ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 517.518

О СХОДИМОСТИ ПОЧТИ ВСЮДУ ЛАКУНАРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ КРАТНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ СУММ ФУРЬЕ[1]

Н. Ю. Антонов

Пусть последовательность d-мерных векторов $\mathbf{n}_k=(n_k^1,n_k^2,\dots,n_k^d)$ с положительными целочисленными координатами удовлетворяет условию $n_k^j=\alpha_j m_k+O(1),\ k\in\mathbb{N},\ 1\leqslant j\leqslant d,$ где $\alpha_1>0,\dots,\alpha_d>0$, а $\{m_k\}_{k=1}^\infty$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. При некоторых условиях на функцию $\varphi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ доказано, что если что для любой функции $g\in\varphi(L)([0,2\pi))$ последовательность сумм Фурье $S_{m_k}(g,x)$ сходится почти всюду, то для любого $d\in\mathbb{N}$, для всех $f\in\varphi(L)(\ln^+L)^{d-1}([0,2\pi)^d)$ последовательность $S_{\mathbf{n}_k}(f,\mathbf{x})$ прямоугольных частичных сумм кратного тригонометрического ряда Фурье функции f, а также соответствующие последовательности частичных сумм всех его сопряженных рядов сходятся почти всюду.

Ключевые слова: кратные тригонометрические ряды Фурье, сходимость почти всюду.

N. Yu. Antonov. On almost everywhere convergence for lacunary sequences of multiple rectangular Fourier sums.

Let a sequence of d-dimensional vectors $\mathbf{n}_k=(n_k^1,n_k^2,\dots,n_k^d)$ with positive integer coordinates satisfy the condition $n_k^j=\alpha_j m_k+O(1),\ k\in\mathbb{N},\ 1\leqslant j\leqslant d,$ where $\alpha_1>0,\dots,\alpha_d>0$, and $\{m_k\}_{k=1}^\infty$ is an increasing sequence of positive integers. Under some conditions on a function $\varphi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, it is proved that, if the sequence of Fourier sums $S_{m_k}(g,x)$ converges almost everywhere for any function $g\in\varphi(L)([0,2\pi))$, then, for any $d\in\mathbb{N}$ and $f\in\varphi(L)(\ln^+L)^{d-1}([0,2\pi)^d)$, the sequence $S_{\mathbf{n}_k}(f,\mathbf{x})$ of rectangular partial sums of the multiple trigonometric Fourier series of the function f and the corresponding sequences of partial sums of all conjugate series converge almost everywhere.

Keywords: multiple trigonometric Fourier series, convergence almost everywhere.

1. Введение

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ — множества натуральных, целых и действительных чисел соответственно, $d\in\mathbb{N}$, $E\subset\mathbb{R}^d$, $\varphi\colon[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ — неубывающая функция. Обозначим через $\varphi(L)(E)$ множество всех определенных на E измеримых по Лебегу вещественнозначных функций f, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_E \varphi(|f(\mathbf{t})|)d\mathbf{t}<\infty.$$

Пусть $f\colon\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ — 2π-периодическая по каждой переменной функция такая, что $f\in L([0,2\pi)^d)$, $\mathbf{k}=(k^1,k^2,\dots,k^d)\in\mathbb{Z}^d$, $\mathbf{x}=(x^1,x^2,\dots,x^d)\in\mathbb{R}^d$, $\mathbf{kx}=k^1x^1+k^2x^2+\ldots+k^dx^d$,

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}a_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{kx}}\tag{1.1}$$

— кратный тригонометрический ряд Фурье функции f. Пусть $\mathbf{n}=(n^1,n^2,\dots,n^d)$ — вектор с неотрицательными целочисленными координатами. Обозначим через $S_{\mathbf{n}}(f,\mathbf{x})$ значение $\mathbf{n}$-й прямоугольной частичной суммы ряда (1.1):

$$S_{\mathbf{n}}(f,\mathbf{x})=\sum_{\mathbf{k}=(k^1,\dots,k^d)\colon\ |k^j|\leqslant n^j,\ 1\leqslant j\leqslant d}a_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{kx}}$$

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

(далее прямоугольные частичные суммы ряда (1.1) будем для краткости называть также суммами Фурье).

Пусть B — некоторое непустое подмножество множества первых d натуральных чисел: $B = \{r_1, \dots, r_l\} \subset \{1, \dots, d\}$. Ряд

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \prod_{j=1}^{l} (-i \operatorname{sign} k_{r_j}) a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kx}} \tag{1.2}$$

называется сопряженным к ряду (1.1) по переменным, номера которых входят во множество B, или B-сопряженным, а $\mathbf{n}$-я прямоугольная частичная сумма $\tilde{S}_{\mathbf{n},B}(f, \mathbf{x})$ ряда (1.2) определяется аналогично $\mathbf{n}$-й прямоугольной частичной сумме ряда (1.1). При $d = 1$ ряды (1.1) и (1.2) совпадают соответственно с обычным тригонометрическим рядом Фурье 2π-периодической функции и его сопряженным рядом. В случае, когда множество B пустое, будем считать, что ряд (1.2) совпадает с рядом (1.1), а $\tilde{S}_{\mathbf{n},\varnothing}(f, \mathbf{x})$ — с $S_{\mathbf{n}}(f, \mathbf{x})$. Вообще, всюду далее произведение $\prod$, в котором множество сомножителей пусто, будем по определению считать равным единице. Через $\operatorname{mes} E$ будем обозначать лебегову меру множества E, будем также полагать $\ln^+ u = \ln(u + e)$, $u \geqslant 0$.

Рассмотрим одномерный случай ($d = 1$). Л. Карлесон [1] доказал, что если $f \in L^2([0, 2\pi))$, то тригонометрический ряд Фурье функции f сходится почти всюду. Р. Хант [2] обобщил это утверждение о сходимости почти всюду рядов Фурье на функции из классов $L^p([0, 2\pi))$, $p > 1$, и $L(\ln^+ L)^2([0, 2\pi))$, а П. Шёлин [3] — на функции из класса $L(\ln^+ L)(\ln^+ \ln^+ L)([0, 2\pi))$. Автором [4] было установлено, что условие $f \in L(\ln^+ L)(\ln^+ \ln^+ \ln^+ L)([0, 2\pi))$ также является достаточным для сходимости почти всюду ряда Фурье функции f. Наилучший на сегодняшний день результат, касающийся расходимости на множестве положительной меры рядов Фурье функций из классов $\varphi(L)([0, 2\pi))$, принадлежит С. В. Конягину [5]: для любой неубывающей функции $\varphi\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, удовлетворяющей условию $\varphi(u) = o\big(u\sqrt{\ln u / \ln\ln u}\big)$ при $u \to \infty$, найдется функция из класса $\varphi(L)([0, 2\pi))$ такая, что ее ряд Фурье неограниченно расходится всюду на $[0, 2\pi)$.

В 2005 г. С. В. Конягиным [6] была доказана следующая теорема о расходимости подпоследовательностей последовательности сумм Фурье: для любой возрастающей последовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ и любой неубывающей функции $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$, удовлетворяющей условию $\varphi(u) = o(u \ln\ln u)$, $u \to \infty$, найдется функция $F \in \varphi(L)([0, 2\pi))$ такая, что подпоследовательность $S_{n_k}(F, x)$ неограниченно расходится всюду.

Последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется *лакунарной* (по Адамару), если существует число $q > 1$ такое, что $n_{k+1}/n_k \geqslant q$ для любого $k \in \mathbb{N}$. В связи с результатом работы [6] С. В. Конягиным была сформулирована гипотеза о том, что если последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ лакунарная, то подпоследовательность $S_{n_k}(f, x)_{k=1}^{\infty}$ последовательности сумм Фурье любой функции f из класса $L(\ln^+ \ln^+ L)([0, 2\pi))$ сходится почти всюду. В рамках исследования этой гипотезы сначала В. Ли [7] доказал сходимость почти всюду лакунарной подпоследовательности последовательности сумм Фурье произвольной функции из класса $f \in L(\ln^+ \ln^+ L)(\ln^+ \ln^+ \ln^+ L)([0, 2\pi))$, а затем Ф. Ди Плинио [8] усилил результат работы [7], показав, что условие $f \in L(\ln^+ \ln^+ L)(\ln^+ \ln^+ \ln^+ \ln^+ L)([0, 2\pi))$ также является достаточным для сходимости почти всюду лакунарной подпоследовательности последовательности сумм Фурье функции f.

Обратимся теперь к случаю кратных рядов Фурье ($d \geqslant 2$). Ряд (1.1) (ряд (1.2)) называется сходящимся по кубам (в случае $d = 2$ — по квадратам) в точке $\mathbf{x} \in [0, 2\pi)^d$, если последовательность кубических частичных сумм (т. е. последовательность $S_{\mathbf{n}}(f, \mathbf{x})$ ($\tilde{S}_{\mathbf{n},B}(f, \mathbf{x})$), при $\mathbf{n} = (n, n, \dots, n)$) имеет предел при $n \to \infty$.

Сходимость почти всюду по квадратам рядов Фурье функций $f \in L^2([0, 2\pi)^2)$ была установлена Н. Р. Тевзадзе [9]. Ч. Фефферман [10] распространил этот результат на функции $f \in L^p([0, 2\pi)^d)$, $p > 1$, $d \geqslant 2$, а затем П. Шёлин [11] доказал, что если функция f принадлежит классу $L(\ln^+ L)^d(\ln^+ \ln^+ L)([0, 2\pi)^d)$, $d \geqslant 2$, то ее ряд Фурье сходится по кубам почти всюду.

Автором в [12] доказана теорема, позволяющая переносить результаты о сходимости почти всюду одномерных рядов Фурье функций из классов $\varphi(L)([0,2\pi))$ на кратные ряды Фурье функций из классов $\varphi(L)(\ln^+ L)^{d-1}([0,2\pi)^d)$ в случае сходимости по кубам. В качестве следствия этой теоремы и результата работы [4] там получено утверждение о сходимости почти всюду по кубам рядов Фурье функций из класса $L(\ln^+ L)^d(\ln^+\ln^+\ln^+ L)([0,2\pi)^d)$. Наилучший на сегодня результат, касающийся расходимости по кубам на множестве положительной меры кратных рядов Фурье функций из $\varphi(L)([0,2\pi)^d)$, $d\geqslant 2$, принадлежит С. В. Конягину [13]: для любой функции $\varphi(u)=o(u(\ln u)^{d-1}\ln\ln u)$ при $u\to\infty$ существует $f\in\varphi(L)([0,2\pi)^d)$ с расходящимся всюду по кубам рядом Фурье. В работе [14] результаты работы [12] распространены с последовательности кубических сумм Фурье на последовательности сумм Фурье несколько более общего вида.

Ниже, как и в [14], мы будем рассматривать последовательности кратных прямоугольных сумм Фурье $S_{\mathbf{n}_k}(f,\mathbf{x})$ такие, что векторы $\mathbf{n}_k=(n_k^1,n_k^2,\dots,n_k^d)$ удовлетворяют условию

$$n_k^j=\alpha_j m_k+O(1),\quad k\in\mathbb{N},\quad 1\leqslant j\leqslant d, \tag{1.3}$$

где $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_d)$ — вектор с положительными координатами, а $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ — некоторая последовательность натуральных чисел. Обозначим через $\bar\Phi$ множество всех непрерывных функций $\varphi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, представимых в виде $\varphi(u)=u\psi(u)$, где функция $\psi(u)$ дифференцируема при $u\geqslant A\geqslant 0$, $\psi(u)$ и $u\psi'(u)$ не убывают на $[A,+\infty)$, а $\psi(u)u^{-1/2}$ и $\psi'(u)$ не возрастают на $[A,+\infty)$.

В настоящей работе доказана следующая

Теорема 1. *Пусть $\varphi\in\bar\Phi$, $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Предположим, что для любой функции $g\in\varphi(L)([0,2\pi))$ последовательность сумм Фурье $S_{m_k}(g,x)$ сходится почти всюду. Тогда для каждого $d\in\mathbb{N}$, любого d-мерного вектора $(\alpha_1,\dots,\alpha_d)$ с положительными координатами, произвольной последовательности $\mathbf{n}_k$, удовлетворяющей условию* (1.3), *и любой функции $f\in\varphi(L)(\ln^+ L)^{d-1}([0,2\pi)^d)$ последовательность $S_{\mathbf{n}_k}(f,\mathbf{x})$ и последовательности $\tilde S_{\mathbf{n}_k,B}(f,\mathbf{x})$ для всех $B\subset\{1,2,\dots,d\}$ сходятся почти всюду на $[0,2\pi)^d$.*

Следствием теоремы 1 и результата работы [4] является следующее утверждение.

Теорема 2 [14, теорема 2]. *Пусть $d\in\mathbb{N}$, последовательность $\mathbf{n}_k=(n_k^1,n_k^2,\dots,n_k^d)$ удовлетворяет условию* (1.3). *Тогда, если $f\in L(\ln^+ L)^d(\ln^+\ln^+\ln^+ L)([0,2\pi)^d)$, то последовательность $S_{\mathbf{n}_k}(f,\mathbf{x})$ и последовательности $\tilde S_{\mathbf{n}_k,B}(f,\mathbf{x})$ для всех $B\subset\{1,2,\dots,d\}$ сходятся почти всюду на $[0,2\pi)^d$.*

Из теоремы 1 и результата работы [8] вытекает

Теорема 3. *Пусть $d\in\mathbb{N}$, последовательность $\{\mathbf{n}_k\}_{k=1}^{\infty}\in\mathbb{N}^d$ удовлетворяет условию* (1.3), *причем последовательность $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ в этом условии является лакунарной. Тогда для произвольной функции $f\in L(\ln^+ L)^{d-1}(\ln^+\ln^+ L)(\ln^+\ln^+\ln^+\ln^+ L)([0,2\pi)^d)$ последовательность $S_{\mathbf{n}_k}(f,\mathbf{x})$ и последовательности $\tilde S_{\mathbf{n}_k,B}(f,\mathbf{x})$ для всех $B\subset\{1,2,\dots,d\}$ сходятся почти всюду на $[0,2\pi)^d$.*

2. Вспомогательные утверждения

Пусть $\varphi\in\bar\Phi$. Можно считать, что в формулировке условий на функцию $\psi(u)$ число A равно нулю; в противном случае можно рассматривать функцию $\psi_1(u)=\psi(u+A)$, которая также удовлетворяет требуемым свойствам; при этом соответствующие классы $\varphi(L)(\ln^+ L)^{d-1}([0,2\pi)^d)$,

$d \in \mathbb{N}$, не изменятся. Далее, так как $\varphi'(u) = \psi(u) + u\psi'(u)$ не убывает на $[0, +\infty)$, то $\varphi(u)$ выпуклая на $[0, +\infty)$. Так как

$$\left(\varphi\left(\sqrt{u}\right)\right)' = \frac{\psi(\sqrt{u})}{2\sqrt{u}} + \frac{\psi'(\sqrt{u})}{2}$$

не возрастает на $[0, +\infty)$, то $\varphi(\sqrt{u})$ вогнутая на $[0, +\infty)$. Классы $\varphi(L)(\ln^+ L)^{d-1}([0, 2\pi)^d)$, $d \in \mathbb{N}$, также не изменятся, если функцию φ заменить на отрезке $[0, u_0]$ на функцию $u^{3/2}$, а на интервале $(u_0, +\infty)$ — на функцию $u\psi(u) + b$, где числа $u_0 \in (0, e]$ и $b \in \mathbb{R}$ выбраны так, чтобы функция $\varphi(u)$ осталась выпуклой (в частности, непрерывной) на $[0, +\infty)$, а функция $\varphi(\sqrt{u})$ — вогнутой на $[0, +\infty)$.

Таким образом, с учетом вышеотмеченного, не ограничивая общности, в доказательстве теоремы 1 будем для удобства полагать, что

$$\varphi(u) = \begin{cases} u\psi(u) + b, & u > u_0, \\ u^{3/2}, & 0 \leqslant u \leqslant u_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

где функция $\psi(u)$ дифференцируема при $u > u_0$, $\psi(u)$ и $u\psi'(u)$ не убывают на $[u_0, +\infty)$, а $\psi(u)u^{-1/2}$ и $\psi'(u)$ не возрастают на $[u_0, +\infty)$; кроме того, функция $\varphi(u)$ выпуклая на $[0, +\infty)$, а функция $\varphi(\sqrt{u})$ — вогнутая на $[0, +\infty)$. Множество функций $\varphi(u) \in \bar{\Phi}$ с описанными выше дополнительными свойствами будем обозначать через Φ.

Следующее утверждение является тривиальным следствием леммы 2 работы [14].

Лемма 1. *Пусть $\varphi \in \Phi$, $f \in \varphi(L)\ln^+ L\,(\mathbb{R}^d)$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, $\mu^2 + \nu^2 \neq 0$. Тогда функция $h^{\mu,\nu}(x_1, x_2, \ldots, x_d)$, определяемая равенством*

$$h^{\mu,\nu}(x_1, x_2, \ldots, x_d) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x_1 + \mu t, x_2 + \nu t, x_3, \ldots, x_d)\frac{1}{t}\, dt, \tag{2.2}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения, принадлежит классу $\varphi(L)(\mathbb{R}^d)$ и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(|h^{\mu,\nu}(x_1, \ldots, x_d)|)\, dx_1 \ldots dx_d \leqslant A_1 \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(|f(x_1, \ldots, x_d)|) \ln^+ |f(x_1, \ldots, x_d)|\, dx_1 \ldots dx_d,$$

где константа A_1 не зависит от f.

Теперь докажем аналог леммы 1 для класса $L^2(\mathbb{R})$.

Лемма 2. *Пусть $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, $\mu^2 + \nu^2 \neq 0$. Тогда функция $h^{\mu,\nu}(x_1, x_2, \ldots, x_d)$, определяемая равенством* (2.2), *принадлежит классу $L^2(\mathbb{R}^d)$ и*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(h^{\mu,\nu}(x_1, \ldots, x_d)\right)^2\, dx_1 \ldots dx_d \leqslant A_2 \int\limits_{\mathbb{R}^d} f^2(x_1, \ldots, x_d)\, dx_1 \ldots dx_d, \tag{2.3}$$

где константа A_2 не зависит от f.

Доказательство. Пусть $g \in L^2(\mathbb{R})$, $\bar{g}(x)$ — преобразование Гильберта функции g:

$$\bar{g}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{g(t + x)}{t}\, dt,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. Известно (см., например, [15, гл. 5, теорема 2]), что преобразование Гильберта является оператором типа $(2, 2)$, т. е. существует абсолютная константа $A_2 > 0$ такая, что для всех $g \in L^2(\mathbb{R})$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} (\bar{g}(t))^2 dt \leqslant A_2 \int\limits_{\mathbb{R}} g^2(t) dt. \tag{2.4}$$

Пусть $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Без ограничения общности можно считать, что $\mu \neq 0$. Вводя новые переменные $x_1 = x_1',\ x_2 = x_2' + (\nu/\mu)x_1',\ x_3 = x_3', \dots, x_d = x_d'$, получим

$$h^{\mu,\nu}(x_1, x_2, \dots, x_d) = \int\limits_{\mathbb{R}} f\Big(x_1' + \mu t, x_2' + \frac{\nu}{\mu}x_1' + \nu t, x_3', \dots, x_d'\Big)\frac{1}{t}\ dt$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} f(x_1' + t, x_2' + \frac{\nu}{\mu}(x_1' + t), x_3', \dots, x_d')\frac{1}{t}\ dt. \tag{2.5}$$

При фиксированных $x_2',\dots,x_d'$ правая часть (2.5) как функция переменной x_1' является преобразованием Гильберта функции $g(x_1') = f(x_1', x_2' + (\nu/\mu)x_1', x_3', \dots, x_d')$, поэтому согласно (2.4) имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}} f(x_1' + t, x_2' + \frac{\nu}{\mu}(x_1' + t), x_3', \dots, x_d')\frac{1}{t}dt\Bigg)^2 dx_1'$$

$$\leqslant A_2 \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(f\big(x_1', x_2' + (\nu/\mu)x_1', x_3', \dots, x_d'\big)\Big)^2\ dx_1'. \tag{2.6}$$

Интегрируя (2.6) по $(x_2', \dots, x_d') \in \mathbb{R}^{d-1}$, пользуясь равенством (2.5) и замечая, что якобиан перехода от $(x_1', x_2', \dots, x_d')$ к $(x_1, x_2, \dots, x_d)$ равен единице, получаем (2.3). Лемма доказана.

Пусть

$$D_n(t) = \frac{\sin\Big(n + \dfrac{1}{2}\Big)t}{2\sin\dfrac{t}{2}}, \quad \tilde{D}_n(t) = \frac{\cos\dfrac{t}{2} - \cos\Big(n + \dfrac{1}{2}\Big)t}{2\sin\dfrac{t}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R},$$

— ядро Дирихле и сопряженное ядро Дирихле,

$$D_\beta^*(t) = \frac{\sin\beta t}{t}, \quad \tilde{D}_\beta^*(t) = \frac{1 - \cos\beta t}{t}, \quad \beta > 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

— модифицированное ядро Дирихле и модифицированное сопряженное ядро Дирихле соответственно. Обозначим для функции f, определенной на $\mathbb{R}$,

$$S_\beta^*(f, x) = \int\limits_{\mathbb{R}} D_\beta^*(t)f(x + t)dt, \quad \tilde{S}_\beta^*(f, x) = -\int\limits_{\mathbb{R}} \tilde{D}_\beta^*(t)f(x + t)dt.$$

Для последовательности положительных чисел $\theta = \{\beta_k\}_{k=1}^\infty$ положим

$$M^*(f, x) = M^*(f, \theta, x) = \sup_{k\in\mathbb{N}} |S_{\beta_k}^*(f, x)|, \quad \tilde{M}^*(f, x) = \tilde{M}^*(f, \theta, x) = \sup_{k\in\mathbb{N}} |\tilde{S}_{\beta_k}^*(f, x)|.$$

Лемма 3. *Пусть $\varphi \in \Phi$, $\alpha > 0$, $\{m_k\}_{k=1}^\infty$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Предположим, что для любой функции $g \in \varphi(L)([0, 2\pi))$ последовательность сумм Фурье $S_{m_k}(g, x)$ сходится почти всюду. Тогда для функции $f \in \varphi(L)(\mathbb{R})$, последовательности $\theta = \{\alpha m_k\}_{k=1}^\infty$ и числа $y > 0$*

$$\operatorname{mes}\{x \in [-\pi, \pi) \colon M^*(f, \theta, x) > y\} \leqslant A_3 \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi\Big(\frac{|f(x)|}{y}\Big)dx, \tag{2.7}$$

$$\operatorname{mes}\{x \in [-\pi, \pi) : \tilde{M}^*(f, \theta, x) > y\} \leqslant A_3 \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi\Big(\frac{|f(x)|}{y}\Big)dx, \tag{2.8}$$

где константа A_3 не зависит ни от f, ни от y.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем вначале справедливость оценки (2.7). Пусть функция g принадлежит классу $\varphi(L)([0,2\pi))$. Поскольку последовательность сумм Фурье $S_{m_k}(g,x)$ сходится почти всюду, то мажоранта $M(g,x) = M(g,\{m_k\},x) = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}}|S_{m_k}(g,x)|$ почти всюду конечна. Отсюда согласно [16, теорема 3] найдется константа $C_1 > 0$ такая, что для всех $g \in \varphi(L)([0,2\pi))$ и $y > 0$ справедлива оценка

$$\operatorname{mes}\{x \in [-\pi,\pi)\colon M(g,x) > y\} \leqslant C_1 \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi\Big(\frac{|g(x)|}{y}\Big)\,dx. \tag{2.9}$$

Покажем, что из (2.9) для функций $f \in \varphi(L)(\mathbb{R})$ и $y > 0$ вытекает оценка

$$\operatorname{mes}\Big\{x \in \Big(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big)\colon \sup_{k\in\mathbb{N}}\Big|\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t+x)D^*_{m_k}(t)dt\Big| > y\Big\} \leqslant C_2 \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi\Big(\frac{|f(x)|}{y}\Big)\,dx. \tag{2.10}$$

В самом деле, пусть $f^1(x)$ — 2π-периодическая функция, совпадающая на $[-\pi,\pi)$ с функцией $f(x)$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда с помощью неравенств

$$|D_{m_k}(t) - D^*_{m_k}(t)| \leqslant C_3 \quad \text{при} \quad t \in (-\pi,\pi), \quad |D^*_{m_k}(t)| \leqslant \frac{2}{\pi} \quad \text{при} \quad |t| \geqslant \frac{\pi}{2}$$

имеем

$$\Big|\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} f^1(t+x)D^*_{m_k}(t)\,dt\Big| = \Big|\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^1(t+x)D_{m_k}(t)\,dt + \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^1(t+x)(D^*_{m_k}(t) - D_{m_k}(t))\,dt$$

$$-\Big(\int\limits_{-\pi}^{-\pi/2} + \int\limits_{\pi/2}^{\pi}\Big) f^1(t+x)D^*_{m_k}(t)\,dt\Big| \leqslant \pi|S_{m_k}(f^1,x)| + (C_3+2)\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f^1(t)|\,dt,$$

откуда вытекает, что левая часть (2.10) не превосходит

$$\operatorname{mes}\Big\{x \in \Big(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big)\colon M(f^1,x) > \frac{y}{2\pi}\Big\} + \operatorname{mes}\Big\{x \in \Big(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big)\colon (C_3+2)\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f^1(t)|\,dt > \frac{y}{2}\Big\}.$$

Заметим, что из условия $\varphi(0) = 0$ и вогнутости функции $\varphi(\sqrt{u})$ вытекает неравенство

$$\varphi(\beta u) \leqslant \beta^2\varphi(u) \quad \text{для всех} \quad u \geqslant 0, \quad \beta \geqslant 1. \tag{2.11}$$

Применяя последовательно неравенства Иенсена и Чебышева, а затем (2.11), получаем

$$\operatorname{mes}\Big\{x \in \Big(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big)\colon (C_3+2)\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f^1(t)|\,dt > \frac{y}{2}\Big\}$$

$$= \operatorname{mes}\Big\{x \in \Big(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big)\colon \varphi\Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{|f^1(t)|}{y}\,dt\Big) > \varphi\Big(\frac{1}{2(C_3+2)}\Big)\Big\}$$

$$\leqslant \operatorname{mes}\Big\{x \in \Big(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big)\colon \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi\Big(\frac{2\pi|f^1(t)|}{y}\Big)\,dt > \varphi\Big(\frac{1}{2(C_3+2)}\Big)\Big\}$$

$$\leqslant \frac{1}{2\varphi(1/(2(C_3+2)))}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi\Big(\frac{2\pi|f^1(t)|}{y}\Big)\,dt \leqslant \frac{2\pi^2}{\varphi(1/(2(C_3+2)))}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi\Big(\frac{|f^1(t)|}{y}\Big)\,dt.$$

Отсюда и из оценки (2.9), примененной при $g(x) = f^1(x)$, получаем соотношение (2.10) для функции f^1 вместо f. Замечая, что в (2.10) используются значения функции f лишь на $[-\pi,\pi)$, заключаем, что (2.10) справедливо и для функции f.

Пусть $\alpha > 0$. Тогда для точки $v = \alpha x$ и функции $h(u) = f(u/\alpha)$ имеем

$$\int_{-\pi/(2\alpha)}^{\pi/(2\alpha)} f(t+x)D^*_{\alpha m_k}(t)\,dt = \int_{-\pi/(2\alpha)}^{\pi/(2\alpha)} f(t+x)\frac{\sin\alpha m_k t}{t}\,dt$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f\left(\frac{v+u}{\alpha}\right)\frac{\sin m_k u}{u}\,du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} h(v+u)D^*_{m_k}(u)\,du.$$

Отсюда с помощью оценки (2.10), примененной к функции $h(u)$, получаем

$$\operatorname{mes}\Big\{x\in\Big(-\frac{\pi}{2\alpha},\frac{\pi}{2\alpha}\Big):\ \sup_{k\in\mathbb{N}}\Big|\int_{-\pi/(2\alpha)}^{\pi/(2\alpha)} f(t+x)D^*_{\alpha m_k}(t)\,dt\Big| > y\Big\}$$

$$= \frac{1}{\alpha}\operatorname{mes}\Big\{v\in\Big(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big):\ \sup_{k\in\mathbb{N}}\Big|\int_{-\pi/2}^{\pi/2} h(u+v)D^*_{m_k}(u)\,du\Big| > y\Big\}$$

$$\leqslant \frac{C_2}{\alpha}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi\Big(\frac{|h(v)|}{y}\Big)\,dv = C_2\int_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha}\varphi\Big(\frac{|f(x)|}{y}\Big)\,dx \leqslant C_2\int_{\mathbb{R}}\varphi\Big(\frac{|f(x)|}{y}\Big)\,dx. \tag{2.12}$$

Далее пусть $j_0 = [\alpha]+1$. Поскольку

$$\Big\{x\in(-\pi,\pi):\ \sup_{k\in\mathbb{N}}\Big|\int_{-\pi/(2\alpha)}^{\pi/(2\alpha)} f(t+x)D^*_{\alpha m_k}(t)\,dt\Big| > y\Big\}$$

$$\subset \bigcup_{j=-j_0}^{j_0}\Big\{x\in\Big(-\frac{\pi}{2\alpha}+\frac{\pi j}{\alpha},\frac{\pi}{2\alpha}+\frac{\pi j}{\alpha}\Big):\ \sup_{k\in\mathbb{N}}\Big|\int_{-\pi/(2\alpha)}^{\pi/(2\alpha)} f(t+x)D^*_{\alpha m_k}(t)\,dt\Big| > y\Big\}$$

$$= \bigcup_{j=-j_0}^{j_0}\Big\{x\in\Big(-\frac{\pi}{2\alpha},\frac{\pi}{2\alpha}\Big):\ \sup_{k\in\mathbb{N}}\Big|\int_{-\pi/(2\alpha)}^{\pi/(2\alpha)} f\Big(t+x-\frac{\pi j}{\alpha}\Big)D^*_{\alpha m_k}(t)\,dt\Big| > y\Big\},$$

то согласно (2.12)

$$\operatorname{mes}\Big\{x\in(-\pi,\pi):\ \sup_{k\in\mathbb{N}}\Big|\int_{-\pi/(2\alpha)}^{\pi/(2\alpha)} f(t+x)D^*_{\alpha m_k}(t)\,dt\Big| > y\Big\}$$

$$\leqslant \sum_{j=-j_0}^{j_0} C_2\int_{\mathbb{R}}\varphi\Big(\frac{|f(x-\pi j/\alpha)|}{y}\Big)\,dx \leqslant C_3\int_{\mathbb{R}}\varphi\Big(\frac{|f(x)|}{y}\Big)\,dx, \tag{2.13}$$

где $C_3 = C_2(2\alpha+3)$. Наконец,

$$\mathrm{mes}\{x\in[-\pi,\pi): M^*(f,\theta,x)>y\} = \mathrm{mes}\Big\{x\in(\pi,\pi):\ \sup_{k\in\mathbb{N}}\Big|\int\limits_{\mathbb{R}} f(t+x)D^*_{\alpha m_k}(t)\,dt\Big|>y\Big\}$$

$$\leqslant \mathrm{mes}\Big\{x\in(-\pi,\pi):\ \sup_{k\in\mathbb{N}}\Big|\int\limits_{-\pi/(2\alpha)}^{\pi/(2\alpha)} f(t+x)D^*_{\alpha m_k}(t)\,dt\Big|>\frac{y}{2}\Big\}$$

$$+\,\mathrm{mes}\Big\{x\in(-\pi,\pi):\ \sup_{k\in\mathbb{N}}\Big|\int\limits_{\mathbb{R}\setminus(\frac{-\pi}{2\alpha},\frac{\pi}{2\alpha})} f(t+x)D^*_{\alpha m_k}(t)\,dt\Big|>\frac{y}{2}\Big\} = \mu_1+\mu_2. \qquad (2.14)$$

Согласно (2.13), а также (2.11) имеем $\mu_1\leqslant 4C_3\int_{\mathbb{R}}\varphi\Big(\frac{|f(x)|}{y}\Big)dx$. Получим аналогичную оценку для μ_2, и тем самым неравенство (2.7) будет доказано.

Используя представление функции φ в виде (2.1), для $x\in(-\pi,\pi)$ и $u_0\geqslant 0$ имеем

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\Big|\int\limits_{\mathbb{R}\setminus(\frac{-\pi}{2\alpha},\frac{\pi}{2\alpha})}\frac{f(t+x)D^*_{\alpha m_k}(t)}{y}\,dt\Big|\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}\setminus(\frac{-\pi}{2\alpha},\frac{\pi}{2\alpha})}\frac{|f(t+x)|}{|t|y}\,dt$$

$$\leqslant\int\limits_{\big\{t\in\mathbb{R}\setminus(\frac{-\pi}{2\alpha},\frac{\pi}{2\alpha}):\ \frac{|f(t+x)|}{y}>u_0\big\}}\frac{|f(t+x)|}{|t|y}\,dt+\int\limits_{\big\{t\in\mathbb{R}\setminus(\frac{-\pi}{2\alpha},\frac{\pi}{2\alpha}):\ \frac{|f(t+x)|}{y}\leqslant u_0\big\}}\frac{|f(t+x)|}{|t|y}\,dt.$$

Отсюда

$$\mu_2\leqslant\mathrm{mes}\Big\{x\in(-\pi,\pi):\int\limits_{\big\{t\in\mathbb{R}\setminus(\frac{-\pi}{2\alpha},\frac{\pi}{2\alpha}):\ \frac{|f(t+x)|}{y}>u_0\big\}}\frac{|f(t+x)|}{|t|y}\,dt>\frac{1}{4}\Big\}$$

$$+\,\mathrm{mes}\Big\{x\in(-\pi,\pi):\Big(\int\limits_{\big\{t\in\mathbb{R}\setminus(\frac{-\pi}{2\alpha},\frac{\pi}{2\alpha}):\ \frac{|f(t+x)|}{y}\leqslant u_0\big\}}\frac{|f(t+x)|}{|t|y}\,dt\Big)^{3/2}>\frac{1}{4^{3/2}}\Big\}=\mu_2^1+\mu_2^2. \qquad (2.15)$$

Применяя к первому слагаемому в правой части (2.15) неравенство Чебышева, а затем используя представление функции φ в виде (2.1), получаем

$$\mu_2^1\leqslant 4\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{\big\{t\in\mathbb{R}\setminus(\frac{-\pi}{2\alpha},\frac{\pi}{2\alpha}):\ \frac{|f(t+x)|}{y}>u_0\big\}}\frac{|f(t+x)|}{|t|y}\,dt\,dx\leqslant 16\alpha\int\limits_{\big\{t\in\mathbb{R}:\ \frac{|f(t)|}{y}>u_0\big\}}\frac{|f(t)|}{y}\,dt\leqslant C_4\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi\Big(\frac{|f(t)|}{y}\Big)\,dt.$$

Действуя аналогичным образом со слагаемым μ_2^2, используя вдобавок неравенство Гельдера для интегралов, имеем

$$\mu_2^2\leqslant 4^{3/2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big(\int\limits_{\big\{t\in\mathbb{R}\setminus(\frac{-\pi}{2\alpha},\frac{\pi}{2\alpha}):\ \frac{|f(t+x)|}{y}\leqslant u_0\big\}}\frac{|f(t+x)|}{|t|y}\,dt\Big)^{3/2}dx$$

$$\leqslant 2\cdot 4^{3/2}\pi\int\limits_{\big\{t\in\mathbb{R}:\ \frac{|f(t)|}{y}\leqslant u_0\big\}}\Big(\frac{|f(t)|}{y}\Big)^{3/2}dt\,\Big(\int\limits_{\{t\in\mathbb{R}:|t|\geqslant\frac{\pi}{2\alpha}\}}\frac{dt}{t^3}\Big)^{1/2}\leqslant C_5\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi\Big(\frac{|f(t)|}{y}\Big)dt.$$

Таким образом, $\mu_2 \leqslant \mu_2^1 + \mu_2^2 \leqslant (C_4 + C_5) \int_{\mathbb{R}} \varphi\Big(\frac{|f(t)|}{y}\Big) dt$, и (2.7) доказано.

Обратимся теперь к оценке (2.8). Поскольку для любой функции $g \in \varphi(L)([0, 2\pi))$ подпоследовательность $S_{m_k}(g, x)$ сумм Фурье сходится почти всюду на $[0, 2\pi)$, то подпоследовательность $\tilde{S}_{m_k}(g, x)$ сопряженных сумм Фурье любой функции g из $\varphi(L)([0, 2\pi))$ также сходится почти всюду [17, т. 2, гл. 13, замечание 1 к теореме 5.1]. Дальнейшее доказательство справедливости оценки (2.8) аналогично приведенному доказательству справедливости оценки (2.7), поскольку использованные свойства ядра Дирихле и модифицированного ядра Дирихле аналогичны соответствующим свойствам сопряженного ядра Дирихле и модифицированного сопряженного ядра Дирихле. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $\alpha > 0$, $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда для функции $f \in L^2(\mathbb{R})$, последовательности $\theta = \{\alpha m_k\}_{k=1}^{\infty}$ и числа $y > 0$*

$$\operatorname{mes}\{x \in [-\pi, \pi) : M^*(f, \theta, x) > y\} \leqslant \frac{A_4}{y^2} \int\limits_{\mathbb{R}} f^2(x) dx, \tag{2.16}$$

$$\operatorname{mes}\{x \in [-\pi, \pi) : \tilde{M}^*(f, \theta, x) > y\} \leqslant \frac{A_4}{y^2} \int\limits_{\mathbb{R}} f^2(x) dx, \tag{2.17}$$

где константа A_4 не зависит ни от f, ни от y.

Доказательство. Согласно теореме Карлесона [1] ряд Фурье любой функции $f \in L^2([0, 2\pi))$ сходится почти всюду. Отсюда следует, что для любой возрастающей последовательности натуральных чисел $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ мажоранта $M(g, x) = M(g, \{m_k\}, x) = \sup\limits_{k \in \mathbb{N}} |S_{m_k}(g, x)|$ почти всюду конечна. Дальнейшее доказательство почти идентично доказательству леммы 3. В самом деле, при получении оценки (2.13) в доказательстве леммы 3 мы пользовались лишь следующими свойствами функции $\varphi \in \Phi : \varphi(0) = 0$, выпуклость $\varphi(u)$ на $[0, +\infty)$ и вогнутость $\varphi(\sqrt{u})$ на $[0, +\infty)$. А этими свойствами функция $\varphi(u) = u^2$ обладает. Следовательно, имеет место следующий аналог (2.13):

$$\operatorname{mes}\Bigg\{x \in (-\pi, \pi) : \sup_{k \in \mathbb{N}} \Bigg| \int\limits_{-\pi/(2\alpha)}^{\pi/(2\alpha)} f(t + x) D^*_{\alpha m_k}(t)\, dt \Bigg| > y\Bigg\} \leqslant C_3 \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(\frac{|f(x)|}{y}\Big)^2 dx. \tag{2.18}$$

Теперь воспользуемся неравенством (2.14). Затем к слагаемому μ_1 применим (2.18), а для слагаемого μ_2 справедлива следующая цепочка неравенств

$$\mu_2 \leqslant \operatorname{mes}\Bigg\{x \in (-\pi, \pi) : \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R} \setminus \left(\frac{-\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha}\right)} \frac{|f(t + x)|}{|t| y}\, dt \Bigg)^2 > \frac{1}{4}\Bigg\}$$

$$\leqslant 8\pi \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(\frac{f(t)}{y}\Big)^2 dt \int\limits_{\mathbb{R} \setminus \left(\frac{-\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha}\right)} \frac{1}{t^2}\, dt = \frac{C_6}{y^2} \int\limits_{\mathbb{R}} f^2(t) dt.$$

Таким образом, (2.16) доказано. Оценка (2.17) доказывается аналогично оценке (2.8). Лемма доказана.

3. Основные леммы и доказательство теоремы 1

Пусть d — натуральное число, $B \subset \{1, 2, \ldots, d\}$, $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ — d-мерный вектор с положительными координатами. Для функции f, определенной на $\mathbb{R}^d$, и $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ положим

$$S^*_{k,B}(f, \mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \prod_{j \in B} (-\tilde{D}^*_{\alpha_j m_k}(t_j)) \prod_{j \in \{1, \ldots, d\} \setminus B} D^*_{\alpha_j m_k}(t_j) f(\mathbf{x} + \mathbf{t})\, d\mathbf{t}, \quad M^*_B(f, \mathbf{x}) = \sup_{k \in \mathbb{N}} |S^*_{k,B}(f, \mathbf{x})|.$$

Лемма 5. *Пусть* $\varphi \in \Phi$, $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— возрастающая последовательность натуральных чисел. Предположим, что для любой функции* $g \in \varphi(L)([0, 2\pi))$ *последовательность сумм Фурье* $S_{m_k}(g, x)$ *сходится почти всюду. Тогда для каждого* $d \in \mathbb{N}$ *и* d*-мерного вектора* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ *с положительными координатами найдется константа* $K_d > 0$ *такая, что для любой функции* $f \in \varphi(L)(\ln^+ L)^{d-1}(\mathbb{R}^d)$*, для всех* $B \subset \{1, 2, \ldots, d\}$ *и любых* $y > 1$

$$\operatorname{mes}\Big\{\mathbf{x} \in [-\pi, \pi)^d : M_B^*(f, \mathbf{x}) > y\Big\} \leqslant \frac{K_d}{y} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(|f(\mathbf{x})|)(\ln^+ |f(\mathbf{x})|)^{d-1}\, d\mathbf{x}. \tag{3.1}$$

Лемма 6. *Пусть* $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— возрастающая последовательность натуральных чисел,* $d \in \mathbb{N}$*,* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ *—* d*-мерный вектор с положительными координатами. Тогда найдется константа* $K_d > 0$ *такая, что для любой функции* $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$*, для всех* $B \subset \{1, 2, \ldots, d\}$ *и любых* $y > 0$

$$\operatorname{mes}\Big\{\mathbf{x} \in [-\pi, \pi)^d : M_B^*(f, \mathbf{x}) > y\Big\} \leqslant \frac{K_d}{y^2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} f^2(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}. \tag{3.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о лемм 5 и 6 будем вести одновременно индукцией по d.

База индукции. При $d = 1$ утверждение леммы 6 вытекает из леммы 4: для $B = \{\varnothing\}$ оценка (3.2) есть оценка (2.16), а для $B = \{1\}$ — оценка (2.17).

Поскольку функция φ выпуклая и $\varphi(0) = 0$, то для любых $u \geqslant 0$ и $y \geqslant 1$ $\varphi\Big(\dfrac{u}{y}\Big) \leqslant \dfrac{\varphi(u)}{y}$. С учетом этого неравенства, при $d = 1$ утверждение леммы 5 следует из леммы 3: для $B = \{\varnothing\}$ оценка (3.1) вытекает из оценки (2.7), а для $B = \{1\}$ — из оценки (2.8).

В случае леммы 5 обозначим для краткости

$$\varphi_d(u) = \varphi(u)(\ln^+ u)^{d-1}, \quad d \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Шаг индукции. Пусть $d \geqslant 2$. Предположим, что оценка (3.1) верна для размерности $d - 1$, и докажем ее для размерности d. Пусть B — некоторое подмножество множества $N_d = \{1, 2, \ldots, d\}$. Обозначим $\bar{B} = N_d \backslash B$. Рассмотрим три случая.

С л у ч а й 1: $1 \in \bar{B}$, $2 \in \bar{B}$.
Обозначим

$$\Pi_k = \Pi_k(t_3, \ldots, t_d) = \prod_{j \in B \backslash \{1,2\}} (-\tilde{D}^*_{\alpha_j m_k}(t_j)) \prod_{j \in \bar{B} \backslash \{1,2\}} D^*_{\alpha_j m_k}(t_j).$$

Тогда

$$S^*_{k,B}(f, \mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} D^*_{\alpha_1 m_k}(t_1) D^*_{\alpha_2 m_k}(t_2) \Pi_k(t_3, \ldots, t_d) f(\mathbf{x} + \mathbf{t})\, d\mathbf{t}. \tag{3.4}$$

Для произведения ядер Дирихле $D^*_{\alpha_1 m_k}(t_1) D^*_{\alpha_2 m_k}(t_2)$ имеет место равенство (см. [14, соотношение (3.4)])

$$D^*_{\alpha_1 m_k}(t_1) D^*_{\alpha_2 m_k}(t_2) = D_k^1 + D_k^2, \tag{3.5}$$

где

$$D_k^1 = \frac{1}{2t_1}\Big[\tilde{D}^*_{\alpha_2 m_k}\Big(t_2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} t_1\Big) - \tilde{D}^*_{\alpha_2 m_k}\Big(t_2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} t_1\Big)\Big], \tag{3.6}$$

$$D_k^2 = \frac{1}{2t_2}\Big[\tilde{D}^*_{\alpha_1 m_k}\Big(t_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} t_2\Big) - \tilde{D}^*_{\alpha_1 m_k}\Big(t_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} t_2\Big)\Big]. \tag{3.7}$$

Заметим, что при каждом k функции D_k^1 и D_k^2 ограничены.

Далее будем считать, что $f \in \varphi_d(L)(\mathbb{R}^d)$ (в случае леммы 5) или $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ (в случае леммы 6). Пусть $(x_1, \ldots, x_d) \in [-\pi, \pi)^d$. Умножим обе части равенства (3.6) на

$$\Pi_k(t_3, \ldots, t_d) f(x_1 + t_1, \ldots, x_d + t_d)$$

и проинтегрируем по множеству $\{(t_1, t_2, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d : |t_1| > \varepsilon\}$. Затем разобьем получившийся в правой части интеграл на разность двух интегралов в соответствии с разностью в (3.6), сделаем в них замену переменных соответственно $u_1 = t_1,\ u_2 = t_2 + \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}t_1,\ u_3 = t_3, \ldots, u_d = t_d$ и $u_1 = t_1,\ u_2 = t_2 - \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}t_1,\ u_3 = t_3, \ldots, u_d = t_d$ и перейдем к пределу при $\varepsilon \to +0$. Получим равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} D_k^1\Pi_k(t_3, \ldots, t_d) f(x_1 + t_1, \ldots, x_d + t_d)\, dt_1 \ldots dt_d$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \tilde{D}^*_{\alpha_2 m_k}(u_2)\Pi_k(u_3, \ldots, u_d) h^{1,-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}(x_1, x_2 + u_2, x_3 + u_3, \ldots, x_d + u_d)\, du_2 \ldots du_d$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \tilde{D}^*_{\alpha_2 m_k}(u_2)\Pi_k(u_3, \ldots, u_d) h^{1,\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}(x_1, x_2 + u_2, x_3 + u_3, \ldots, x_d + u_d)\, du_2 \ldots du_d, \tag{3.8}$$

где функции $h^{1,-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}$ и $h^{1,\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}$ определены соотношением (2.2). Проделав с равенством (3.7) то же, что и с (3.6), только производя при этом замены $u_1 = t_1 + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}t_2,\ u_2 = t_2, \ldots, u_d = t_d$ и $u_1 = t_1 - \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}t_2,\ u_2 = t_2, \ldots, u_d = t_d$, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} D_k^2\Pi_k(t_3, \ldots, t_d) f(x_1 + t_1, \ldots, x_d + t_d)\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \tilde{D}^*_{\alpha_1 m_k}(u_1)\Pi_k(u_3, \ldots, u_d)\, h^{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1},1}(x_1 + u_1, x_2, x_3 + u_3, \ldots, x_d + u_d)\, du_1 du_3 \ldots du_d$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \tilde{D}^*_{\alpha_1 m_k}(u_1)\Pi_k(u_3, \ldots, u_d)\ h^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1},1}(x_1 + u_1, x_2, x_3 + u_3, \ldots, x_d + u_d)\, du_1 du_3 \ldots du_d. \tag{3.9}$$

Используя определение $M_B^*(f, \mathbf{x})$, (3.4), (3.5), (3.8) и (3.9), имеем

$$2M_B^*(f, \mathbf{x})$$

$$\leqslant \sup_{k\in\mathbb{N}}\Bigg|\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \tilde{D}^*_{\alpha_2 m_k}(u_2)\Pi_k(u_3, \ldots, u_d) h^{1,-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}(x_1, x_2 + u_2, x_3 + u_3, \ldots, x_d + u_d)\, du_2 \ldots du_d\Bigg|$$

$$+ \sup_{k\in\mathbb{N}}\Bigg|\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \tilde{D}^*_{\alpha_2 m_k}(u_2)\Pi_k(u_3, \ldots, u_d) h^{1,\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}(x_1, x_2 + u_2, x_3 + u_3, \ldots, x_d + u_d)\, du_2 \ldots du_d\Bigg|$$

$$+ \sup_{k\in\mathbb{N}}\Bigg|\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \tilde{D}^*_{\alpha_1 m_k}(u_1)\Pi_k(u_3, \ldots, u_d) h^{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1},1}(x_1 + u_1, x_2, x_3 + u_3, \ldots, x_d + u_d)\, du_1 du_3 \ldots du_d\Bigg|$$

$$+ \sup_{k\in\mathbb{N}}\Bigg|\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \tilde{D}^*_{\alpha_1 m_k}(u_1)\Pi_k(u_3, \ldots, u_d) h^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1},1}(x_1 + u_1, x_2, x_3 + u_3, \ldots, x_d + u_d)\, du_1 du_3 \ldots du_d\Bigg|$$

$$= M_B^1(f, \mathbf{x}) + M_B^2(f, \mathbf{x}) + M_B^3(f, \mathbf{x}) + M_B^4(f, \mathbf{x}). \tag{3.10}$$

Покажем, что $M_B^1(f, \mathbf{x})$ удовлетворяет неравенству (3.1) (в случае леммы 5) или неравенству (3.2) (в случае леммы 6) с некоторой константой K_d^1. Зафиксируем $x_1 \in [-\pi, \pi)$. Тогда множество $B' = B \cup \{2\} \subset \{2, \ldots, d\}$, последовательность $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, $d-1$-мерный вектор

$(\alpha_2, \dots, \alpha_d)$ и построенный на их основе применяемый к функции $d-1$ переменного $g(x_2, \dots, x_d)$ оператор

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |S^*_{k,B'}(g,(x_2,\dots,x_d))|,$$

где

$$S^*_{k,B'}(g,(x_2,\dots,x_d))\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \prod_{j\in B'} (-\tilde{D}^*_{\alpha_j m_k}(u_j)) \prod_{j\in\{2,\dots,d\}\setminus B'} D^*_{\alpha_j m_k}(u_j) g(x_2+u_2,\dots,x_d+u_d)\, du_2\dots du_d,$$

удовлетворяют предположению индукции. Поэтому согласно предположению индукции для функции $g(x_2,\dots,x_d) = h^{1,-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(x_1,x_2,x_3,\dots,x_d)$ (x_1 фиксировано) в случае леммы 5 справедлива оценка

$$\begin{aligned}
&\mathrm{mes}\biggl\{(x_2,\dots,x_d)\in[-\pi,\pi)^{d-1} : \sup_{k\in\mathbb{N}}\biggl|\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \tilde{D}^*_{\alpha_2 m_k}(u_2)\Pi_k(u_3,\dots,u_d) \\
&\qquad \times h^{1,-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(x_1,x_2+u_2,x_3+u_3,\dots,x_d+u_d)\, du_2\dots du_d\biggr| > y\biggr\} \\
&= \mathrm{mes}\biggl\{(x_2,\dots,x_d)\in[-\pi,\pi)^{d-1} : \sup_{k\in\mathbb{N}}\Bigl|S^*_{k,B'}\Bigl(h^{1,-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}},(x_2,\dots,x_d)\Bigr)\Bigr| > y\biggr\} \\
&\leqslant \frac{K_{d-1}}{y}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \varphi_{d-1}\Bigl(\bigl|h^{1,-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(x_1,x_2,x_3,\dots,x_d)\bigr|\Bigr)\, dx_2\dots dx_d, \quad y>1.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

В случае леммы 6 аналогичным образом имеем

$$\begin{aligned}
&\mathrm{mes}\biggl\{(x_2,\dots,x_d)\in[-\pi,\pi)^{d-1} :\ \sup_{k\in\mathbb{N}}\biggl|\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \tilde{D}^*_{\alpha_2 m_k}(u_2)\Pi_k(u_3,\dots,u_d) \\
&\qquad \times h^{1,-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(x_1,x_2+u_2,x_3+u_3,\dots,x_d+u_d)\, du_2\dots du_d\biggr| > y\biggr\} \\
&\leqslant \frac{K_{d-1}}{y^2}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \Bigl(h^{1,-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(x_1,x_2,x_3,\dots,x_d)\Bigr)^2\, dx_2\dots dx_d, \quad y>0.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Пользуясь тем, что

$$\begin{aligned}
&\mathrm{mes}\Bigl\{(x_1,x_2,\dots,x_d)\in[-\pi,\pi)^d : M^1_B(f,\mathbf{x}) > y\Bigr\} \\
&= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{mes}\biggl\{(x_2,\dots,x_d)\in[-\pi,\pi)^{d-1} :\ \sup_{k\in\mathbb{N}}\Bigl|S^*_{k,B'}\Bigl(h^{1,-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}},(x_2,\dots,x_d)\Bigr)\Bigr| > y\biggr\}\, dx_1,
\end{aligned}$$

а затем применяя (3.11) и теорему Фубини, в случае леммы 5 получаем

$$\begin{aligned}
&\mathrm{mes}\Bigl\{(x_1,x_2,\dots,x_d)\in[-\pi,\pi)^d :\ M^1_B(f,\mathbf{x}) > y\Bigr\} \\
&\leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{K_{d-1}}{y}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \varphi_{d-1}\Bigl(\bigl|h^{1,-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(x_1,x_2,\dots,x_d)\bigr|\Bigr)\, dx_2\dots dx_d\, dx_1 \\
&\leqslant \frac{K_{d-1}}{y}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi_{d-1}\Bigl(\bigl|h^{1,-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(x_1,x_2,\dots,x_d)\bigr|\Bigr)\, dx_1 dx_2\dots dx_d.
\end{aligned}$$

Отсюда и из леммы 1 для $y > 1$ заключаем

$$\operatorname{mes}\Big\{(x_1, x_2, \ldots, x_d) \in [-\pi, \pi)^d \colon M_B^1(f, \mathbf{x}) > y\Big\} \leqslant \frac{K_d^1}{y} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi_d(|f(x_1, x_2, \ldots, x_d)|)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_d.$$

Аналогичным образом в случае леммы 6 из (3.12) имеем

$$\operatorname{mes}\Big\{(x_1, x_2, \ldots, x_d) \in [-\pi, \pi)^d \colon M_B^1(f, \mathbf{x}) > y\Big\}$$

$$\leqslant \frac{K_{d-1}}{y^2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \Big(h^{1, -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(x_1, x_2, \ldots, x_d)\Big)^2\, dx_1 dx_2 \ldots dx_d,$$

откуда с помощью леммы 2 для $y > 0$

$$\operatorname{mes}\Big\{(x_1, x_2, \ldots, x_d) \in [-\pi, \pi)^d \colon M_B^1(f, \mathbf{x}) > y\Big\} \leqslant \frac{K_d^1}{y^2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} (f(x_1, x_2, \ldots, x_d))^2\, dx_1 dx_2 \ldots dx_d.$$

Аналогично можно показать, что мажоранты $M_B^i(f, \mathbf{x})$, $i = 2, 3, 4$, также удовлетворяют (3.1) (или (3.2)) с той же константой K_d^1. Таким образом, для $M_B(f, \mathbf{x})$ неравенство (3.1) (в случае леммы 5) или неравенство (3.2) (в случае леммы 6) выполняется с константой $K_d = 4K_d^1$.

С л у ч а й 2: $1 \in B$, $2 \in \bar{B}$. (Случай, когда $1 \in \bar{B}$, $2 \in B$, рассматривается аналогично). Здесь

$$S_{k,B}^*(f, \mathbf{x}) = -\int\limits_{\mathbb{R}^d} \tilde{D}_{\alpha_1 m_k}^*(t_1) D_{\alpha_2 m_k}^*(t_2) \Pi_k(t_3, \ldots, t_d) f(\mathbf{x} + \mathbf{t})\, d\mathbf{t}. \tag{3.13}$$

Воспользуемся равенством (см. [14, соотношение (3.12)])

$$\tilde{D}_{\alpha_1 m_k}^*(t_1) D_{\alpha_2 m_k}^*(t_2) = D_k^3 + D_k^4, \tag{3.14}$$

где

$$D_k^3 = \frac{1}{2t_1}\Big[D_{\alpha_2 m_k}^*\Big(t_2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} t_1\Big) + D_{\alpha_2 m_k}^*\Big(t_2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} t_1\Big) - 2D_{\alpha_2 m_k}^*(t_2)\Big], \tag{3.15}$$

$$D_k^4 = \frac{1}{2t_2}\Big[D_{\alpha_1 m_k}^*\Big(t_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} t_2\Big) - D_{\alpha_1 m_k}^*\Big(t_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} t_2\Big)\Big]. \tag{3.16}$$

Обе части равенства (3.15) умножим на произведение $\Pi_k f(\mathbf{x} + \mathbf{t})$ и проинтегрируем по множеству $\{(t_1, t_2, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d : |t_1| > \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$. Затем разобьем получившийся в правой части интеграл на три интеграла, сделаем в первых двух из них замену переменных соответственно $u_1 = t_1,\ u_2 = t_2 + \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} t_1,\ u_3 = t_3, \ldots, u_d = t_d$ и $u_1 = t_1,\ u_2 = t_2 - \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} t_1,\ u_3 = t_3, \ldots, u_d = t_d$ и перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$. Аналогичные действия проделаем с равенством (3.16). Используя получившиеся соотношения, а также (3.14) и (3.13), придем к неравенству

$$2M_B^*(f, \mathbf{x})$$

$$\leqslant \sup_{k \in \mathbb{N}} \Bigg| \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} D_{\alpha_2 m_k}^*(u_2) \Pi_k(u_3, \ldots, u_d) h^{1, -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}(x_1, x_2 + u_2, x_3 + u_3, \ldots, x_d + u_d)\, du_2 \ldots du_d \Bigg|$$

$$+ \sup_{k \in \mathbb{N}} \Bigg| \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} D_{\alpha_2 m_k}^*(u_2) \Pi_k(u_3, \ldots, u_d) h^{1, \frac{\alpha_1}{\alpha_2}}(x_1, x_2 + u_2, x_3 + u_3, \ldots, x_d + u_d)\, du_2 \ldots du_d \Bigg|$$

$$+ \sup_{k \in \mathbb{N}} \Bigg| \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} D_{\alpha_2 m_k}^*(u_2) \Pi_k(u_3, \ldots, u_d) h^{1,0}(x_1, x_2 + u_2, x_3 + u_3, \ldots, x_d + u_d)\, du_2 \ldots du_d \Bigg|$$

$$+\sup_{k\in\mathbb{N}}\bigg|\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} D^*_{\alpha_1 m_k}(u_1)\Pi_k(u_3,\dots,u_d)h^{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1},1}(x_1+u_1,x_2,x_3+u_3,\dots,x_d+u_d)\,du_1du_3\dots du_d\bigg|$$

$$+\sup_{k\in\mathbb{N}}\bigg|\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} D^*_{\alpha_1 m_k}(u_1)\Pi_k(u_3,\dots,u_d)h^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1},1}(x_1+u_1,x_2,x_3+u_3,\dots,x_d+u_d)\,du_1du_3\dots du_d\bigg|. \quad (3.17)$$

Используя те же рассуждения, что и в случае 1, можно показать, что все пять слагаемых в правой части (3.17) удовлетворяют (3.1) (или (3.2)), откуда следуют (3.1) и (3.2) для $M_B(f,\mathbf{x})$.

С л у ч а й 3: $1\in B$, $2\in B$.

Этот случай рассматривается аналогично двум предыдущим. Здесь используется тождество $\tilde D^*_{\alpha_1 m_k}(t_1)\tilde D^*_{\alpha_2 m_k}(t_2)=D^5_k+D^6_k$, где

$$D^5_k=\frac{1}{2t_1}\Big[\tilde D^*_{\alpha_2 m_k}\Big(t_2+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}t_1\Big)+\tilde D^*_{\alpha_2 m_k}\Big(t_2-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}t_1\Big)-2\tilde D^*_{\alpha_2 m_k}(t_2)\Big],$$

$$D^6_k=\frac{1}{2t_2}\Big[\tilde D^*_{\alpha_1 m_k}\Big(t_1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}t_2\Big)+\tilde D^*_{\alpha_1 m_k}\Big(t_1-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}t_2\Big)-2\tilde D^*_{\alpha_1 m_k}(t_1)\Big].$$

Таким образом, (3.1) и (3.2) справедливы для любого $d\in\mathbb{N}$ и произвольного $B\subset\{1,2,\dots,d\}$. Леммы 5 и 6 доказаны.

Лемма 7. *Пусть $\varphi\in\Phi$, $\tilde\varphi(u)=\max\{u,\varphi(u)\}$ для $u\geqslant 0$, $\{m_k\}_{k=1}^\infty$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Предположим, что для любой функции $g\in\varphi(L)([0,2\pi))$ последовательность сумм Фурье $S_{m_k}(g,x)$ сходится почти всюду. Тогда для каждого $d\in\mathbb{N}$ и d-мерного вектора $(\alpha_1,\dots,\alpha_d)$ с положительными координатами найдется константа $\bar K_d>0$ такая, что для любой функции $f\in\tilde\varphi(L)(\ln^+L)^d(\mathbb{R}^d)$ и для всех $B\subset\{1,2,\dots,d\}$*

$$\int\limits_{[-\pi,\pi)^d} M^*_B(f,\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\leqslant \bar K_d\bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\tilde\varphi(|f(\mathbf{x})|)(\ln^+|f(\mathbf{x})|)^d\,d\mathbf{x}+1\bigg). \quad (3.18)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f\in\tilde\varphi(L)(\ln^+L)^d(\mathbb{R}^d)$. Положим $\lambda_f(y)=\operatorname{mes}\big\{\mathbf{x}\in[-\pi,\pi)^d: M^*_B(f,\mathbf{x})>y\big\}$. Тогда

$$\int\limits_{[-\pi,\pi)^d} M^*_B(f,\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\leqslant 2(2\pi)^d-\int\limits_2^\infty y\,d\lambda_f(y)\leqslant 2(2\pi)^d+\int\limits_2^\infty \lambda_f(y)dy. \quad (3.19)$$

Для $y>0$, обозначив

$$f^1(\mathbf{x})=f^1_y(\mathbf{x})=\begin{cases} f(\mathbf{x}), & |f(\mathbf{x})|>y,\\ 0, & |f(\mathbf{x})|\leqslant y,\end{cases}\qquad f^2(\mathbf{x})=f^2_y(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})-f^1(\mathbf{x}),$$

имеем

$$\lambda_f(y)\leqslant \operatorname{mes}\{x\in[-\pi,\pi)^d: M^*_B(f^1,\mathbf{x})>y/2\}+\operatorname{mes}\big\{x\in[-\pi,\pi)^d: M^*_B(f^2,\mathbf{x})>y/2\big\}$$
$$=\lambda_{f^1}(y/2)+\lambda_{f^2}(y/2). \quad (3.20)$$

Из (3.19) и (3.20) получаем

$$\int\limits_{[-\pi,\pi)^d} M^*_B(f,\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\leqslant 2(2\pi)^d+\int\limits_2^\infty \lambda_{f^1}(y/2)dy+\int\limits_2^\infty \lambda_{f^2}(y/2)dy.$$

Нетрудно видеть, что $f^1\in\varphi(L)(\ln^+L)^{d-1}(\mathbb{R}^d)$, а $f^2\in L^2(\mathbb{R}^d)$. Поэтому к функции f^1 можно применить лемму 5 и оценить $\lambda_{f^1}(y/2)$ с помощью неравенства (3.1); аналогично к функции f^2

можно применить лемму 6 и оценить $\lambda_{f^2}(y/2)$ с помощью неравенства (3.2). В результате заключаем

$$\int\limits_{[-\pi,\pi)^d} M_B^*(f,\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \ \leqslant\ 2(2\pi)^d + 2K_d\int\limits_2^\infty\biggl(\frac{1}{y}\int\limits_{\{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^d:|f(\mathbf{t})|>y\}}\varphi(|f(\mathbf{t})|)(\ln^+|f(\mathbf{t})|)^{d-1}\,d\mathbf{t}\biggr)dy$$

$$+\,2K_d\int\limits_2^\infty\biggl(\frac{1}{y^2}\int\limits_{\{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^d:|f(\mathbf{t})|\leqslant y\}}|f(\mathbf{t})|^2\,d\mathbf{t}\biggr)dy$$

$$=2K_d\int\limits_{\mathbb{R}^d\cap\{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^d:|f(\mathbf{t})|>2\}}\varphi(|f(\mathbf{t})|)(\ln^+|f(\mathbf{t})|)^{d-1}\biggl(\int\limits_2^{|f(\mathbf{t})|}\frac{dy}{y}\biggr)\,d\mathbf{t}+2K_d\int\limits_{\mathbb{R}^d}|f(\mathbf{t})|^2\biggl(\int\limits_{|f(\mathbf{t})|}^\infty\frac{dy}{y^2}\biggr)d\mathbf{t}+2(2\pi)^d,$$

откуда очевидно вытекает (3.18). Лемма 7 доказана.

Теперь для доказательства теоремы 1 достаточно повторить рассуждения разд. 4 работы [14]. При этом вместо лемм 4 и 5 из [14] нужно в соответствующих местах использовать соответственно леммы 5 и 7 настоящей работы. В итоге получим существование константы $C_7>0$ такой, что для любой функции $f\in\varphi(L)(\ln^+L)^{d-1}([0,2\pi)^d)$ и любых $y>1$

$$\operatorname{mes}\Bigl\{\mathbf{x}\in[-\pi,\pi)^d:\sup_{k\in\mathbb{N}}\Bigl|\tilde S_{\mathbf{n}_k,B}(f,\mathbf{x})\Bigr|>y\Bigr\}\leqslant\frac{C_7}{y}\biggl(\int\limits_{[-\pi,\pi)^d}\varphi(|f(\mathbf{x})|)(\ln^+(|f(\mathbf{x})|))^{d-1}d\mathbf{x}+1\biggr).\quad(3.21)$$

Из (3.21) и неравенства $\varlimsup\limits_{m\to\infty}\sup\limits_{k,l>m}\bigl|\tilde S_{\mathbf{n}_k,B}(f,\mathbf{x})-\tilde S_{\mathbf{n}_l,B}(f,\mathbf{x})\bigr|\leqslant 2\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}\bigl|\tilde S_{\mathbf{n}_k,B}(f,\mathbf{x})\bigr|$ следует

$$\operatorname{mes}\Bigl\{\mathbf{x}\in[-\pi,\pi)^d:\varlimsup_{m\to\infty}\sup_{k,l>m}\Bigl|\tilde S_{\mathbf{n}_k,B}(f,\mathbf{x})-\tilde S_{\mathbf{n}_l,B}(f,\mathbf{x})\Bigr|>y\Bigr\}$$

$$\leqslant\frac{2C_7}{y}\biggl(\int\limits_{[-\pi,\pi)^d}\varphi(|f(\mathbf{x})|)(\ln^+(|f(\mathbf{x})|))^{d-1}d\mathbf{x}+1\biggr).\quad(3.22)$$

Пусть $y>0$. Для любого сколь угодно большого $\alpha>0$ найдется кратный тригонометрический полином g такой, что

$$\frac{2C_7}{y}\int\limits_{[-\pi,\pi)^d}\varphi(|\alpha f(\mathbf{x})-g(\mathbf{x})|)(\ln^+(|\alpha f(\mathbf{x})-g(\mathbf{x})|))^{d-1}d\mathbf{x}<1.\quad(3.23)$$

Каждый член последовательности $\{\tilde S_{\mathbf{n}_k,B}(g,\mathbf{x})\}_{k=1}^\infty$ является (кратным) тригонометрическим полиномом, степень которого по каждой переменной не превосходит соответствующей степени полинома g. Так как для нашей последовательности векторов $\mathbf{n}_k=(n_k^1,n_k^2,\dots,n_k^d)$ $\min\limits_{1\leqslant j\leqslant d}n_k^j\to\infty$ при $k\to\infty$, то все полиномы $\tilde S_{\mathbf{n}_k,B}(g,\mathbf{x})$, начиная с некоторого номера, совпадают между собой. Следовательно, для всех $\mathbf{x}\in[-\pi,\pi)^d$ $\varlimsup\limits_{m\to\infty}\sup\limits_{k,l>m}\bigl|\tilde S_{\mathbf{n}_k,B}(g,\mathbf{x})-\tilde S_{\mathbf{n}_l,B}(g,\mathbf{x})\bigr|=0$, откуда

$$\varlimsup_{m\to\infty}\sup_{k,l>m}\bigl|\tilde S_{\mathbf{n}_k,B}(\alpha f,\mathbf{x})-\tilde S_{\mathbf{n}_l,B}(\alpha f,\mathbf{x})\bigr|$$

$$\leqslant\varlimsup_{m\to\infty}\sup_{k,l>m}\bigl|\tilde S_{\mathbf{n}_k,B}(\alpha f-g,\mathbf{x})-\tilde S_{\mathbf{n}_l,B}(\alpha f-g,\mathbf{x})\bigr|,\quad \mathbf{x}\in[-\pi,\pi)^d.\quad(3.24)$$

Применяя последовательно (3.24), (3.22) к функции $\alpha f(\mathbf{x})-g(\mathbf{x})$ и (3.23), получаем

$$\operatorname{mes}\Bigl\{\mathbf{x}\in[-\pi,\pi)^d:\varlimsup_{m\to\infty}\sup_{k,l>m}\bigl|\tilde S_{\mathbf{n}_k,B}(f,\mathbf{x})-\tilde S_{\mathbf{n}_l,B}(f,\mathbf{x})\bigr|>y\Bigr\}$$

$$\leqslant \operatorname{mes}\Big\{\mathbf{x}\in[-\pi,\pi)^d : \lim_{m\to\infty}\sup_{k,l>m}\big|\tilde{S}_{\mathbf{n}_k,B}(\alpha f-g,\mathbf{x})-\tilde{S}_{\mathbf{n}_l,B}(\alpha f-g,\mathbf{x})\big|>\alpha y\Big\}\leqslant\frac{1}{\alpha}.$$

Устремляя здесь α к $+\infty$, для любого $y>0$ заключаем

$$\operatorname{mes}\Big\{\mathbf{x}\in[-\pi,\pi)^d : \lim_{m\to\infty}\sup_{k,l>m}\big|\tilde{S}_{\mathbf{n}_k,B}(f,\mathbf{x})-\tilde{S}_{\mathbf{n}_l,B}(f,\mathbf{x})\big|>y\Big\}=0.$$

Таким образом, для почти всех $\mathbf{x}\in[-\pi,\pi)^d$ $\lim\limits_{m\to\infty}\sup\limits_{k,l>m}\big|\tilde{S}_{\mathbf{n}_k,B}(f,\mathbf{x})-\tilde{S}_{\mathbf{n}_l,B}(f,\mathbf{x})\big|=0$, т. е. для почти всех $\mathbf{x}\in[-\pi,\pi)^d$ последовательность $\{\tilde{S}_{\mathbf{n}_k,B}(f,\mathbf{x})\}_{k=1}^{\infty}$ сходится. Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Carleson L.** On convergence and growth of partial sums of Fourier series // Acta math.. 1966. Vol. 116, no. 1-2. P. 135–157.
2. **Hunt R.A.** On the convergence of Fourier series // Orthogonal expansions and their continuous analogues. Carbondale: SIU Press, 1968. P. 235–255.
3. **Sjölin P.** An inequality of Paley and convergence a.e. of Walsh-Fourier series // Arkiv för mat. 1969. Vol. 7. P. 551–570.
4. **Antonov N.Yu.** Convergence of Fourier series // East J. Approx. 1996. Vol. 2, no. 2. P. 187–196.
5. **Конягин С.В.** О расходимости всюду тригонометрических рядов Фурье // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 1. С. 103–126.
6. **Конягин С. В.** О расходимости всюду подпоследовательностей частных сумм тригонометрических рядов Фурье // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. Т.11, № 2. С. 112–119.
7. **Lie V.** On the pointwise convergence of the sequences of partial Fourier sums along lacunary subsequences // J. Funct. Anal. 2012. Vol. 263. P. 3391–3411.
8. **Di Plinio F.** Lacunary Fourier and Walsh–Fourier series near L^1 // Collect. Math. 2014. Vol. 65, no. 2. P. 219–232.
9. **Тевзадзе Н.Р.** О сходимости двойного ряда Фурье функции, суммируемой с квадратом // Сообщ. АН ГССР. 1970. Т. 58, № 2. С. 277–279.
10. **Fefferman C.** On the convergence of multiple Fourier series // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 77, no. 5. P. 744–745.
11. **Sjölin P.** Convergence almost everywhere of certain singular integrals and multiple Fourier series // Arkiv för mat. 1971. Vol. 9, no. 1. P. 65–90.
12. **Антонов Н.Ю.** О сходимости почти всюду по кубам кратных тригонометрических рядов Фурье // Изв. РАН. Сер. математическая. 2004. Т. 68, № 2. С. 3–22.
13. **Konyagin S.V.** On divergence of trigonometric Fourier series over cubes // Acta Sci. Math. (Szeged). 1995. Vol. 61, no. 1–4. P. 305–329.
14. **Антонов Н.Ю.** О сходимости почти всюду последовательностей кратных прямоугольных сумм Фурье // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, №3. С. 3–18.
15. **Кашин Б.С., Саакян А.А.** Ортогональные ряды. М.: АФЦ, 1999. 560 с.
16. **Stein E.M.** On limits of sequences of operators // Ann. Math. 1961. Vol. 74, no. 1. P. 140–170.
17. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965. 538 с.

Антонов Николай Юрьевич
Поступила 20.10.2014
д-р физ.-мат. наук, зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: Nikolai.Antonov@imm.uran.ru