ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 517.5

ОЦЕНКИ КОЛМОГОРОВСКИХ ПОПЕРЕЧНИКОВ КЛАССОВ НИКОЛЬСКОГО — БЕСОВА — АМАНОВА В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА[1]

Г. Акишев

В данной статье рассматривается пространство Лоренца с анизотропной нормой периодических функций многих переменных. Установлены оценки колмогоровских поперечников классов Никольского — Бесова — Аманова в пространстве Лоренца с анизотропной нормой.

Ключевые слова: пространство Лоренца, класс Никольского — Бесова, колмогоровский поперечник.

G. Akishev. Estimates for Kolmogorov widths of the Nikol'skii–Besov–Amanov classes in the Lorentz space.

The Lorentz space with anisotropic norm of periodic functions of several variables is considered. Estimate for the Kolmogorov widths of the Nikol'skii–Besov–Amanov classes in the Lorentz space with anisotropic norm are found.

Keywords: Lorentz space, Nikol'skii–Besov class, Kolmogorov width.

Введение

Пусть $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in I^m = [0, 2\pi)^m$ и числа $\theta_j, q_j \in [1, +\infty)$, $j = 1, \ldots, m$.

Через $S_0(\mathbb{R}^m)$ обозначается класс всех измеримых по Лебегу почти всюду конечных функций f на $\mathbb{R}^m$ таких, что для любого числа $y > 0$ мера Лебега множества $\{\bar{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \colon |f(\bar{x})| > y\}$ конечна; мера этого множества называется *функцией распределения* и обозначается $\lambda_f(y)$ (см., например, [1; 2]). Функции $f, g \in S_0(\mathbb{R}^m)$ называются *равноизмеримыми*, если их функций распределения равны.

Невозрастающей перестановкой функции $f \in S_0(\mathbb{R}^m)$ называется невозрастающая на полуоси $(0, +\infty)$ функция f^*, равноизмеримая с $|f|$; она определяется по следующей формуле (см., например, [1; 2]): $f^*(t) = \inf\{y > 0 \colon \lambda_f(y) < t\}$, $t > 0$.

Рассмотрим теперь повторные перестановки функции. Пусть $f \in S_0(\mathbb{R}^m)$. При фиксированных $x_2, \ldots, x_m$, рассматривая $|f(x_1, x_2, \ldots, x_m)|$ как функцию переменной x_1, можно определить ее невозрастающую перестановку $f^{*_1}(t_1, x_2, \ldots, x_m)$ по x_1. Теперь при фиксированных $t_1, x_3, \ldots, x_m$ по функции $f^{*_1}(t_1, x_2, x_3 \ldots, x_m)$ определяется ее невозрастающая перестановка $f^{*_1,*_2}(t_1, t_2, x_3, \ldots, x_m)$ по x_2. Далее, продолжая этот процесс при фиксированных $t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}$ по функции $f^{*_1,\ldots,*_{m-1}}(t_1, t_2, t_3 \ldots, t_{m-1}, x_m)$ определяется (см. [2; 3]) ее невозрастающая перестановка $f^{*_1,*_2,\ldots,*_{m-1},*_m}(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ по x_m.

Через $L^*_{\bar{q},\bar{\theta}}(I^m)$ обозначим пространства всех измеримых по Лебегу функций $f(\bar{x})$ 2π-периодических по каждой переменной, для которых конечна величина (см. [3])

$$\|f\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}} = \left[\int\limits_0^{2\pi} t_m^{\frac{\theta_m}{q_m}-1} \left[\cdots \left[\int\limits_0^{2\pi} \Big(f^{*_1,\ldots,*_m}(t_1, \ldots, t_m) \Big)^{\theta_1} t_1^{\frac{\theta_1}{q_1}-1} dt_1 \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \cdots \right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}} dt_m \right]^{\frac{1}{\theta_m}}.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства Российской Федерации, контракт № 02.A03.21.0006) и частично гранта 5129/ГФ4 Министерства образования и науки РК.

В случае $q_1 = \dots = q_m = \theta_1 = \dots = \theta_m = q$ пространство $L^*_{\overline{q},\overline{\theta}}(I^m)$ совпадает с пространством Лебега $L_q(I^m)$ (см. [4, гл. I, п. 1.1]). В дальнейшем $\overset{\circ}{L}{}^*_{\overline{q},\overline{\theta}}(I^m)$ означает множество всех функций $f \in L^*_{\overline{q},\overline{\theta}}(I^m)$ таких, что $\int_0^{2\pi} f(\overline{x})\,dx_j = 0$ при $j = 1, \dots, m$.

Функции $f \in L_1(I^m) = L(I^m)$ сопоставим ее ряд Фурье $\sum_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m} a_{\overline{n}}(f)\, e^{i\langle \overline{n},\overline{x}\rangle}$ по кратной тригонометрической системе $\{e^{i\langle \overline{n},\overline{x}\rangle}\}_{\mathbb{Z}^m}$, где $\mathbb{Z}^m$ — целочисленная решетка в $\mathbb{R}^m$. Положим

$$\delta_{\overline{s}}(f,\overline{x}) = \sum_{\overline{n}\in\rho(\overline{s})} a_{\overline{n}}(f)\, e^{i\langle \overline{n},\overline{x}\rangle}, \quad \text{где} \quad \langle \bar{y},\bar{x}\rangle = \sum_{j=1}^m y_j x_j, \quad s_j = 1,2,\dots,$$

$$\rho(\bar{s}) = \left\{\overline{k} = (k_1,\dots,k_m) \in \mathbb{Z}^m \colon 2^{s_j-1} \le |k_j| < 2^{s_j},\ j = 1,\dots,m\right\}.$$

Пусть l_p^m при $1 \le p \le \infty$ обозначает пространство $\mathbb{R}^m$ с нормой

$$\|\bar{x}\|_{l_p^m} = \left(\sum_{j=1}^m |x_j|^p\right)^{1/p} \quad \text{при} \quad 1 \le p < +\infty, \quad \|\bar{x}\|_{l_\infty^m} = \max_{j=1,\dots,m} |x_j|.$$

Обозначим через U_p^m единичный шар в l_p^m.

Числовая последовательность $\{a_{\overline{n}}\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m} \in l_{\overline{p}}$, если

$$\left\|\{a_{\overline{n}}\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m}\right\|_{l_{\overline{p}}} = \left\{\sum_{n_m=-\infty}^{\infty}\left[\dots\left[\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} |a_{\overline{n}}|^{p_1}\right]^{\frac{p_2}{p_1}}\dots\right]^{\frac{p_m}{p_{m-1}}}\right\}^{\frac{1}{p_m}} < +\infty,$$

где $\overline{p} = (p_1,\dots,p_m)$, $1 \le p_j < +\infty$, $j = 1,2,\dots,m$.

Через $C(p,q,r,y)$ обозначим положительные величины, зависящие от указанных в скобках параметров, вообще говоря, различные в разных формулах. Для положительных величин $A(y), B(y)$ запись $A(y) \asymp B(y)$ означает, что существуют положительные числа C_1, C_2 такие, что $C_1 A(y) \le B(y) \le C_2 A(y)$.

Пространства функций с доминирующей смешанной производной $S_p^{\bar{r}}H$, $S_{p,\theta}^{\bar{r}}B$ определены соответственно С. М. Никольским [5] и Т. И. Амановым [6] в терминах смешанных модулей гладкости соответствующих смешанных производных (см. также [4; 7]).

П. И. Лизоркин и С. М. Никольский [8, теорема 5.3] исследовали декомпозиционное разложение элементов пространства $\overset{\circ}{S}{}_{p,\theta}^{\bar{r}}B$ и доказали, что величина

$$\left\{\sum_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \bar{s},\bar{r}\rangle\theta}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^\theta\right\}^{1/\theta}$$

является нормой пространства $\overset{\circ}{S}{}_{p,\theta}^{\bar{r}}B$, эквивалентной исходной при $1 < p < +\infty,\ 1 \le \theta \le +\infty$. Здесь $\overset{\circ}{S}{}_{p,\theta}^{\bar{r}}B = \overset{\circ}{L}_p(I^m) \cap S_{p,\theta}^{\bar{r}}B$.

В анизотропном пространстве Лоренца $\overset{\circ}{L}{}^*_{\overline{p},\overline{\theta}}(I^m)$ рассмотрим аналогичное пространство. Через $\overset{\circ}{S}{}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}^{\overline{r}}B$ обозначим пространство всех функций $f \in \overset{\circ}{L}{}^*_{\overline{p},\overline{\theta}}(I^m)$, для которых

$$\|f\|_{\overset{\circ}{S}{}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}^{\overline{r}}B} = \left\|\left\{2^{\langle \overline{s},\overline{r}\rangle}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^*_{\overline{p},\overline{\theta}}\right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\right\|_{l_{\overline{\tau}}} < \infty,$$

где $\overline{p} = (p_1,\dots,p_m)$, $\overline{\theta} = (\theta_1,\dots,\theta_m)$, $\overline{\tau} = (\tau_1,\dots,\tau_m)$, $1 < p_j < \infty$, $1 \le \theta_j < \infty$, $1 \le \tau_j \le +\infty$, $r_j > 0$, $j = 1,\dots,m$. В этом пространстве рассмотрим (с сохранением обозначения) класс

$$\overset{\circ}{S}{}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}^{\overline{r}}B = \left\{f \in \overset{\circ}{L}{}^*_{\overline{p},\overline{\theta}}(I^m) \colon \ \|f\|_{\overset{\circ}{S}{}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}^{\overline{r}}B} = \left\|\left\{2^{\langle \overline{s},\overline{r}\rangle}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^*_{\overline{p},\overline{\theta}}\right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\right\|_{l_{\overline{\tau}}} \le 1\right\}.$$

Понятие поперечника как аппроксимативной характеристики подмножеств банахова пространства было введено А. Н. Колмогоровым [9].

О п р е д е л е н и е. Пусть банахово пространство X и центрально-симметричное подмножество $W \subset X$. M-поперечником по Колмогорову множества W называется величина

$$d_M(W, X) = \inf_P \sup_{f \in W} \|f - Pf\|_X,$$

где inf берется по всем действующим в X отображениям P на линейные подпространства размерности не более M.

В одномерном случае для класса Соболева W_p^r при условии $r > (1/p - 1/q)_+$ известна следующая оценка:

$$d_M(W_p^r, L_q) \asymp \begin{cases} M^{-r}, & 1 \le q \le p \le \infty,\ r > 0, \\ M^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, & 1 < p \le q < 2,\ r > 1/p - 1/q, \\ M^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, & 1 < p \le 2 \le q \le \infty,\ r > 1/p, \\ M^{-r}, & 2 \le p \le q < \infty,\ r > \dfrac{1/p - 1/q}{1 - 2/q}. \end{cases}$$

При $p = q = 2$ точные значения $d_M(W_p^r, L_q)$ получены А. Н. Колмогоровым [9]; в случае $q = p = 2, r = 1$ порядок найден В. Рудиным [10], а при $p = 1, q = 2$ и $p = q = \infty$ — С. Б. Стечкиным [11], при $p = q = \infty$ точные значения определены В. М. Тихомировым [12], при $1 \le p = q < \infty$ порядки найдены С. Б. Бабаджановым и В. М. Тихомировым [13], при $p = q = 1$ и нечетном M точное значение установлено Ю. Н. Субботиным [14; 15], при $1 \le p \le q \le 2$ порядки найдены Р. С. Исмагиловым [16; 17], Е. Д. Глускиным [18] (случай $p = 1, 2 < q \le \infty$), Б. С. Кашиным [19] (случай $1 \le p \le q \le \infty,\ q \ge 2$), Ю. И. Маковозом [20] (при $1 \le q \le p$). Оценки поперечников классов Соболева малой гладкости получены Б. С. Кашиным [21] и Е. Д. Куланиным [22].

Оценки колмогоровских поперечников классов гладких функций многих переменных установили К. И. Бабенко [23], Б. С. Митягин [24], С. А. Теляковский [25], Я. С. Бугров [26], Э. М. Галеев [27–29], В. Н. Темляков [30; 31], Динь Зунг [32], Э. С. Белинский [33; 34], А. С. Романюк [35–37], Ван Хэпин и Сунь Юншен [38], Д. Б. Базарханов [39] и др.

Для класса Бесова $S^r_{p,\theta}B$ А. С. Романюк [35] доказал следующую теорему.

Теорема А. *Пусть* $r_1 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} < \ldots < r_m$, $1 \le \theta \le \infty$.

1. *Если* $2 \le p < q < \infty$ *и* $r_1 > \beta = (1/p - 1/q)/(1 - 2/q)$, *то*

$$d_M(S^r_{p,\theta}B, L_q) \asymp \Big(\frac{\log^{\nu-1} M}{M}\Big)^{r_1} (\log M)^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}.$$

2. *Если* $1 < p \le 2 < q < \infty$ *и* $r_1 > 1/p$, *то*

$$d_M(S^r_{p,\theta}B, L_q) \asymp \Big(\frac{\log^{\nu-1} M}{M}\Big)^{r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}} (\log M)^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}.$$

Здесь и в дальнейшем $\log M$ — логарифм с основанием 2 от числа $M > 1$.

Для других соотношений между p и q оценки $d_M(S^r_{p,\theta}B, L_q)$ получены Э. М. Галеевым [29].

Цель настоящей статьи — найти оценки колмогоровского поперечника класса $\overset{\circ}{S}{}^{\bar r}_{\bar p,\bar\theta,\bar\tau}B$ в пространстве $L^*_{\bar q,\bar\theta}(I^m)$.

1. Вспомогательные утверждения

Приведем некоторые дополнительные обозначения и вспомогательные утверждения.

Пусть $\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m$ и $\Im(\rho(\bar{s}))$ — множество функций вида $f(\bar{x}) = \sum_{\overline{n}\in\rho(\overline{s})} a_{\bar{n}} e^{i\langle\bar{n},\bar{x}\rangle}$.

Лемма 1 [29, лемма Д]. *Пусть* $\bar{s} \in \mathbb{N}^m$, $f \in \Im(\rho(\bar{s}))$, $M_{\bar{s}} \in Z_+$, $M_{\bar{s}} \le 2^{\langle\bar{s},\bar{1}\rangle} = \prod_{j=1}^m 2^{s_j}$, $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m), \alpha_j = r_j + 1/q - 1/p$, $j = 1, \ldots, m$, $1 < p, q < +\infty$. *Тогда существуют линейное подпространство* $\mathbb{L}_{M_s} \subset \Im(\rho(\bar{s}))$ *размерности* $M_{\bar{s}}$ *и оператор* $P_{M_{\bar{s}}}\colon \Im(\rho(\bar{s})) \to \mathbb{L}_{M_s}$ *такой, что*

$$\|\delta_{\bar{s}}(f) - P_{M_{\bar{s}}}\delta_{\bar{s}}(f)\|_q \asymp d_{M_{\bar{s}}}\Big(U_p^{2^{\langle\bar{s},\bar{1}\rangle}}, l_q^{2^{\langle\bar{s},\bar{1}\rangle}}\Big) 2^{\langle\bar{s},-\bar{\alpha}\rangle}\|\delta_{\bar{s}}(f^{(r)})\|_p.$$

Для вектора $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$, $\gamma_j > 0$, $j = 1, \ldots, m$, положим

$$Y^m(\overline{\gamma}, n) = \big\{\overline{s} = (s_1, \ldots, s_m) \in \mathbb{Z}_+^m : \langle\bar{x}, \bar{\gamma}\rangle \ge n\big\}$$

Лемма 2 (см. [40]). *Пусть даны число* $\alpha \in (0, +\infty)$ *и* $\overline{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$, $\overline{\gamma}' = (\gamma_1', \ldots, \gamma_m')$, $\overline{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$, $\theta_j \in [1, +\infty)$, $j = 1, \ldots, m$, $1 = \gamma_1 = \cdots = \gamma_\nu < \gamma_{\nu+1} \le \cdots \le \gamma_m$, $1 = \gamma_j' = \gamma_j$, $j = 1, \ldots, \nu$, *и* $1 = \gamma_j' < \gamma_j$, $j = \nu+1, \ldots, m$. *Тогда имеет место соотношение*

$$\Big\|\big\{2^{-\alpha\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle}\big\}_{\overline{s}\in Y^m(\overline{\gamma}',n)}\Big\|_{l_{\overline{\theta}}} \asymp 2^{-n\alpha} n^{\sum_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j}}.$$

2. Основные результаты

В данном разделе докажем оценки поперечника по Колмогорову в пространстве $L_{\bar{p},\bar{q}}^*(I^m)$ класса Никольского — Бесова — Аманова $\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}B$.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p_j < q_j \le 2$, $1 < \theta_j^{(1)}, \theta_j^{(2)} < \infty$, $1 \le \tau_j \le \infty$, $j = 1, \ldots m$, *и* $0 < r_1 + 1/q_1 - 1/p_1 = \cdots = r_\nu + 1/q_\nu - 1/p_\nu < r_{\nu+1} + 1/q_{\nu+1} - 1/p_{\nu+1} \le \cdots \le r_m + 1/q_m - 1/p_m$. *Тогда*

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B,\ L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \le C\Big(\frac{\log^{\nu-1} M}{M}\Big)^{\left(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)}(\log M)^{\sum_{j=2}^{\nu}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j}\right)_+}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in \overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B$ и $\gamma_j = (r_j + 1/q_j - 1/p_j)/(r_1 + 1/q_1 - 1/p_1)$, $j = 1, \ldots, m$. Тогда из условия теоремы следует, что $1 = \gamma_1 = \cdots = \gamma_\nu < \gamma_{\nu+1} \le \cdots \le \gamma_m$. Выберем числа γ_j' такие, что $\gamma_j' = \gamma_j$ при $j = 1, \ldots, \nu$ и $\gamma_j' < \gamma_j$ для $j = \nu+1, \ldots, m$. Рассмотрим частичную сумму

$$S_n^{\gamma'}(f, \bar{x}) = \sum_{\langle\bar{s},\bar{\gamma}'\rangle<n} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x})$$

ряда Фурье функции $f \in \overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B$ по ступенчатому гиперболическому кресту.

В [40] доказано, что

$$\sup_{f\in\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\overline{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B} \|f - S_n^{\gamma'}(f)\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}} \le C\, 2^{-n\left(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)} n^{\sum_{j=2}^{\nu}\left(\frac{1}{\theta_j^{(2)}}-\frac{1}{\tau_j}\right)}, \quad \theta_j^{(2)} < \tau_j, \quad j = 1, \ldots, m,$$

$$\sup_{f\in\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\overline{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B} \|f - S_n^{\gamma'}(f)\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}} \le C\, 2^{-n\left(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)}, \quad \tau_j \le \theta_j^{(2)}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Выберем натуральное число n такое, что $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$. Тогда

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B,\ L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \le \sup_{f\in \overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B} \|f - S_n^{\gamma'}(f)\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}$$

$$\le C\,2^{-n\left(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)} n^{\sum_{j=2}^{\nu}\left(\frac{1}{\theta_j^{(2)}}-\frac{1}{\tau_j}\right)} \le C\Big(\frac{\log^{\nu-1}M}{M}\Big)^{\left(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)}(\log M)^{\sum_{j=2}^{\nu}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j}\right)},$$

если $\theta_j^{(2)} < \tau_j,\ j=1,\ldots,m$, и

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B,\ \ L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \le C\,2^{-n\left(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)} \le C\Big(\frac{\log^{\nu-1}M}{M}\Big)^{\left(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)},$$

если $\tau_j \le \theta_j^{(2)},\ j=1,\ldots,m$. Теорема 1 доказана. □

Теорема 2. *Пусть* $1<\theta_j^{(1)},\ \theta_j^{(2)}<\infty$, $1\le\tau_j\le\infty$, $j=1,\ldots m$, *и* $0<r_1+1/q_1-1/p_1=\cdots=r_\nu+1/q_\nu-1/p_\nu<r_{\nu+1}+1/q_{\nu+1}-1/p_{\nu+1}\le\cdots\le r_m+1/q_m-1/p_m$.

1. *Если* $2\le p_j<q\le\theta_j^{(2)}<\infty,\ j=1,\ldots,m$, $r_1>\beta=(1/p_1-1/q)/(1-2/q)$, *то*

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B,\ \ L^*_{q,\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \le C\Big(\frac{\log^{\nu-1}M}{M}\Big)^{r_1}(\log M)^{\sum_{j=2}^{\nu}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j}\right)_+}.$$

2. *Если* $1<p_j\le 2<q\le\theta_j^{(2)}$, $r_j>1/p_j,\ j=1,\ldots,m$, *то*

$$d_M\big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B, L^*_{q,\bar{\theta}^{(2)}}\big) \le C\Big(\frac{\log^{\nu-1}M}{M}\Big)^{\left(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}\right)}(\log M)^{\sum_{j=2}^{\nu}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j}\right)_+}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем первое утверждение теоремы. Пусть $f\in \overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B$. Так как $q\le\theta_j^{(2)},\ j=1,\ldots,m$, то $L_q(I^m)\subset L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}(I^m)$ и $\|f\|^*_{q,\bar{\theta}^{(2)}}\le C\|f\|_q$.

Поскольку $2<q<\infty$, то $0<1-2/q<1$. Следовательно, $r_1>\beta=(1/p_1-1/q)(1-2/q)>1/p_1-1/q$. Поэтому из условия $0<r_1+1/q_1-1/p_1=\cdots=r_\nu+1/q_\nu-1/p_\nu<r_{\nu+1}+1/q_{\nu+1}-1/p_{\nu+1}\le\cdots\le r_m+1/q_m-1/p_m$ следует, что $r_j>1/p_j-1/q_j,\ j=1,\ldots,m$. Следовательно, $\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B\subset L_q(I^m)$ (см. [40]), т. е. $f\in L_q(I^m)$.

Как в [29, с. 660] рассмотрим оператор $P_M: L_q(I^m)\to\mathbb{L}_M$, действующий на функцию

$$f(\bar{x})=\sum_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\delta_{\bar{s}}(f,\bar{x}) \quad \text{по формуле} \quad (P_Mf)(\bar{x})=\sum_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m}P_{M_{\bar{s}}}\delta_{\bar{s}}(f,\bar{x}),$$

где $P_{M_{\bar{s}}}$ и $\mathbb{L}_{M_{\bar{s}}}$ — соответственно операторы и подпространства из леммы 1, $\mathbb{L}_M=\bigcup_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\mathbb{L}_{M_{\bar{s}}}$.

Положим $\rho_j=r_j+1/q-1/p_j,\ \gamma_j=\rho_j/\rho_1$. Тогда из условия теоремы нетрудно видеть, что $\gamma_1=\cdots=\gamma_\nu<\gamma_{\nu+1}\le\cdots\le\gamma_m$.

Известно, что существуют числа ρ_j' такие, что $\rho_j'=\rho_j=\rho_1$ для $j=1,\ldots,\nu$ и $\rho_1<\rho_j'$ для $j=\nu+1,\ldots,m,\ \ 1<\rho_{\nu+1}/\rho_{\nu+1}'<\cdots<\rho_m/\rho_m'$. Положим $\gamma_j'=\rho_j'/\rho_1',\ \ j=1,\ldots,m$. Тогда $\gamma_j'=\gamma_j$ для $j=1,\ldots,\nu$ и $\gamma_j'<\gamma_j$ для $j=\nu+1,\ldots,m$.

Для натурального числа M выберем число $n\in\mathbb{N}$ такое, что $M\asymp 2^n n^{\nu-1}$, и для каждого $\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m$ поставим в соответствие число

$$M_{\bar{s}}=\begin{cases} 2^{\langle\bar{s},\bar{1}\rangle}, & \text{если } \langle\bar{s},\bar{\gamma}'\rangle\le n,\\ 2^{n(1+\varepsilon\rho_1)-\varepsilon\langle\bar{s},\bar{\rho}\rangle}, & \text{если } \langle\bar{s},\bar{\gamma}'\rangle> n,\end{cases}$$

где положительное число ε будет выбрано в дальнейшем и $[a]$ — целая часть числа a. Тогда, пользуясь леммами В и Г из [30], получим $\sum_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m} M_{\bar{s}} \le C\,2^n n^{\nu-1} \le CM$. Таким образом, размерность подпространства $\mathbb{L}_M$ имеет порядок $2^n n^{\nu-1}$.

Применяя неравенство $\|f\|^*_{q,\bar{\theta}^{(2)}} \le C\|f\|_q$ к функции $f - P_M f \in L_q(I^m)$ и пользуясь теоремой Литтльвуда — Пэли в пространстве Лебега $L_q(I^m)$ (см. [4, с. 54]), будем иметь

$$\|f - P_M f\|^*_{q,\bar{\theta}^{(2)}} \le C\|f - P_M f\|_q$$

$$\le C\left\|\left(\sum_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m} |\delta_{\bar{s}}(f) - P_{M_{\bar{s}}}\delta_{\bar{s}}(f)|^2\right)^{1/2}\right\|_q \le C\left(\sum_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m} \|\delta_{\bar{s}}(f) - P_{M_{\bar{s}}}\delta_{\bar{s}}(f)\|_q^2\right)^{1/2}. \tag{2.1}$$

Выберем число $p_0 > \max_{j=1,\ldots,m} p_j$. Тогда по лемме 1, учитывая неравенство Бернштейна для тригонометрических полиномов (см. [4, с. 98]), получим

$$\|\delta_{\bar{s}}(f) - P_{M_{\bar{s}}}\delta_{\bar{s}}(f)\|_q \asymp d_{M_{\bar{s}}}\left(B_{p_0}^{2^{\langle \bar{s},\bar{1}\rangle}}, l_q^{2^{\langle \bar{s},\bar{1}\rangle}}\right) \prod_{j=1}^m 2^{s_j\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{q}\right)} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p_0}. \tag{2.2}$$

Так как $p_j < p_0,\ j = 1,\ldots,m$, то в силу неравенства разных метрик Никольского для тригонометрических полиномов (см. [41; 42]) имеем

$$\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p_0} \le C\prod_{j=1}^m 2^{s_j\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{p_0}\right)} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}}. \tag{2.3}$$

Из неравенств (2.1)–(2.3) следует, что

$$\|f - P_M f\|^*_{q,\bar{\theta}^{(2)}} \le C\left(\sum_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\left(\prod_{j=1}^m 2^{s_j\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q}\right)} \|\delta_{\bar{s}}(f^{(r)})\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}}\right)^2 d^2_{M_{\bar{s}}}\left(B_{p_0}^{2^{\langle \bar{s},\bar{1}\rangle}}, l_q^{2^{\langle \bar{s},\bar{1}\rangle}}\right)\right)^{1/2}. \tag{2.4}$$

Если $\tau_j \le 2,\ j = 1,\ldots,m$, то, применяя неравенство Йенсена (см. [4, с. 125]), из (2.4) получим

$$\|f - P_M f\|^*_{q,\bar{\theta}^{(2)}} \le C\left\|\left\{\prod_{j=1}^m 2^{s_j\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q}\right)} d_{M_{\bar{s}}}\left(B_{p_0}^{2^{\langle \bar{s},\bar{1}\rangle}}, l_q^{2^{\langle \bar{s},\bar{1}\rangle}}\right) \|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}}\right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\right\|_{\bar{\tau}}. \tag{2.5}$$

Если $2 < \tau_j < +\infty,\ j = 1,\ldots,m$, то, применяя неравенство Гельдера (при $\alpha_j = \tau_j/2 > 1$, $j = 1,\ldots,m,$) из (2.4), имеем

$$\|f - P_M f\|^*_{q,\bar{\theta}^{(2)}} \le C\left\|\left\{2^{\langle \bar{s},\bar{r}\rangle}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}}\right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\right\|_{\bar{\tau}}$$

$$\times\left\|\left\{\prod_{j=1}^m 2^{-s_j\left(r_j+\frac{1}{q}-\frac{1}{p_j}\right)} d_{M_{\bar{s}}}\left(B_{p_0}^{2^{\langle \bar{s},\bar{1}\rangle}}, l_q^{2^{\langle \bar{s},\bar{1}\rangle}}\right)\right\}_{\langle \bar{s},\gamma'\rangle > n}\right\|_{\bar{\varepsilon}}, \tag{2.6}$$

где $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m),\ \ \varepsilon_j = 2\tau_j/(\tau_j - 2),\ j = 1,\ldots,m$.

По определению поперечника Колмогорова из (2.5) и (2.6) следует, что

$$d_M\left(\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B, L^*_{q,\bar{\theta}^{(2)}}\right) \le C\sup_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\prod_{j=1}^m 2^{-s_j\left(r_j+\frac{1}{q}-\frac{1}{p_j}\right)} d_{M_{\bar{s}}}\left(B_{p_0}^{2^{\langle \bar{s},\bar{1}\rangle}}, l_q^{2^{\langle \bar{s},\bar{1}\rangle}}\right) \tag{2.7}$$

в случае $1 < \tau_j \le 2,\ j = 1,\ldots,m$, и

$$d_M\left(\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B, L^*_{q,\bar{\theta}^{(2)}}\right) \le C\left\|\left\{\prod_{j=1}^m 2^{-s_j\left(r_j+\frac{1}{q}-\frac{1}{p_j}\right)} d_{M_{\bar{s}}}\left(B_{p_0}^{2^{\langle \bar{s},\bar{1}\rangle}}, l_q^{2^{\langle \bar{s},\bar{1}\rangle}}\right)\right\}_{\langle \bar{s},\gamma'\rangle > n}\right\|_{\bar{\varepsilon}}, \tag{2.8}$$

если $2<\tau_j,\ j=1,\dots,m$, где $\bar\varepsilon=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m),\ \varepsilon_j=2\tau_j/(\tau_j-2),\ j=1,\dots,m$.

Подставляя в формулы (2.7) и (2.8) значение поперечника $d_{M_{\bar s}}\big(B_{p_0}^{2^{\langle\bar s,\bar 1\rangle}},l_q^{2^{\langle\bar s,\bar 1\rangle}}\big)=0$ для $\langle\bar s,\bar\gamma^{'}\rangle\le n$ и оценки конечномерных поперечников [43; 44]

$$d_{n_{\bar s}}(B_{p_0}^m,l_q^m)\asymp\min\big\{1,m^{\frac{2\beta}{q}}n^{-\beta}\big\},\quad m>n,$$

для $\langle\bar s,\bar\gamma^{'}\rangle>n$ получим

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B,L^*_{q,\bar\theta^{(2)}}\Big)\le C\sup_{\bar s\in\mathbb{Z}_+^m}\prod_{j=1}^m2^{-s_j\left(r_j+\frac1q-\frac1{p_j}\right)}2^{\frac{2\beta}{q}\langle\bar s,\bar 1\rangle}M_{\bar s}^{-\beta}\tag{2.9}$$

в случае $1\le\tau_j\le2,\ j=1,\dots,m$, и

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B,L^*_{q,\bar\theta^{(2)}}\Big)\le C\Big\|\Big\{\prod_{j=1}^m2^{-s_j\left(r_j+\frac1q-\frac1{p_j}\right)}2^{\frac{2\beta}{q}\langle\bar s,\bar 1\rangle}M_{\bar s}^{-\beta}\Big\}_{\langle\bar s,\gamma'\rangle>n}\Big\|_{\bar\varepsilon}\tag{2.10}$$

в случае $2<\tau_j\le\infty,\ \ j=1,\dots,m$.

Пусть $2<\tau_j\le\infty,\ j=1,\dots,m$. Тогда, подставляя значения чисел $M_{\bar s}$ из (2.10), получим

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B,L^*_{q,\bar\theta^{(2)}}\Big)\le C2^{-n\beta(1+\varepsilon\rho_1)}\Big\|\Big\{\prod_{j=1}^m2^{-s_j\left(r_j+\frac1q-\frac1{p_j}\right)}2^{\frac{2\beta}{q}\langle\bar s,\bar 1\rangle}2^{\varepsilon\beta\langle\bar s,\bar\rho\rangle}\Big\}_{\langle\bar s,\gamma'\rangle>n}\Big\|_{\bar\varepsilon}.\tag{2.11}$$

Так как $\rho_j=r_j+1/q-1/p_j$ и $\gamma_j=\rho_j/\rho_1,\ j=1,\dots,m$, то, учитывая, что $1\le\gamma_j$ и $\beta>0$, будем иметь

$$\prod_{j=1}^m2^{-s_j\left(r_j+\frac1q-\frac1{p_j}\right)}2^{\frac{2\beta}{q}\langle\bar s,\bar 1\rangle}2^{\varepsilon\beta\langle\bar s,\bar\rho\rangle}=2^{-\rho_1\langle\bar s,\bar\gamma\rangle}2^{\frac{2\beta}{q}\langle\bar s,\bar 1\rangle}2^{\varepsilon\beta\rho_1\langle\bar s,\bar\gamma\rangle}\le2^{-\left(\rho_1-\frac{2\beta}{q}-\varepsilon\beta\rho_1\right)\langle\bar s,\bar\gamma\rangle}.\tag{2.12}$$

Учитывая соотношение (2.12), из (2.11) выводим

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B,L^*_{q,\bar\theta^{(2)}}\Big)\le C2^{-n\beta(1+\varepsilon\rho_1)}\Big\|\Big\{2^{-\left(\rho_1-\frac{2\beta}{q}-\varepsilon\beta\rho_1\right)\langle\bar s,\bar\gamma\rangle}\Big\}_{\langle\bar s,\gamma'\rangle>n}\Big\|_{\bar\varepsilon}\tag{2.13}$$

в случае $2<\tau_j\le\infty,\ j=1,\dots,m$.

Так как $\beta=\dfrac{1/p_1-1/q}{1-2/q}$, нетрудно убедиться, что $\rho_1-2\beta/q=r_1-\beta$. Поэтому неравенство (2.13) можно переписать в следующем виде:

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B,L^*_{q,\bar\theta^{(2)}}\Big)\le C2^{-n\beta(1+\varepsilon\rho_1)}\Big\|\Big\{2^{-(r_1-\beta-\varepsilon\beta\rho_1)\langle\bar s,\bar\gamma\rangle}\Big\}_{\langle\bar s,\gamma'\rangle>n}\Big\|_{\bar\varepsilon}\tag{2.14}$$

в случае $2<\tau_j\le\infty,\ j=1,\dots,m$.

По условию теоремы $r_1>\beta$ и $2<q<\infty$. Поэтому $r_1>1/p_1-1/q$. Следовательно,

$$\frac{r_1-\beta}{\beta\Big(r_1+\dfrac1q-\dfrac1{p_1}\Big)}>0.$$

Выберем число ε такое, что

$$0<\varepsilon<\frac{r_1-\beta}{\beta\Big(r_1+\dfrac1q-\dfrac1{p_1}\Big)}.$$

Тогда

$$r_1-\beta-\varepsilon\beta\Big(r_1+\frac1q-\frac1{p_1}\Big)=r_1-\beta-\varepsilon\beta\rho_1>0.$$

Поэтому, применяя лемму 2, получим

$$\Big\| \Big\{ 2^{-\left(r_1-\beta-\varepsilon\beta\rho_1\right)\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle} \Big\}_{\langle\bar{s},\gamma'\rangle>n} \Big\|_{\bar{\varepsilon}} \le C 2^{-n(r_1-\beta-\varepsilon\beta\rho_1)} n^{\sum_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\varepsilon_j}}. \tag{2.15}$$

Следовательно, учитывая, что $1/\varepsilon_j = (\tau_j-2)/2\tau_j,\ j=1,\dots,m$, и $2^n n^{\nu-1} \asymp M$, из неравенств (2.14) и (2.15) выводим

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B, L^*_{q,\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \le C2^{-n\beta(1+\varepsilon\rho_1)} 2^{-n(r_1-\beta-\varepsilon\beta\rho_1)} n^{\sum_{j=2}^{\nu}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j}\right)}$$

$$\le C2^{-nr_1} n^{\sum_{j=2}^{\nu}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j}\right)} \le C\Big(\frac{\log^{\nu-1}M}{M}\Big)^{r_1} (\log M)^{\sum_{j=2}^{\nu}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j}\right)}$$

в случае $2<\tau_j\le\infty$, $2\le p_j<q<\infty$, $j=1,\dots,m$, $r_1>\beta$.

Пусть $1\le\tau_j\le 2,\ j=1,\dots,m$. Тогда, подставляя значения $M_{\bar{s}}$ в (2.9), имеем

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B, L^*_{q,\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \le C2^{-n\beta(1+\varepsilon\rho_1)} \sup_{\langle\bar{s},\bar{\gamma}'\rangle>n} \prod_{j=1}^{m} 2^{-s_j\left(r_j+\frac{1}{q}-\frac{1}{p_j}\right)} 2^{\frac{2\beta}{q}\langle\bar{s},\bar{1}\rangle} 2^{\varepsilon\beta\langle\bar{s},\bar{\rho}\rangle}$$

$$\le C2^{-n\beta(1+\varepsilon\rho_1)} \sup_{\langle\bar{s},\bar{\gamma}'\rangle>n} 2^{-\left(\rho_1-\frac{2\beta}{q}-\varepsilon\beta\rho_1\right)\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle} = C2^{-n\beta(1+\varepsilon\rho_1)} \sup_{\langle\bar{s},\bar{\gamma}'\rangle>n} 2^{-(r_1-\beta-\varepsilon\beta\rho_1)\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle}$$

$$\le C2^{-nr_1} \le C\Big(\frac{\log^{\nu-1}M}{M}\Big)^{r_1}.$$

Таким образом,

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B, L^*_{q,\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \le C\Big(\frac{\log^{\nu-1}M}{M}\Big)^{r_1}$$

в случае $1\le\tau_j\le 2,\ j=1,\dots,m$, $2\le p_j<q<\infty$, $j=1,\dots,m$.

Докажем второе утверждение теоремы 2. Пусть $1<p_j\le 2<q<\infty,\ j=1,\dots m$, $r_1>1/p_1$. Так как $1<p_j\le 2,\ j=1,\dots m$, то $\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B \subset \overset{\circ}{S}{}^{\overline{\rho}}_{2,\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B$, где $\bar{\rho}=(\rho_1,\dots,\rho_m),\ \rho_j=r_j+1/2-1/p_j,\ j=1,\dots,m$. С учетом условия теоремы $r_1>1/p_1$ имеем $\rho_1>\beta=(1/2-1/q)/(1-2/q)$.

Следовательно, в силу доказанного п. 1 при $p_j=2,\ j=1,\dots,m$, и с заменой r_j на ρ_j имеем

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B, L^*_{q,\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \le d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{2,\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B, L^*_{q,\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \le C\Big(\frac{\log^{\nu-1}M}{M}\Big)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}} (\log M)^{\sum_{j=2}^{\nu}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j}\right)}$$

в случае $1\le\tau_j\le\infty,\ j=1,\dots,m$. Теорема 2 доказана. □

Теорема 3. *Пусть* $1<\theta_j^{(1)},\ \theta_j^{(2)}<\infty$, $j=1,\dots m$, $1\le\tau\le\infty$, *и* $0<r_1=\dots=r_\nu<r_{\nu+1}\le\dots\le r_m$, $r_j>1/p_j,\ j=1,\dots,m$. *Тогда если* $2\le q_j<p_j<\infty,\ j=1,\dots,m$, *то*

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\tau}B, L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \ge C\Big(\frac{\log^{\nu-1}M}{M}\Big)^{r_1} (\log M)^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau}\right)_+}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем число $p_0>\max_{j=1,\dots,m}p_j$. Тогда $L_{p_0}(I^m)\subset L^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}}(I^m)$.

Пользуясь свойством нормы, неравенством разных метрик Никольского для тригонометрических полиномов (см. [41;42]) и неравенством Гельдера ($1/\tau+1/\tau'=1$), нетрудно убедиться, что

$$\|f\|_{p_0} \le \sum_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{p_0})} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}}$$

$$\le \Big\{\sum_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle\bar{s},\bar{r}\rangle\tau} (\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}})^{\tau}\Big\}^{1/\tau} \Big\{\sum_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m} \prod_{j=1}^{m} 2^{-s_j(r_j-\frac{1}{p_j}+\frac{1}{p_0})\tau'}\Big\}^{1/\tau'}.$$

Так как $r_j > 1/p_j > 1/p_j - 1/p_0,\ j = 1, \dots, m$, то отсюда следует, что $\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\tau} B \subset L_{p_0}(I^m)$.

С другой стороны, так как $p_0 > \max_{j=1,\dots,m} p_j$, то $\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\overline{p},\bar{\theta}^{(1)}} \leq C\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p_0}$. Поэтому $\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{p_0,\tau} B \subset \overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\tau} B$. Следовательно, $d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\tau} B, L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \geq d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{p_0,\tau} B, L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}\Big)$. Так как по условию теоремы $q_j \geq 2,\ j = 1, \dots, m$, то отсюда получим

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\tau} B, L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \geq d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{p_0,\tau} B, L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \geq d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{p_0,\tau} B, L_2\Big). \tag{2.16}$$

Э. М. Галеевым [27] доказана оценка

$$d_M\big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{p_0,\tau} B, L_2\big) \geq C\Big(\frac{\log^{\nu-1} M}{M}\Big)^{r_1} (\log M)^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau}\right)_+}. \tag{2.17}$$

Из (2.16) и (2.17) следует, что

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\tau} B, L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \geq C\Big(\frac{\log^{\nu-1} M}{M}\Big)^{r_1} (\log M)^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau}\right)_+}.$$

Теорема 3 доказана. □

Теорема 4. *Пусть* $1 < \theta_j^{(1)},\ \theta_j^{(2)} < \infty,\ j = 1, \dots m,\ 1 \leq \tau \leq \infty$, *и* $0 < r_1 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \dots \leq r_m,\ \ r_j > 1/p_j,\ j = 1, \dots, m$. *Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. *Если* $2 \leq p_j < q_j < \infty$, $r_j > 1/p_j,\ j = 1, \dots, m$, *то*

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\tau} B, L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \geq C\Big(\frac{\log^{\nu-1} M}{M}\Big)^{r_1} (\log M)^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau}\right)_+}.$$

2. *Если* $1 < p_j \leq 2 < q_j < \infty$, $r_j > 1/p_j,\ j = 1, \dots, m$, *и* $p_1 > p_j,\ j = 2, \dots, m$, *то*

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\tau} B, L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \geq C\Big(\frac{\log^{\nu-1} M}{M}\Big)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}} (\log M)^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau}\right)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $2 \leq p_j < q_j < \infty,\ j = 1, \dots m$. Тогда, учитывая, что $L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}(I^m) \subset L_2(I^m)$, по теореме 3 (при $q_j = \theta_j^{(2)} = 2,\ j = 1, \dots, m$) получим

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\tau} B, L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \geq d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\tau} B, L_2\Big) \geq C\Big(\frac{\log^{\nu-1} M}{M}\Big)^{r_1} (\log M)^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau}\right)_+}.$$

Докажем второе утверждение. Так как $2 < q_j < \infty,\ j = 1, \dots m$, то $L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}(I^m) \subset L_2(I^m)$ Поэтому

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\tau} B, L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \geq d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\tau} B, L_2\Big). \tag{2.18}$$

Из условия $p_1 > p_j,\ j = 2, \dots, m$, следует, что $S^{\overline{r}}_{p_1,\tau} B \subset S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\tau} B$. Тогда

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\tau} B, L_2\Big) \geq d_M\big(S^{\overline{r}}_{p_1,\tau} B, L_2\big). \tag{2.19}$$

Из неравенств (2.18) и (2.19) следует, что $d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\tau} B, L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \geq d_M\big(S^{\overline{r}}_{p_1,\tau} B, L_2\big)$. Поэтому, пользуясь п. d) теоремы [29, с. 659], имеем

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\tau} B, L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \geq C\Big(\frac{\log^{\nu-1} M}{M}\Big)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}} (\log M)^{\sum_{j=2}^{\nu}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau}\right)}.$$

Теорема 4 доказана. □

З а м е ч а н и е. Из пп. 2 теорем 2, 4 вытекает, что при $\tau_1 = \ldots \tau_m = \tau$ и $q_1 = \cdots = q_m = q \le \theta_j^{(2)},\ j = 1, \ldots, m$, верна следующая оценка при $p_1 > p_j,\ j = 1, \ldots, m,$:

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{\theta}^{(1)},\tau}B, L^*_{q,\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \asymp \Big(\frac{\log^{\nu-1} M}{M}\Big)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}} (\log M)^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau}\right)_+}.$$

Из пп. 1 теорем 2, 4 следует, что

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{\theta}^{(1)},\tau}B, L^*_{q,\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \asymp \Big(\frac{\log^{\nu-1} M}{M}\Big)^{r_1} (\log M)^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau}\right)_+}$$

при $\tau_1 = \ldots = \tau_m = \tau$ и $q_1 = \cdots = q_m = q \le \theta_j^{(2)},\ j = 1, \ldots, m.$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М.** Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978. 400 с.
2. **Коляда В.И.** Вложения дробных пространств Соболева и оценки преобразований Фурье // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 7. С. 51–72.
3. **Blozinski A.P.** Multivariate rearragements and Banach function spaces with mixed norms // Trans. Amer. Math. Soc. 1981. Vol. 263, no. 1. P. 149–167.
4. **Никольский С.М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977. 456 с.
5. **Никольский С.М.** Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера // Сиб. мат. журн. 1963. Т. 4, № 6. С. 1342–1364.
6. **Аманов Т.И.** Теоремы представления и вложения для функциональных пространств SB// Тр. МИАН. 1965. Т. 77. С. 5–34.
7. **Аманов Т.И.** Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. Алма-Ата: Наука, 1976. 224 с.
8. **Лизоркин П.И., Никольский С.М.** Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. МИАН. 1989. Т. 187. С. 143–161.
9. **Kolmogoroff A.** Uber die beste Annaherung von funktionen einer gegeben Funktionenklasse // Ann. Math. 1936. Vol. 37. P. 107–111.
10. **Rudin W.** L_2-approximation by partial sums of orthogonal developments // Duke Math. J. 1952. Vol. 19. P. 1–4.
11. **Стечкин С.Б.** О наилучших приближениях заданных классов функций любыми полиномами // Успехи мат. наук. 1954. Т. 9, № 1. С. 133–134.
12. **Тихомиров В.М.** Поперечники множеств в функциональном пространстве и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, № 3. С. 81–120.
13. **Бабаджанов С.Б., Тихомиров В.М.** О поперечниках одного класса в пространстве L^p // Изв. АН Узб. ССР. Сер. физико-математическая. 1967. № 2. С. 24–30.
14. **Субботин Ю.Н.** Поперечник класса W^rL в $L(0, 2\pi)$ и приближение сплайн функциями // Мат. заметки. 1970. Т. 7, № 1. С. 43–52.
15. **Субботин Ю.Н.** Приближение сплайн-функциями и оценки ее поперечников // Тр. МИАН. 1971. Т. 109. С. 35–60.
16. **Исмагилов Р.С.** Об n-мерных поперечниках компактов в гильбертовом пространстве // Функцион. анализ и его приложения. 1968. Т. 2, №2. С. 32–39.
17. **Исмагилов Р.С.** Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // Успехи мат. наук. 1974. Т. 29, № 3. С. 161–173.
18. **Глускин Е.Д.** Об одной задаче о поперечниках // Докл. АН СССР. 1974. Т. 219, № 3. С. 527–530.
19. **Кашин Б.С.** Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1977. Т. 41, № 2. С. 334–351.
20. **Makovoz Y.** On trigonometric n-widths and their generalization // J. Approx. Theory. 1984. Vol. 41, no. 4. P. 361–366.
21. **Кашин Б.С.** О поперечниках классов Соболева малой гладкости // Вестн. МГУ. Сер. математика, механика. 1981. № 5. С. 50–54.

22. **Куланин Е.Д.** Оценки поперечников классов Соболева малой гладкости // Вестн. МГУ. Сер. математика, механика. 1983. № 2. С. 24–30.
23. **Бабенко К.И.** О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами // Докл. АН СССР. 1960. Т. 132, № 5. С. 982–985.
24. **Митягин Б.С.** Приближение функций в пространствах L^p и C на торе // Мат. сб. 1962. Т. 58, № 4. С. 397–414.
25. **Теляковский С.А.** Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами // Мат. сб. 1964. Т. 63, № 3. С. 426–444.
26. **Бугров Я.С.** Приближение классов функций с доминирующей смешанной производной // Мат. сб. 1964. Т. 64, № 3. С. 410-418.
27. **Галеев Э.М.** Поперечники по Колмогорову классов периодических функций многих переменных $W_p^{\bar{r}}$ и $H_p^{\bar{r}}$ в пространстве L_q // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1985. Т. 49, № 3. С. 916–934.
28. **Галеев Э.М.** Поперечники по Колмогорову классов периодических функций одной и нескольких переменных // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1990. Т. 54, № 2. С. 418–430.
29. **Галеев Э.М.** Поперечники классов Бесова $B^r_{p,\theta}(\mathbb{T}^d)$ // Мат. заметки. 2001. Т. 69, № 5. С. 656–665.
30. **Темляков В.Н.** Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН. 1986. Т. 178. С. 1–112.
31. **Темляков В.Н.** Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Тр. МИАН. 1989. Т. 189. С. 138–168.
32. **Динь Зунг.** Приближение функций многих переменных на торе тригонометрическими полиномами // Мат. сб. 1986. Т. 131, № 2. С. 251–271.
33. **Белинский Э.С.** Приближение “плавающей” системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной // Исследования по теории функций многих веществ. переменных. Ярославль, 1988. С. 16–33.
34. **Белинский Э.С.** Оценки для колмогоровских поперечников классов функций с условиями на смешанную разность в равномерной метрике // Мат. заметки. 1991. Т. 50, № 5. С. 147–149.
35. **Романюк А.С.** О наилучших тригонометрических приближениях и колмогоровских поперечниках классов Бесова функций многих переменных // Укр. мат. журн. 1993. Т. 45, № 5. С. 663–675.
36. **Романюк А.С.** Колмогоровские поперечники классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ в метрике L_∞ // Укр. мат. вестник. 2005. № 2. С. 201–218.
37. **Романюк А.С.** Колмогоровские и тригонометрические поперечники классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 1. С. 71–96.
38. **Heping Wang, Yongsheng Sun.** Kolmogorov widths between the anisotropic space and the space of functions with mixed smoothness // J. Approx. Theory. 2004. Vol. 126, no. 1. P. 52–59.
39. **Базарханов Д.Б.** Оценки некоторых аппроксимативных характеристик пространств Никольского — Бесова обобщенной смешанной гладкости // Докл. РАН. 2009. Т. 426, № 1. С. 11–14.
40. **Akishev G.** On approximation of function classes in Lorentz spaces with anisotropic norm // Anal. Theory Appl. 2013. Vol. 29, no. 4. P. 358–372.
41. **Акишев Г.** Неравенства разных метрик для тригонометрических полиномов // Материалы научн.-практ. конф. “Уалихановские чтения – 9”. Кокшетау, 2004. С. 3–6.
42. **Нурсултанов Е.Д.** Неравенства разных метрик С. М. Никольского и свойства последовательности норм сумм Фурье функции из пространства Лоренца // Тр. МИАН. 2006. Т. 255. С. 1–18.
43. **Кашин Б.С.** О некоторых свойствах матриц ограниченных операторов из пространства l_2^n в l_2^m // Изв. АН Арм. ССР. Математика. 1980. Т. 15, № 5. С. 379–394.
44. **Глускин Е.Д.** Нормы случайных матриц и поперечники конечномерных множеств // Мат. сб. 1983. Т. 120, № 2. С. 180–189.

Акишев Габдолла
д-р физ.-мат. наук, профессор
Карагандинский государственный университет им. Е. А. Букетова;
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

Поступила 10.08.2015