ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 517.5

ОДНОСТОРОННИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ИНТЕРВАЛОВ МНОГОЧЛЕНАМИ НА ОТРЕЗКЕ С ВЕСОМ[1]

А. Г. Бабенко, М. В. Дейкалова, С. Д. Ревес

Рассматривается задача одностороннего взвешенного интегрального приближения алгебраическими многочленами на отрезке $[-1,1]$ характеристических функций полуинтервала $(a,1]\subset(-1,1]$ и интервала $(a,b)\subset(-1,1)$. В случае полуинтервала задача решена полностью. Построен пример, иллюстрирующий трудности, возникающие в случае интервала.

Ключевые слова: одностороннее приближение, характеристическая функция, многочлены.

A. G. Babenko, M. V. Deikalova, Sz. G. Revesz. Weighted one-sided approximation of characteristic functions of intervals by polynomials on a closed interval.

We consider the problem of weighted one-sided approximation on the interval $[-1,1]$ of characteristic functions of intervals $(a,1]\subset(-1,1]$ and $(a,b)\subset(-1,1)$ by algebraic polynomials. In the case of half-intervals, the problem is solved completely. We construct an example to illustrate difficulties arising in the case of an open interval.

Keywords: one-sided approximation, characteristic function, polynomials

1. Введение

Односторонние интегральные приближения ступенчатых функций алгебраическими многочленами во взвешенной интегральной метрике на отрезке $[-1,1]$ фактически изучали в 1880-е годы А. А. Марков [4, ст. 1] и Т. И. Стилтьес [13] (см. [6, п. 3.411], а также леммы 9, $9'$ в [5, гл. 1, разд. 1.2]). В частности, ими была предложена конструкция многочлена четной степени $2m-2$, график которого расположен над графиком характеристической функции $\mathbf{1}_{[-1,h]}$ отрезка $[-1,h]$, $h\in(-1,1)$. В случае, когда h совпадает с одним из узлов m-точечной квадратурной формулы Гаусса, указанный многочлен является экстремальным в задаче о наилучшем взвешенном интегральном приближении сверху функции $\mathbf{1}_{[-1,h]}$. Задачи одностороннего взвешенного интегрального приближения характеристической функции интервала алгебраическими или тригонометрическими полиномами возникают в различных разделах математики, они имеют богатую историю. Приведем несколько точных результатов, имеющих непосредственное отношение к данной работе. В [11] исследовалась, в частности, задача одностороннего приближения периодического продолжения характеристической функции интервала (a,b) тригонометрическими полиномами в интегральной метрике на периоде с весом Якоби. Точное решение было найдено в [11, Theorem 3] для некоторых значений a,b, удовлетворяющих специальным уравнениям. В случае единичного веса для произвольного интервала, расположенного на периоде, задача была решена в [1]. В [8] решена задача одностороннего интегрального приближения характеристической функции произвольного полуинтервала $(h,1]\subset(-1,1]$ алгебраическими многочленами на $[-1,1]$ с единичным весом и описан весь класс экстремальных многочленов.

В данной работе изучаются аналогичные задачи на отрезке $[-1,1]$ с весом достаточно общего вида. Точнее, в разд. 3 рассматривается задача одностороннего взвешенного интегрального

[1]Исследования выполнены при поддержке РФФИ (проект 15-01-02705), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4538.2014.1), а также Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ, контракт № 02.A03.21.0006).

приближения многочленами характеристической функции полуинтервала $(a,1] \subset (-1,1]$. При этом оценки снизу получаются по известной схеме с помощью квадратурных формул наивысшей степени точности с положительными коэффициентами и с несколькими фиксированными узлами. Таким формулам посвящено большое количество работ (см. [9; 10; 12] и приведенную там библиографию). Эти формулы имеют многочисленные приложения. Наиболее удобными для наших целей являются формулы, полученные в [9; 10]. Оценки сверху найдены с помощью многочленов, способы построения которых восходят к А. А. Маркову и Т. И. Стилтьесу (см. начало данного разд.); в дальнейшем указанные способы были дополнены в [1, лемма 1; 8, Sect. 5]. Здесь также рассматривается задача одностороннего взвешенного интегрального приближения многочленами характеристической функции интервала $(a,b) \subset (-1,1)$. В разд. 3 построен пример, показывающий существенное отличие этого случая от случая полуинтервала $(a,1]$.

2. Обозначения и вспомогательные утверждения

Пусть $\mathscr{P}_m$ — множество алгебраических многочленов степени не выше m с вещественными коэффициентами. Число m условимся называть *степенью* пространства $\mathscr{P}_m$. Многочлен с единичным старшим коэффициентом называется *приведенным многочленом.*

Рассмотрим неубывающую функцию $\mu\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ с бесконечным числом точек роста. Распределение $d\mu(x)$ условимся называть *весом.* Символом L обозначим пространство вещественнозначных μ-интегрируемых на $[-1,1]$ функций $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, наделенное нормой $\|f\| = \displaystyle\int_{-1}^{1} |f(x)|\, d\mu(x)$.

Ниже неравенство $f \le g$ для функций f, g означает, что $f(x) \le g(x)$ при всех $x \in [-1,1]$.

Величины наилучшего приближения снизу и сверху ограниченной функции $f \in L$ множеством $\mathscr{P}_m$ в метрике пространства L определяются, соответственно, формулами

$$E_m^-(f) = \inf_{p \le f,\ p \in \mathscr{P}_m} \|f - p\|, \qquad E_m^+(f) = \inf_{f \le p,\ p \in \mathscr{P}_m} \|f - p\|. \tag{2.1}$$

Многочлены, реализующие точные нижние грани в (2.1), называются многочленами наилучшего (взвешенного интегрального) приближения функции f снизу и, соответственно, сверху.

Множество $\mathscr{P}_{m-1}$ алгебраических многочленов степени не выше $m-1$ является линейным подпространством пространства L размерности m. Пространство $\mathscr{P}_{m-1}^*$ всех линейных функционалов на $\mathscr{P}_{m-1}$ также имеет размерность m. Сопоставим числу $\xi \in \mathbb{R}$ линейный функционал Дирака δ_ξ, действующий на многочлены $p \in \mathscr{P}_{m-1}$ по правилу $\delta_\xi p = p(\xi)$. Известно, что если $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$, то набор функционалов $\{\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \ldots, \delta_{x_m}\}$ является базисом в $\mathscr{P}_{m-1}^*$. Поэтому любой линейный функционал на $\mathscr{P}_{m-1}$ представим в виде линейной комбинации указанных функционалов. В частности, линейный функционал I_μ, действующий на $\mathscr{P}_{m-1}$ по правилу $I_\mu p = \displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)\, d\mu(x)$, представим в виде линейной комбинации $I_\mu = \lambda_1 \delta_{x_1} + \lambda_2 \delta_{x_2} + \cdots + \lambda_m \delta_{x_m}$. При этом коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ определяются по набору $x_1, x_2, \ldots, x_m$ однозначно. Иными словами, на $\mathscr{P}_{m-1}$ справедлива формула

$$\int_{-1}^{1} p(x)\, d\mu(x) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k p(x_k), \tag{2.2}$$

которую называют *m-точечной квадратурной формулой.* Числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ называют *коэффициентами* этой квадратурной формулы, точки $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — ее *узлами*, а многочлен $w_m(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_m)$ — ее *производящим многочленом.*

Сопоставим узлу x_k *фундаментальный многочлен Лагранжа* $\ell_k(x) = \dfrac{w_m(x)}{(x - x_k) w_m'(x_k)}$, который в узле x_k принимает значение 1, а в остальных узлах — 0. Подставив его в (2.2), получим

$$\lambda_k = \int\limits_{-1}^{1} \ell_k(x)\, d\mu(x) = \frac{1}{w_m'(x_k)} \int\limits_{-1}^{1} \frac{w_m(x)}{x - x_k}\, d\mu(x), \quad k \in \{1, 2, \ldots, m\}. \tag{2.3}$$

Квадратурная формула (2.2), коэффициенты которой вычисляются по формуле (2.3), называется *интерполяционной*. Таким образом, *для того чтобы m-точечная квадратурная формула* (2.2) *была интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы она выполнялась на $\mathscr{P}_{m-1}$* (см. [3, гл. 6, § 1, теорема 1]).

В дальнейшем будут рассматриваться только такие квадратурные формулы. При этом в обозначениях коэффициентов указанных квадратурных формул будут использоваться те же индексы, что и у соответствующих узлов. Заметим, что для интерполяционной квадратурной формулы достаточно знать ее узлы (или, что равносильно, — ее производящий многочлен), поскольку в силу (2.3) коэффициенты восстанавливаются по узлам однозначно. Учитывая это обстоятельство иногда будем говорить лишь об узлах такой квадратурной формулы, либо о производящем многочлене.

Известно, что за счет специального выбора узлов можно добиться увеличения степени пространства многочленов, на котором квадратурная формула (2.2) будет оставаться справедливой (при этом коэффициенты этой формулы будут вычисляться по формуле (2.3)). Максимальная степень пространства многочленов, для которого квадратурная формула вида (2.2) справедлива, называется *степенью точности* этой квадратурной формулы.

Известно также, что существуют m-точечные интерполяционные квадратурные формулы вида (2.2) с положительными коэффициентами $\lambda_k > 0$, $k = 1, 2 \ldots, m$. Такие квадратурные формулы называются *положительными*. Важным примером положительной m-точечной квадратурной формулы является квадратурная формула Гаусса, производящий многочлен которой совпадает с приведенным многочленом $p_m(x) = p_m(x, d\mu)$ степени m, который ортогонален $\mathscr{P}_{m-1}$ с весом $d\mu$, т. е. ортогонален $\mathscr{P}_{m-1}$ относительно скалярного произведения $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x)\, d\mu(x)$. Квадратурная формула Гаусса

$$\int\limits_{-1}^{1} p(x) d\mu(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* p(x_j^*), \quad -1 < x_1^* < \cdots < x_m^* < 1, \quad p \in \mathscr{P}_{2m-1}, \tag{2.4}$$

обладает наивысшей степенью точности, равной $2m - 1$, все ее узлы лежат в открытом интервале $(-1, 1)$. Узлы и коэффициенты квадратурной формулы Гаусса зависят от m; чтобы подчеркнуть эту зависимость иногда вместо λ_j^*, x_j^* будем использовать обозначения $\lambda_{m,j}^*$, $x_{m,j}^*$.

Ниже нам понадобятся m-точечные квадратурные формулы с несколькими фиксированными узлами, при этом максимально возможной степени точности. Такие формулы для алгебраических многочленов изучались давно, начиная с исследований Р. Лобатто (1852), Э. Б. Кристоффеля (1858), Р. Радо (1880), которые относятся к случаю фиксированных узлов, расположенных в концевых точках отрезка интегрирования либо вне этого отрезка.

Обозначим символом $\mathfrak{u}$ подмножество множества узлов квадратурной формулы, состоящее из фиксированных узлов. Для наших целей достаточно рассмотреть m-точечные квадратурные формулы максимально возможной степени точности с одним, двумя или тремя фиксированными узлами. Точнее, $\mathfrak{u}$ совпадает с одним из множеств

$$\{-1\}, \quad \{1\}, \quad \{-1, 1\}, \quad \{\theta\}, \quad \{-1, \theta\}, \quad \{\theta, 1\}, \quad \{-1, \theta, 1\}, \quad \text{где} \quad \theta \in (-1, 1).$$

Пусть $Q_m^{\mathfrak{u}}$ обозначает m-точечную квадратурную формулу с фиксированным множеством узлов $\mathfrak{u}$ и с максимально возможной степенью точности $\deg Q_m^{\mathfrak{u}} = 2m - 1 - |\mathfrak{u}|$:

$$\int\limits_{-1}^{1} p(x) d\mu(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{\mathfrak{u}} p\big(x_j^{\mathfrak{u}}\big), \quad x_1^{\mathfrak{u}} < x_2^{\mathfrak{u}} < \cdots < x_m^{\mathfrak{u}}, \quad p \in \mathscr{P}_{2m-1-|\mathfrak{u}|}, \tag{2.5}$$

здесь $|\mathfrak{u}|$ означает количество точек, содержащихся в $\mathfrak{u}$. Узлы и коэффициенты этой формулы зависят от m; чтобы подчеркнуть эту зависимость, иногда вместо $\lambda_j^{\mathfrak{u}}$, $x_j^{\mathfrak{u}}$ будем использовать обозначения $\lambda_{m,j}^{\mathfrak{u}}$, $x_{m,j}^{\mathfrak{u}}$. Поскольку $m \ge |\mathfrak{u}|$, то $\deg Q_m^{\mathfrak{u}} = 2m-1-|\mathfrak{u}| \ge m-1$. Следовательно, формула (2.5) является интерполяционной. В случаях $\mathfrak{u} = \{-1\}$ или $\mathfrak{u} = \{1\}$ формула (2.5) — это левая или правая квадратурная формула Радо соответственно, а в случае $\mathfrak{u} = \{-1, 1\}$ — квадратурная формула Лобатто. Такие формулы также называют квадратурными формулами Маркова. Известно, что они являются положительными. Положим

$$\omega^{\{-1\}}(x) = 1 + x, \quad \omega^{\{1\}}(x) = 1 - x, \quad \omega^{\{-1,1\}}(x) = (1+x)(1-x). \tag{2.6}$$

Рассмотрим многочлены

$$w_m^{\{-1\}}(x) = \omega^{\{-1\}}(x) p_{m-1}\big(x, \omega^{\{-1\}} d\mu\big), \quad w_m^{\{1\}}(x) = -\omega^{\{1\}}(x) p_{m-1}\big(x, \omega^{\{1\}} d\mu\big), \tag{2.7}$$

$$w_m^{\{-1,1\}}(x) = -\omega^{\{-1,1\}}(x) p_{m-2}\big(x, \omega^{\{-1,1\}} d\mu\big), \tag{2.8}$$

где $p_k(x, d\sigma)$ — приведенный ортогональный многочлен степени k с весом $d\sigma$.

Многочлены (2.7) являются производящими многочленами левой и правой квадратурных формул Радо соответственно, а многочлен (2.8) — производящий многочлен квадратурной формулы Лобатто. Нули этих многочленов и производящего многочлена квадратурной формулы Гаусса (2.4) удовлетворяют неравенствам (см. [10, (3)–(6)])

$$x_{m,j}^{\{-1\}} < x_{m,j}^{*} < x_{m,j}^{\{1\}}, \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad x_{m-1,j}^{*} < x_{m,j+1}^{\{-1\}} < x_{m,j+1}^{\{-1,1\}}, \quad j = 1, 2, \dots, m-1;$$

$$x_{m,j}^{\{-1,1\}} < x_{m,j}^{\{1\}} < x_{m-1,j}^{*}, \quad j = 1, 2, \dots, m-1; \quad x_{m-1,j}^{\{1\}} < x_{m,j+1}^{\{-1,1\}} < x_{m-1,j+1}^{\{-1\}}, \quad j = 1, 2, \dots, m-2.$$

Ниже нам понадобится основной результат работы [10], в формулировке которого фактически используются следующие множества:

$$\mathbf{G}_m^{*} = \bigcup_{j=1}^{m} \big(x_{m,j}^{\{-1\}}, x_{m,j}^{\{1\}}\big) \setminus \big\{x_{m,j}^{*}\big\}, \quad m \ge 1;$$

$$\mathbf{G}_m^{\{-1\}} = \bigcup_{j=1}^{m-1} \big(x_{m-1,j}^{*}, x_{m,j+1}^{\{-1,1\}}\big) \setminus \big\{x_{m,j+1}^{\{-1\}}\big\}, \quad \mathbf{G}_m^{\{1\}} = \bigcup_{j=1}^{m-1} \big(x_{m,j}^{\{-1,1\}}, x_{m-1,j}^{*}\big) \setminus \big\{x_{m,j}^{\{1\}}\big\}, \quad m \ge 2;$$

$$\mathbf{G}_m^{\{-1,1\}} = \bigcup_{j=1}^{m-2} \big(x_{m-1,j}^{\{1\}}, x_{m-1,j+1}^{\{-1\}}\big) \setminus \big\{x_{m,j+1}^{\{-1,1\}}\big\}, \quad m \ge 3.$$

Обратим внимание на то (см. [10, Sect. 1]), что

$$\overline{\mathbf{G}_m^{\{1\}} \bigcup \mathbf{G}_{m-1}^{\{-1\}}} = \overline{\mathbf{G}_{m-1}^{*} \bigcup \mathbf{G}_m^{\{-1,1\}}} = [-1, 1]. \tag{2.9}$$

Сопоставим множеству $G_m \in \{\mathbf{G}_m^{\{-1\}}, \mathbf{G}_m^{\{1\}}, \mathbf{G}_m^{\{-1,1\}}\}$ многочлен $\omega(x) = \omega(x, G_m)$, совпадающий с соответствующим многочленом из (2.6), а множеству $\mathbf{G}_m^{*}$ — многочлен $\omega(x) = \omega(x, \mathbf{G}_m^{*}) \equiv 1$. Для пары (G_m, θ), где $G_m \in \{\mathbf{G}_m^{*}, \mathbf{G}_m^{\{-1\}}, \mathbf{G}_m^{\{1\}}, \mathbf{G}_m^{\{-1,1\}}\}$, $\theta \in G_m$ определим многочлен

$$W_m^{\{\theta\}}(x, G_m) = \omega(x) \Big(p_\nu(x, \omega\, d\mu) - \frac{p_\nu(\theta, \omega\, d\mu)}{p_{\nu-1}(\theta, \omega\, d\mu)} p_{\nu-1}(x, \omega\, d\mu) \Big), \tag{2.10}$$

где $\omega(x) = \omega(x, G_m)$, $\nu = m - \deg \omega$.

Следуя работе [10, Sect. 1], m-точечную квадратурную формулу с одним фиксированным узлом $\theta \in (-1, 1) \setminus \{x_{m,j}^{*}\}_{j=1}^{m}$ наивысшей степени точности (равной $2m-2$) назовем *модифицированной* квадратурной формулой Гаусса. Аналогично определим *модифицированные* левую и правую m-точечные квадратурные формулы Радо наивысшей степени точности (равной $2m-3$), а также *модифицированную* m-точечную квадратурную формулу Лобатто наивысшей степени точности (равной $2m-4$), т. е. к фиксированным узлам соответствующих формул добавляется еще один фиксированный узел $\theta \in (-1,1)$, не совпадающий ни с одним узлом соответствующей классической m-точечной формулы. Сформулируем основной результат упомянутой работы в терминах, введенных выше.

Теорема А [10, Theorem 1.1]. *Положительные модифицированные квадратурные формулы Гаусса, левая и правая формулы Радо и формула Лобатто с фиксированным узлом* $\theta \in (-1,1)$ *существуют тогда и только тогда, когда* θ *принадлежит, соответственно, множеству* $\mathbf{G}_m^*$, $m \ge 1$; $\mathbf{G}_m^{\{-1\}}$, $m \ge 2$; $\mathbf{G}_m^{\{1\}}$, $m \ge 2$; $\mathbf{G}_m^{\{-1,1\}}$, $m \ge 3$. *Производящий многочлен для этих модифицированных квадратурных формул задается равенством* (2.10), *в котором* G_m *совпадает, соответственно, с* $\mathbf{G}_m^*$, $\mathbf{G}_m^{\{-1\}}$, $\mathbf{G}_m^{\{1\}}, \mathbf{G}_m^{\{-1,1\}}$. *Следовательно, указанные модифицированные квадратурные формулы единственны.*

Положительные квадратурные формулы применяются (см. теорему B ниже) для оценки снизу величин (2.1) наилучшего одностороннего (взвешенного интегрального) приближения ограниченной функции $f \in L$ многочленами. В данной работе в качестве приближаемой функции будет рассматриваться характеристическая функция $\mathbf{1}_J(x) = \begin{cases} 1, & x \in J, \\ 0, & x \in [-1,1] \setminus J, \end{cases}$ подмножества $J \subset [-1,1]$. В случае $J = (a,1]$ для оценки сверху величин наилучшего одностороннего приближения функции $\mathbf{1}_{(a,1]}$ будут использоваться интерполяционные многочлены Эрмита, интерполирующие функцию $\mathbf{1}_{(a,1]}$ в узлах положительных квадратурных формул.

Приведем условия интерполяции функции $\mathbf{1}_{(a,1]}$ многочленами на $[-1,1]$. Пусть

$$s, r \in \{0,1\}, \quad \ell, k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\dots\}, \quad s + \ell \ge 1.$$

Упорядоченной четверке (s,ℓ,k,r) поставим в соответствие тип $T(s,\ell,k,r)$ условий интерполяции функции $\mathbf{1}_{(a,1]}$ многочленом p минимально возможной степени. Указанный тип характеризует расположение узлов интерполяции и их кратность.

Опишем значение каждого из параметров s,ℓ,k,r. Если $s=0$, то -1 не является узлом интерполяции; если $s=1$, то -1 является узлом интерполяции, т. е. $p(-1)=0$. Число ℓ означает количество узлов интерполяции $x_1 < x_2 < \dots < x_\ell$, расположенных в интервале $(-1,a)$, причем каждый из них имеет двойную кратность: $p(x_j)=0,\ p'(x_j)=0,\ j=1,2,\dots,\ell$; точка $x_{\ell+1}=a$ всегда является (простым) узлом интерполяции, т. е. $p(a)=0$; если $\ell=0$, то в $(-1,a)$ нет узлов интерполяции. Число k означает количество узлов интерполяции $x_{\ell+2} < x_{\ell+3} < \dots < x_{\ell+k+1}$, расположенных в интервале $(a,1)$, причем каждый из них имеет двойную кратность: $p(x_j)=1$, $p'(x_j)=0,\ j=\ell+2,\ell+3,\dots,\ell+k+1$; если $k=0$, то в $(a,1)$ нет узлов интерполяции. Если $r=0$, то 1 не является узлом интерполяции; если $r=1$, то 1 — узел интерполяции: $p(1)=1$.

Многочлен p (минимально возможной степени), реализующий тип $T(s,\ell,k,r)$ условий эрмитовой интерполяции функции $\mathbf{1}_{(a,1]}$, для краткости будем называть *многочленом типа* $T(s,\ell,k,r)$. Степень этого многочлена равна количеству условий интерполяции минус один, т. е. $\deg p = s + r + 2(\ell+k)$. Известно (см. [2, гл. 2, § 11]), что при более общих условиях интерполяционный многочлен Эрмита (минимально возможной степени) существует и является единственным.

Для нахождения величины наилучшего одностороннего приближения функции $\mathbf{1}_{(a,1]}$ многочленами заданной степени и построения соответствующего экстремального многочлена нам понадобится лемма, которая для многочлена p типа $T(0,\ell,k,0)$ представляет собой результат А. А. Маркова и Т. И. Стилтьеса, упомянутый в самом начале разд. 1.

Лемма. *Пусть* $s,r \in \{0,1\}$, $\ell,k \in \mathbb{Z}_+$, $s+\ell \ge 1$, $h \in (-1,1)$, p — *интерполяционный многочлен* (*минимально возможной степени*), *реализующий тип* $T(s,\ell,k,r)$ *условий интерполяции функции* $\mathbf{1}_{(a,1]}$. *Тогда* $p(x) \le \mathbf{1}_{(a,1]}(x)$ *при всех* $x \in [-1,1]$.

Доказательство следует из [1, лемма 1] после косинус-замены. □

Теорема B (Р. Боянич, Р. Девор [7]). *Пусть на $\mathscr{P}_n$ выполняется положительная квадратурная формула*

$$\int_{-1}^{1} p(x)\,d\mu(x) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k p(x_k), \quad -1 \le x_1 < x_2 < \dots < x_m \le 1. \tag{2.11}$$

Тогда для любой ограниченной функции $f \in L$ имеют место неравенства

$$E_n^-(f) \ge \int_{-1}^{1} f(x)\,d\mu(x) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f(x_k); \qquad E_n^+(f) \ge \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f(x_k) - \int_{-1}^{1} f(x)\,d\mu(x). \tag{2.12}$$

Подстановка в (2.12) характеристической функции подмножества $J \subset [-1,1]$ приводит к следующему утверждению.

Предложение 1. *Для $f = \mathbf{1}_J$, где $J \subset [-1,1]$, имеем $E_n^-(\mathbf{1}_J) \ge \int_J d\mu(x) - \sum \lambda_k$, $E_n^+(\mathbf{1}_J) \ge \sum \lambda_k - \int_J d\mu(x)$, где суммы берутся по таким индексам k, для которых $x_k \in J$. Если к тому же J не содержит узлов квадратурной формулы (2.11), то $E_n^-(\mathbf{1}_J) = \int_J d\mu(x)$, при этом $p \equiv 0$ является многочленом наилучшего приближения снизу. В частности, это утверждение справедливо в случае, когда J есть открытый интервал $(a,b) \subset [-1,1]$, при условии $x_k \le a < b \le x_{k+1}$, где x_k, x_{k+1} — произвольная пара соседних узлов квадратурной формулы (2.11). Если правая концевая точка отрезка $[-1,1]$ не является узлом квадратурной формулы (2.11), то в качестве множества J можно взять полуинтервал $(a,1]$, где a не меньше максимального узла квадратурной формулы (2.11).*

Несложно понять, что если многочлен $p^- \in \mathscr{P}_n$ реализует точную нижнюю грань в задаче о вычислении величины $E_n^-(\mathbf{1}_J)$, то многочлен $p^+ = 1 - p^-$ реализует точную нижнюю грань в задаче о вычислении $E_n^+(\mathbf{1}_{[-1,1]\setminus J})$. При этом $E_n^+(\mathbf{1}_{[-1,1]\setminus J}) = E_m^-(\mathbf{1}_J)$. Учитывая это обстоятельство, в дальнейшем будем рассматривать только задачу об одностороннем приближении снизу характерестической функции подмножества J отрезка $[-1,1]$.

3. Приближение снизу характеристической функции полуинтервала. Пример в случае открытого интервала

Перейдем к более детальному изучению задачи приближения снизу характеристической функции $\mathbf{1}_{(a,1]}$ полуинтервала $(a,1] \subset [-1,1]$.

Предложение 2. *При любом $m \in \mathbb{N}$ выполняются равенства*

$$E_n^-(\mathbf{1}_{(a,1]}) = \int_{(a,1]} d\mu(x) \quad \text{при} \quad \begin{cases} n = 2m-1, & x^*_{m,m} \le a < 1; \\ n = 2m-2, & x^{\{-1\}}_{m,m} \le a < 1, \end{cases}$$

многочлен $p \equiv 0$ является многочленом наилучшего приближения функции $\mathbf{1}_{(a,1]}$ снизу.

Для доказательства этого утверждения достаточно воспользоваться предложением 1 с учетом положительности m-точечных квадратурных формул Гаусса (2.4) и левой формулы Радо (см. (2.5)).

Теорема 1. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, число a совпадает с каким-либо из узлов m-точечной квадратурной формулы Гаусса* (2.4)*, отличным от максимального, то есть $a = x^*_{v,m}$, где $v \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$. Тогда $E^-_{2m-1}(\mathbf{1}_{(a,1]}) = \int_{(a,1]} d\mu(x) - \sum_{j=v+1}^m \lambda^*_{m,j}$, при этом многочленом наилучшего приближения снизу является многочлен p типа $T(0, \ell, k, 0)$ степени $2m-2$, который интерполирует функцию $\mathbf{1}_{(a,1]}$ в узлах квадратурной формулы Гаусса* (2.4)*. Кроме того, $E^-_{2m-2}(\mathbf{1}_{(a,1]}) = E^-_{2m-1}(\mathbf{1}_{(a,1]})$.*

Доказательство. Из результата Маркова — Стилтьеса (см. [5, гл. 1, разд. 1.2, лемма 9′]) следует, что $p \leq \mathbf{1}_{(a,1]}$. Этот многочлен влечет оценку сверху для искомой величины $E^-_{2m-1}(\mathbf{1}_{(a,1]})$. Совпадающая с ней оценка снизу следует из предложения 1. Последнее утверждение теоремы справедливо, поскольку степень экстремального многочлена равна $2m-2$. □

Теорема 2. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$, число a совпадает с каким-либо узлом m-точечной левой квадратурной формулы Радо (см.* (2.5)*), отличным от минимального и максимального, то есть $a = x^{\{-1\}}_{v,m}$, где $v \in \{2, 3, \ldots, m-1\}$. Тогда $E^-_{2m-2}(\mathbf{1}_{(a,1]}) = \int_{(a,1]} d\mu(x) - \sum_{j=v+1}^m \lambda^{\{-1\}}_{m,j}$, многочленом наилучшего приближения снизу является многочлен p типа $T(1, \ell, k, 0)$ степени $2(\ell+k)+1 = 2m-3$, который интерполирует функцию $\mathbf{1}_{(a,1]}$ в узлах указанной квадратурной формулы Радо. Кроме того, $E^-_{2m-3}(\mathbf{1}_{(a,1]}) = E^-_{2m-2}(\mathbf{1}_{(a,1]})$.*

Доказательство. В силу леммы указанный в формулировке теоремы многочлен p является допустимым, точнее, $p \leq \mathbf{1}_{(a,1]}$, $p \in \mathscr{P}_{2m-3} \subset \mathscr{P}_{2m-2}$. Поэтому он дает нужную оценку сверху для $E^-_{2m-2}(\mathbf{1}_{(a,1]})$. Такая же оценка снизу следует из предложения 1, поскольку m-точечная левая квадратурная формула Радо является положительной и выполняется на $\mathscr{P}_{2m-2}$. Последнее утверждение теоремы справедливо, поскольку степень экстремального многочлена равна $2m-3$. □

Применяя аналогичные рассуждения, базирующиеся на предложении 1, лемме и на положительности правой квадратурной формулы Радо и квадратурной формулы Лобатто, найдем величину наилучшего приближения снизу функции $\mathbf{1}_{(a,1]}$ в случае, когда число a совпадает с одним из узлов этих формул, отличным от концевых точек отрезка $[-1, 1]$. При этом соответственно многочлены типов $T(0, \ell, k, 1)$, $T(1, \ell, k, 1)$, интерполирующие функцию $\mathbf{1}_{(a,1]}$ в узлах соответствующих формул, будут экстремальными, причем их степень на единицу меньше, чем степень точности соответствующей квадратурной формулы.

Для решения задачи наилучшего приближения снизу функции $\mathbf{1}_{(a,1]}$ многочленами в оставшихся случаях расположения точки a, надо провести точно такие же рассуждения, основанные на положительных модифицированных квадратурных формулах из теоремы A, принимая во внимание утверждение (2.9). При этом степень экстремальных многочленов будет совпадать со степенью точности соответствующих модифицированных формул. Так, например, в случае, когда точка θ принадлежит множеству $\mathbf{G}^*_m$, справедлива теорема, аналогичная теореме 1, в которой через $x^{*,\theta}_{j,m}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, обозначены нули производящего многочлена $W^{\{\theta\}}_m(x, \mathbf{G}^*_m)$ (см. (2.10)) модифицированной m-точечной квадратурной формулы Гаусса, а через $\lambda^{*,\theta}_{j,m}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, — коэффициенты этой квадратурной формулы.

Теорема 3. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $\theta \in \mathbf{G}^*_m$, число a совпадает с каким-либо из нулей производящего многочлена $W^{\{\theta\}}_m(x, \mathbf{G}^*_m)$ модифицированной m-точечной квадратурной формулы Гаусса, при этом число a не является его максимальным нулем, то есть $a = x^{*,\theta}_{v,m}$, где $v \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$. Тогда $E^-_{2m-2}(\mathbf{1}_{(a,1]}) = \int_{(a,1]} d\mu(x) - \sum_{j=v+1}^m \lambda^{*,\theta}_{m,j}$. Многочленом наилучшего приближения снизу является многочлен p типа $T(0, \ell, k, 0)$ степени $2m-2$, который интерполирует функцию $\mathbf{1}_{(a,1]}$ в узлах указанной модифицированной формулы.*

В заключение приведем пример, показывающий существенное различие задач приближения снизу характеристических функций открытого интервала и полуинтервала.

П р и м е р. Рассмотрим трехточечную квадратурную формулу Гаусса на $[-1,1]$ с весом $d\mu(x)=dx$. Степень точности этой формулы равняется пяти, точки $x_1=-\sqrt{3/5}$, $x_2=0$, $x_3=\sqrt{3/5}$ — ее узлы. Обозначим $b=2/5$, $A=-5(5b+\sqrt{15})/(9b^2)$, $c=-\sqrt{15}\,b/(5b+\sqrt{15})$. Несложно проверить, что многочлен $p(x)=A(x+x_1)(x-b)(x-x_1)^2(x-c)$ пятой степени интерполирует функцию $\mathbf{1}_{(x_1,b)}$ следующим образом: $p(x_1)=p(b)=p(x_3)=0$, $p(x_2)=1$, $p'(x_2)=p'(x_3)=0$. Нетрудно убедиться в том, что на $[-1,x_1)$ этот многочлен положителен, следовательно, его график не лежит под графиком характеристической функции $\mathbf{1}_{(x_1,b)}$ на этом полуинтервале.

Авторы благодарны профессору В. В. Арестову за ряд ценных замечаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бабенко А.Г., Крякин Ю.В., Юдин В.А.** Одностороннее приближение в L характеристической функции интервала тригонометрическими полиномами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, вып. 1. С. 82–95.
2. **Березин И.С., Жидков Н.П.** Методы вычислений: учеб. пособ.: в 2 т. 2-е изд., стереотип. М.: Физматгиз, 1962. Т. 1. 464 с; Т. 2. 639 с.
3. **Крылов В.И.** Приближенное вычисление интегралов. М.: Физматлит, 1959. 327 с.
4. **Марков А.А.** Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 411 с.
5. **Постников А.Г.** Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Наука, 1971. 416 с.
6. **Сеге Г.** Ортогональные многочлены. М. : Физматгиз, 1962. 500 с.
7. **Bojanic R., DeVore R.** On polynomials of best one-sided approximation // Enseign. Math. 1966. Vol. 2, no. 12. P. 139–164.
8. **Bustamante J., Martínez-Cruz R., Quesada J.M.** Quasi orthogonal Jacobi polynomials and best one-sided L_1 approximation to step functions // J. Approx. Theory. 2015. Vol. 198. P. 10–23.
9. **Bultheel A., Cruz-Barroso R., Van Barel M.** On Gauss-type quadrature formulas with prescribed nodes anywhere on the real line // Calcolo. 2010 Vol. 47, no. 1. P. 21–48.
10. Gaussian, Lobatto and Radau positive quadrature rules with a prescribed abscissa / B. Beckermann, J. Bustamante, R. Martinez-Cruz, J. M. Quesada // Calcolo. 2014. Vol. 51, no. 2, P. 319–328.
11. **Li X.-J., Vaaler J.D.** Some trigonometric extremal functions and the Erdos–Turan type inequalities // Ind. Univ. Math. J. 1999. Vol. 48, no. 1. P. 183–236.
12. **Peherstorfer F.** Positive quadrature formulas III: asymptotics of weights // Math. Comput. 2008. Vol. 77, no. 264. P. 2241–2259.
13. **Stieltjes T.J.** Quelques recherches sur la theorie des quadratures dites mechaniques // Annales Sc. de l'Ecole Norm. Super. 1884. Vol. 1, no. 3. P. 409–426.

Поступила 07.09.2015

Бабенко Александр Григорьевич
д-р физ.-мат. наук
Институт математики и механики УрО РАН,
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета
e-mail: babenko@imm.uran.ru

Дейкалова Марина Валерьевна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета,
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: Marina.Deikalova@urfu.ru

Ревес Силард Дьордь
д-р академии, научный советник
Институт математики имени Альфреда Реньи
Венгерской академии наук
e-mail: revesz.szilard@renyi.mta.hu