbb{N}, \quad h \in (0, \pi). \tag{3.3}$$

Зафиксируем произвольное натуральное число $n \ge 2$. Известно (см. [1]), что из одного результата Л. Фейера (1915) [10; см. также 4, разд. 6, задача 52] следует такое утверждение: *для каждого числа $h \in (\pi/n, \pi]$ найдется тригонометрический полином порядка $n-1$, неположительный на $[-\pi, -h] \cup [h, \pi]$ с положительным свободным коэффициентом; причем в этом утверждении число π/n заменить на меньше положительное число нельзя.*

Поэтому для каждого числа $h \in (\pi/n, \pi]$ существует полином $\tau \in \mathcal{T}_{n-1}$ такой, что $\tau \le \chi_h$ и $\widehat{\tau}_0 > 0$; причем, если $0 < h \le \pi/n$, то для любого $\tau \in \mathcal{T}_{n-1}$, удовлетворяющего условию $\tau \le \chi_h$, выполняется неравенство $\widehat{\tau}_0 \le 0$.

Лемма 1. *Пусть* $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$, $\pi/q < h \leq \pi$, *и пусть полином* $\tau \in \mathcal{T}_{q-1}$ *удовлетворяет условиям* $\tau \leq \chi_h$, $\widehat{\tau}_0 > 0$. *Тогда для любой функции* $f \in \mathcal{D}(q)$ *выполняется неравенство*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx \leq \frac{1}{\widehat{\tau}_0} \int\limits_{-h}^{h} |f(x)|^2\, dx. \tag{3.4}$$

Доказательство. Поскольку $f \in \mathcal{D}(q)$, то (см. (2.5)) функция $F(x) := |f(x)|^2$ ортогональна гармоникам e^{ijx} при $j = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(q-1)$. Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \tau(x) |f(x)|^2\, dx = \widehat{\tau}_0 \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}_\nu|^2.$$

Отсюда с учетом условия $\tau \leq \chi_h$ и представления (2.5) получаем

$$\int\limits_{-h}^{h} |f(x)|^2\, dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \chi_h(x) |f(x)|^2\, dx \geq \int\limits_{-\pi}^{\pi} \tau(x) |f(x)|^2\, dx = 2\pi \widehat{\tau}_0 \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}_\nu|^2 = \widehat{\tau}_0 \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx,$$

что в силу положительности $\widehat{\tau}_0$ равносильно (3.4). Лемма доказана. □

Следствие 1. *Пусть* $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$, $\pi/q < h \leq \pi$. *Тогда для любой функции* $f \in \mathcal{D}(q)$ *выполняется неравенство*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx \leq \frac{1}{\dfrac{h}{\pi} - \mathcal{E}^-_{q-1}(h)} \int\limits_{-h}^{h} |f(x)|^2\, dx. \tag{3.5}$$

Доказательство. Имеем

$$\mathcal{E}^-_{q-1}(h) := E^-_{q-1}(\chi_h) = \inf_{\tau \in \mathcal{T}_{q-1},\, \tau \leq \chi_h} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \{\chi_h(x) - \tau(x)\}\, dx = \frac{h}{\pi} - \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{q-1},\, \tau \leq \chi_h} \widehat{\tau}_0.$$

Таким образом,

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}_{q-1},\, \tau \leq \chi_h} \widehat{\tau}_0 = \frac{h}{\pi} - \mathcal{E}^-_{q-1}(h).$$

Отсюда с помощью леммы 1 приходим к неравенству (3.5). □

Очевидно, что для любого $h \in (0, \pi]$ и любого полинома $\tau \in \mathcal{T}_{q-1}$, удовлетворяющего условию $\chi_h \leq \tau$, выполняется неравенство $\widehat{\tau}_0 > 0$. Повторяя рассуждения, аналогичные тем, которые использовались при доказательстве леммы 1, приходим к следующему утверждению.

Лемма 2. *Пусть* $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$, $0 < h \leq \pi$, *и пусть полином* $\tau \in \mathcal{T}_{q-1}$ *удовлетворяет условию* $\chi_h \leq \tau$. *Тогда для любой функции* $f \in \mathcal{D}(q)$ *выполняется неравенство*

$$\frac{1}{\widehat{\tau}_0} \int\limits_{-h}^{h} |f(x)|^2\, dx \leq \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx. \tag{3.6}$$

Следствие 2. *Пусть* $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$, $0 < h \leq \pi$. *Тогда для любой функции* $f \in \mathcal{D}(q)$ *выполняется неравенство*

$$\frac{1}{\dfrac{h}{\pi} + \mathcal{E}^+_{q-1}(h)} \int\limits_{-h}^{h} |f(x)|^2\, dx \leq \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx. \tag{3.7}$$

Доказательство. Имеем

$$\mathcal{E}^+_{q-1}(h) := E^+_{q-1}(\chi_h) = \inf_{\tau\in\mathcal{T}_{q-1},\,\chi_h\le\tau} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{\tau(x)-\chi_h(x)\}\,dx = \inf_{\tau\in\mathcal{T}_{q-1},\,\chi_h\le\tau} \widehat{\tau}_0 - \frac{h}{\pi},$$

так что

$$\inf_{\tau\in\mathcal{T}_{q-1},\,\chi_h\le\tau} \widehat{\tau}_0 = \frac{h}{\pi} + \mathcal{E}^+_{q-1}(h).$$

Отсюда с помощью леммы 2 приходим к неравенству (3.7). □

Суммируя утверждения следствий 1, 2 и принимая во внимание инвариантность подпространства $\mathcal{T}_{q-1}$ относительно любого сдвига, получаем следующий результат.

Теорема 1. *Пусть* $q\in\mathbb{N}$, $q\ge 2$, $0<\lambda\le\pi$, $\pi/q<h\le\pi$. *Тогда для любой функции* $f\in\mathcal{D}(q)$ *и любого* $a\in\mathbb{R}$ *выполняются неравенства*

$$\frac{1}{2\lambda+2\pi\mathcal{E}^+_{q-1}(\lambda)}\int_a^{a+2\lambda}|f(x)|^2dx \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx \le \frac{1}{2h-2\pi\mathcal{E}^-_{q-1}(h)}\int_a^{a+2h}|f(x)|^2dx. \tag{3.8}$$

Из результата Фейера (1913) для неотрицательных тригонометрических полиномов (см. [9; 4, отдел 6, § 7, задача 50) следует (см. [2]) равенство

$$\mathcal{E}^-_{q-1}(\pi) = \frac{1}{q} \quad \text{для} \quad q\in\mathbb{N}, \quad q\ge 2.$$

Обращаем внимание читателя на то, что $\mathcal{E}^-_{q-1}(\pi)$ — величина наилучшего интегрального приближения *снизу* характеристической функции *открытого* интервала $(-\pi,\pi)$ тригонометрическими полиномами порядка не выше $q-1$, поэтому в качестве приближающего полинома нельзя брать полином, тождественно равный единице, поскольку такой полином положителен в концевых точках $-\pi$, π, в то время как приближающий полином должен быть неположительным в этих точках.

П. Ердеш и П. Туран (1948) (см. [8; 15, Ch. 1, p. 272]) доказали, что $\mathcal{E}^-_{q-1}(h) = O(q)$. Позднее этот результат был уточнен ([17; 14, Ch. 1]):

$$\mathcal{E}^-_{q-1}(h) \le \frac{1}{q} \quad \text{при любых} \quad q\in\mathbb{N}, \quad q\ge 2, \quad h\in(0,\pi]. \tag{3.9}$$

В работе [12] содержится, в частности, такое утверждение:

$$\mathcal{E}^-_{q-1}(h) = \frac{1}{q} \quad \text{для} \quad q\in\mathbb{N}, \quad q\ge 2, \quad h=\frac{j\pi}{q}, \quad j=1,2,\ldots,q. \tag{3.10}$$

С помощью теоремы 1, неравенства (3.9) и утверждений (3.10), (3.3) получаем

Следствие 3. *Пусть* $q\in\mathbb{N}$, $q\ge 2$, $\pi/q<h\le\pi$. *Тогда для любой функции* $f\in\mathcal{D}(q)$ *и любого* $a\in\mathbb{R}$ *выполняются неравенства*

$$\frac{1}{2h+\frac{2\pi}{q}}\int_a^{a+2h}|f(x)|^2\,dx \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx \le \frac{1}{2h-\frac{2\pi}{q}}\int_a^{a+2h}|f(x)|^2\,dx. \tag{3.11}$$

В частности, при $h=j\pi/q$, $j=2,\ldots,q$, *выполняются неравенства*

$$\frac{q}{j+1}\int_a^{a+\frac{2j\pi}{q}}|f(x)|^2\,dx \le \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx \le \frac{q}{j-1}\int_a^{a+\frac{2j\pi}{q}}|f(x)|^2\,dx. \tag{3.12}$$

Неравенства (3.12) при $j=2$, $q\in\mathbb{N}$, $q\ge 2$, $a=-2\pi/q$ приобретают вид

$$\frac{q}{3}\int\limits_{-\frac{2\pi}{q}}^{\frac{2\pi}{q}}|f(x)|^2\,dx\le\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx\le q\int\limits_{-\frac{2\pi}{q}}^{\frac{2\pi}{q}}|f(x)|^2\,dx,\quad f\in\mathcal{D}(q). \tag{3.13}$$

Поэтому с учетом принадлежности постоянных функций классу $\mathcal{D}(q)$ для величин, определенных формулами (2.2), имеют место оценки

$$\frac{q}{3}\le\beta_q\Big(\frac{2\pi}{q}\Big)\le\frac{q}{2}\le\alpha_q\Big(\frac{2\pi}{q}\Big)\le q\quad\text{при}\quad q=2,3,4,\dots. \tag{3.14}$$

В статье [2] найдена величина $\mathcal{E}_n^-(h)$ при всех $n\in\mathbb{N}$, $h\in(0,\pi]$; в частности,

$$\mathcal{E}_{q-1}^-(h)=\frac{h}{\pi}-\Lambda_{q-1}(h)\quad\text{при}\quad h\in\Big(\frac{\pi}{q},\frac{2\pi}{q}\Big), \tag{3.15}$$

где

$$\Lambda_{q-1}(h)=\frac{\sin\dfrac{(q-1)h}{2}-\sin\dfrac{(q+1)h}{2}}{(q+1)\sin\dfrac{(q-1)h}{2}-(q-1)\sin\dfrac{(q+1)h}{2}}. \tag{3.16}$$

Преобразуем знаменатель дроби, стоящей перед последним интегралом в неравенствах (3.8),

$$2h-2\pi\mathcal{E}_{q-1}^-(h)=2\pi\Lambda_{q-1}(h),\quad h\in\Big(\frac{\pi}{q},\frac{2\pi}{q}\Big). \tag{3.17}$$

Легко проверить, что $\Lambda_{q-1}(\pi/q)=0$, $\Lambda_{q-1}(2\pi/q)=1/q$ и

$$\Lambda_{q-1}'(h)=\frac{q\sin h-\sin qh}{\Big((q+1)\sin\dfrac{(q-1)h}{2}-(q-1)\sin\dfrac{q+1}{2}h\Big)^2}>0\quad\text{при}\quad h\in\Big[\frac{\pi}{q},\frac{2\pi}{q}\Big].$$

Поэтому $\Lambda_{q-1}(h)$ является положительной возрастающей функцией на $(\pi/q,2\pi/q]$.

Следствие 4. *Пусть $q\in\mathbb{N}$, $q\ge 2$, $\pi/q<h<2\pi/q$, $a\in\mathbb{R}$. Тогда выполняются следующие утверждения*:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx\le\frac{1}{\Lambda_{q-1}(h)}\int\limits_{a}^{a+2h}|f(x)|^2\,dx,\quad f\in\mathcal{D}(q); \tag{3.18}$$

$$q\le\alpha_q(h)\le\frac{1}{\Lambda_{q-1}(h)}; \tag{3.19}$$

$$\lim_{h\to\frac{2\pi}{q}-0}\alpha_q(h)=q,\qquad\lim_{h\to\frac{2\pi}{q+1}-0}\alpha_q(h)=q+1. \tag{3.20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенство (3.18) вытекает из последнего неравенства в (3.8) и равенства (3.17). В свою очередь неравенство (3.18) влечет оценку сверху

$$\alpha_q(h)\le\frac{1}{\Lambda_{q-1}(h)}\quad\text{при}\quad h\in\Big(\frac{\pi}{q},\frac{2\pi}{q}\Big).$$

Оценка снизу в (3.19) была установлена выше (см. (2.4)). Из двусторонних оценок (3.19) предельным переходом при $h\to 2\pi/q-0$ получаем первое равенство в (3.20), поскольку

$$\lim_{h\to\frac{2\pi}{q}-0}\Lambda_{q-1}(h)=\frac{1}{q}.$$

Точка $h^* := 2\pi/(q+1)$ принадлежит интервалу $(\pi/q, 2\pi/q)$, на котором $\Lambda_{q-1}(h)$ непрерывна и принимает в точке h^* значение, равное $1/q+1$. Заменяя q на $q+1$ в первом равенстве из (3.20) и учитывая вложение $D_{q+1} \subset \mathcal{D}(q)$, получаем

$$q+1 = \lim_{h\to\frac{2\pi}{q+1}-0} \alpha_{q+1}(h) \le \lim_{h\to\frac{2\pi}{q+1}-0} \alpha_q(h) \le \frac{1}{\Lambda_{q-1}(h^*)} = q+1,$$

что влечет второе равенство в (3.20). Следствие доказано. □

Отметим, что в силу последнего равенства в (2.3) соотношения (3.20) равносильны (1.22); неравенство (3.18) уточняет оценку, которая следует из последнего неравенства в (1.9) и оценки (1.4), (1.5), найденной в [11, § 2].

4. Приложение

Сформулируем результат Р. П. Боаса и М. Каца [6, Theorem 5, p. 198] для целых функций, который упоминался выше в разд. 1 в связи с последним равенством в (1.14).

Теорема C. *Если функция f представима в виде*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\varphi(t)\,dt,$$

где φ — неотрицательная и интегрируемая на $\mathbb{R}$ функция, $f(x) = 0$ при $|x| \ge A > 0$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx \le Af(0), \tag{4.1}$$

причем существует функция f указанного вида, на которой это неравенство обращается в равенство.

В условиях этой теоремы имеем

$$\varphi(t) = \int_{-A}^{A} e^{-ixt} f(x)\,dx \ge 0 \quad \text{при всех} \quad t\in\mathbb{R}, \quad f\in C[-A,A]; \tag{4.2}$$

свойство непрерывности функции f следует из принадлежности φ пространству $L(\mathbb{R})$ (см. [5, гл. 1, § 1, с. 8, теорема 1.1]). Отсюда и из (4.1) получаем неравенства

$$|\varphi(\xi)| \le \int_{-A}^{A} |f(x)|\,dx \le Af(0) = \frac{A}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,dt, \quad \xi\in\mathbb{R}. \tag{4.3}$$

Для любой неотрицательной функции $\varphi \in L(\mathbb{R})$ экспоненциального типа $A > 0$ имеет место представление (4.2). Поэтому в случае $A = 2\pi$ в силу (4.3) выполняется неравенство

$$\|\varphi\|_{C(\mathbb{R})} \le \|\varphi\|_{L(\mathbb{R})}.$$

В частности, для любой неотрицательной функции $\varphi \in L(\mathbb{R})$ экспоненциального типа 2π, являющейся мажорантой характеристической функции произвольного интервала, имеем

$$1 \le \|\varphi\|_{L(\mathbb{R})},$$

что влечет оценку снизу $1 \le \lim_{\xi\to+0}\theta^+(\xi)$. Оценка сверху $\lim_{\xi\to+0}\theta^+(\xi) \le 1$ легко получается с помощью функции, на которой неравенство (4.1) обращается в равенство в случае $A = 2\pi$.

Авторы признательны В. В. Арестову за ценные замечания и благодарны Д. В. Горбачеву и Ю. В. Крякину за несколько важных литературных источников.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бабенко А.Г.** Об одной экстремальной задаче для полиномов // Мат. заметки. 1984. Т. 35, вып. 3. С. 349–356.
2. **Бабенко А.Г., Крякин Ю.В., Юдин В.А.** Одностороннее приближение в L характеристической функции интервала тригонометрическими полиномами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. С. 82–95.
3. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды / пер. с англ; под ред. Н. К. Бари. М.: Мир, 1965. Т. 1. 616 с.
4. **Полиа Г., Сегё Г.** Задачи и теоремы из анализа. М.: Наука, 1978. Ч. 2. 432 с.
5. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. 336 с.
6. **Boas R.P., Kac M.** Inequalities for Fourier transforms of positive functions // Duke Math. J. 1945. Vol. 12. P. 189–206.
7. **Donoho D.L., Logan B.F.** Signal recovery and the large sieve // SIAM J. Appl. Math. 1992. Vol. 52, no. 2. P. 577–591.
8. **Erdös P., Turan P.** On a problem in the theory of uniform distribution // Nederl. Akad. Wetensch. Proc. I; II. 1948. Vol. 51. P. 1146–1154; P 1262–1269.
9. **Fejer L.** Sur les polynômes harmoniques quelconques, Gesammelte Arbeiten / Hrsg. und Komment. P. Turan. Budapest: Akadémiai Kiadó, 1970. Bd. 1. P. 770–773.
10. **Fejer L.** Über trigonometrische Polynome, Gesammelte Arbeiten / Hrsg. und Komment. P. Turan. Budapest, Akadémiai Kiadó, 1970. Bd. 1. P. 842–872.
11. **Ingham A.E.** Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series // Math. Z. 1936. Vol. 41, no. 1. P. 367–379.
12. **Li X.-J., Vaaler J. D.** Some trigonometric extremal functions and the Erdos–Turan type inequalities // Indiana Univ. Math. J. 1999. Vol. 48, no. 1. P. 183–236.
13. **Littmann F.** Quadrature and extremal bandlimited functions // SIAM J. Math. Anal. 2013. Vol. 45, no. 2. P. 732–747.
14. **Montgomery H.L.** Ten lectures on the interface between analytic number theory and harmonic analysis. Washington: Amer. Math. Soc. Providence, 1994. 220 p. (CBMS Regional Conference Ser. Math. 84.)
15. **Montgomery H.L.** Harmonic analysis as found in analytic number theory. Twentieth century harmonic analysis-a celebration (Il Ciocco, 2000). Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2001. P. 271–293. (NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem. 33.)
16. **Selberg A.** Collected papers. Berlin: Springer-Verlag, 1991. Vol. 2. 253 p.
17. **Vaaler J.D.** Some extremal functions in Fourier analysis // Bull. Amer. Math. Soc. (New Series). 1985. Vol. 12, no. 2. P. 183–216.
18. **Wiener N.** A class of gap theorems // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (2). 1934. T. 3, no. 3-4. P. 367–372.

Бабенко Александр Григорьевич
д-р физ.-мат. наук
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: babenko@imm.uran.ru

Поступила 6.11.2014

Юдин Владимир Александрович