ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 517.5

ОЦЕНКА СВЕРХУ РАВНОМЕРНЫХ КОНСТАНТ ЛЕБЕГА ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ИСТОКООБРАЗНО ПРЕДСТАВИМЫХ СПЛАЙНОВ[1]

В. Т. Шевалдин, О. Я. Шевалдина

В работе для достаточно широкого класса периодических интегрируемых ядер K получены оценки сверху констант Лебега (норм линейных операторов из C из C) интерполяционных истокообразно представимых сплайнов с равномерными узлами.

Ключевые слова: константы Лебега, истокообразно представимые сплайны, равномерные узлы.

V. T. Shevaldin, O. Ya. Shevaldina. Upper bounds for uniform Lebesgue constants of interpolational periodic sourcewise representable splines.

Upper bounds for Lebesgue constants (norms of linear operators from C to C) of interpolational periodic sourcewise representable splines with uniform knots are obtained for a wide class of periodic integrable kernels K

Keywords: Lebesgue constants, sourcewise representable splines, uniform knots.

Введение

Пусть $L_p = L_p[0;2\pi]$ $(1 \le p \le \infty)$ — пространство 2π-периодических функций f, абсолютно интегрируемых на периоде с p-й степенью при $1 \le p < \infty$ и существенно ограниченных при $p = \infty$, $C[a;b]$ — пространство непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций, $C_{2\pi}$ — пространство непрерывных 2π-периодических функций с обычными определениями нормы. Пусть также множество $P \subset \mathbb{Z}^+ = \{0,1,2,\dots\}$, $\operatorname{card} P = \mu$ (P может быть и пустым),

$$T_P(x) = \sum_{k\in P}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) \quad (a_k, b_k \in \mathbb{R}),$$

$$K(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k\cos kt + \beta_k\sin kt) \quad (\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}). \tag{0.1}$$

Далее всюду считаем, что ряд (0.1) сходится абсолютно и функция $K \in L_1[0;2\pi]$. Пусть

$$\overline{\mu} = \dim T_P = \begin{cases} 2\mu, & 0 \notin P, \\ 2\mu - 1, & 0 \in P. \end{cases}$$

Класс $F = F(K,P)$ периодических функций f вида

$$f(x) = T_P(x) + \int_0^{2\pi} K(x-t)\Phi(t)\,dt, \tag{0.2}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-01-00496), гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ-4538.2014.1) и Программы УрО РАН (проект 15-16-1-4), а также при финансовой поддержке в рамках Постановления Правительства РФ № 211, контракт № 02.A03.21.0006.

где $\Phi \in L_\infty[0;2\pi]$ и $\Phi \perp T_P$, т. е.

$$\int\limits_0^{2\pi} \Phi(t) \begin{Bmatrix} \sin kt \\ \cos kt \end{Bmatrix} dt = 0, \quad k \in P, \tag{0.3}$$

называется классом истокообразно представимых функций. Данное определение было введено Р. Курантом и Д. Гильбертом, при этом функция K называется ядром, а функция Φ — истоком. Различные задачи теории приближения таких классов функций (а в основном, их частных случаев) рассматривались многими авторами (см., например, обширную библиографию в [1–3]). Подчеркнем, что в данной статье множество P и ядро K, задающие класс функций $F = F(K,P)$, считаются фиксированными.

Пусть m — натуральное число, $m > \overline{\mu} = \dim T_P$, $h = 2\pi/m$ и $g = g(t)$ — заданная неотрицательная, непрерывная функция периода h. В классе F определим следующие множества:

$$S_m(F,g) = \big\{ f \in F : \ \Phi(t) = Z_j g(t), \ (j-1)h \le t < jh \ \ (j \in \mathbb{Z}), \ Z_{j+m} = Z_j \ \ (j \in \mathbb{Z}) \big\},$$

$$W(F,g) = \{ f \in F : \ |\Phi(t)| \le g(t) \ \text{ п. в. на } \ [0;2\pi] \}.$$

Множество функций $S \in S_m(F,g)$ называется пространством периодических истокообразно представимых сплайнов (см., например, [4]). В случае четного m, $g = 1$, $P = \{0\}$ и

$$K(t) = \pi^{-1} D_r(t) = \pi^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt - \frac{\pi r}{2})}{k^r} \quad (r \in \mathbb{N}) \tag{0.4}$$

истокообразно представимые сплайны — хорошо изученные периодические полиномиальные сплайны минимального дефекта степени r с m равномерными узлами на периоде (см., например, [2]), а ядро $\pi^{-1} D_r$ носит название ядра Бернулли. Заметим, что в общем случае любой сплайн $S \in S_m(F,g)$ зависит от $m + \overline{\mu}$ параметров $\{Z_j\}_{j=1}^m$ и $\{a_k\}_{k\in P}$, $\{b_k\}_{k \in P}$, на которые наложено $\overline{\mu}$ ограничений (0.3).

Классическая интерполяционная задача для введенного выше пространства сплайнов состоит в следующем. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая функция, $0 \le \theta < 1$ и $y_\nu = f(\theta h + \nu h)$ $(\nu \in \mathbb{Z})$. Требуется в пространстве $S_m(F,g)$ приближенно восстановить функцию f по числам $\{y_\nu\}_{\nu \in \mathbb{Z}}$, удовлетворяющим условиям $y_{\nu+m} = y_\nu$ $(\nu \in \mathbb{Z})$. Более точно, нужно указать условия на множество P, ядро K, функцию g и (что особенно важно) число $\theta : \ 0 \le \theta < 1$, при которых существует единственный истокообразно представимый сплайн $S \in S_m(F,g)$, удовлетворяющий условиям

$$S(\theta h + \nu h) = y_\nu \quad (\nu \in \mathbb{Z}).$$

Таким образом, в общей задаче функциональной интерполяции сплайнами считается, что сетка узлов интерполяции $\{\theta h + \nu h\}_{\nu \in \mathbb{Z}}$ сдвинута на θh относительно сетки узлов сплайна $\{\nu h\}_{\nu\in\mathbb{Z}}$. Эта задача имеет богатую историю, которая берет начало с работ Дж. Алберга, Э. Нильсона, Дж. Уолша [5] и Ю. Н. Субботина [6] по полиномиальным сплайнам (библиографию см., например, в [4]). Наиболее общие результаты в данной интерполяционной задаче получены А. К. Кушпелем [7] (случаи $P = \{\varnothing\}$, $P = \{0\}$ и произвольного ядра K) и первым автором [4] данной статьи. Введем некоторые числа и функции.

Ядро K представим следующим образом:

$$K(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mu_j e^{ijt},$$

где

$$\mu_j = \begin{cases} (\alpha_j - i\beta_j)/2, & j > 0, \\ (\alpha_j + i\beta_j)/2, & j < 0, \end{cases} \qquad \mu_0 = \frac{\alpha_0}{2}.$$

Для произвольной функции $f \in F(K,P)$ в силу (0.3) можно считать, что $\mu_j = 0$, если $|j| \in P$, и поэтому

$$K(t) = \sum_{j\colon\ |j|\notin P} \mu_j e^{ijt}.$$

Определим функции

$$\lambda_r(t) = m {\sum_{l\in\mathbb{Z}}}' \mu_{ml+r} \int\limits_0^h g(x) e^{i(ml+r)(th-x)}\,dx \quad (r = \overline{1,m}), \tag{0.5}$$

где штрих означает, что суммирование производится по всем целым l таким, что $|ml+r| \notin P$. Как следует из [4], $\lambda_r(t)$ $(r = \overline{1,m})$ — собственные числа некоторой матрицы. Пусть также для каждого $\theta:\ 0 \le \theta < 1$ множество

$$R(\theta) = \{r:\ r = \overline{1,m},\ \lambda_r(\theta) = 0\}$$

и A — множество всех $r = \overline{1,m}$ таких, что для каждого $r \in A$ существует число $s = s(r) \in P$ такое, что либо $s \equiv r (\operatorname{mod} m)$, либо $s \equiv -r (\operatorname{mod} m)$.

Теорема 1 [4, теорема 1]. *Для любой последовательности $\{y_\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}}$, удовлетворяющей условию $y_{\nu+m} = y_\nu$ $(\nu \in \mathbb{Z})$, существует единственный сплайн $S \in S_m(F,g)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*:

1) $\displaystyle\int_0^h g(t)e^{\pm ikt}\,dt \ne 0 \quad \forall\ k \in P$;

2) *число $\theta:\ 0 \le \theta < 1$ таково, что $R(\theta) \subseteq A$*;

3) $s_1 \not\equiv \pm s_2 (\operatorname{mod} m) \quad \forall\ s_1, s_2 \in P$;

4) *если m — четно, то $m/2 \not\equiv s (\operatorname{mod} m) \quad \forall\ s \in P$.*

При выполнении условий 1)–4) параметры a_k, b_k и Z_j интерполяционного сплайна $S \in S_m(F,g)$ вычисляются по формулам

$$a_k = \frac{2}{m}\sum_{\nu=0}^{m-1} y_\nu \cos kh(\theta+\nu), \quad b_k = \frac{2}{m}\sum_{\nu=0}^{m-1} y_\nu \sin kh(\theta+\nu),$$

$$a_0 = \frac{1}{m}\sum_{\nu=0}^{m-1} y_\nu, \quad \text{\textit{если}}\ \ 0 \in P,$$

$$Z_j = \frac{1}{m}\sum_{\nu=0}^{m-1} y_\nu {\sum_{r=1}^{m}}'' (\lambda_r(\theta+\nu-j+1))^{-1} \quad (j = \overline{1,m}),$$

где двойной штрих означает, что в сумме отсутствуют слагаемые $\lambda_r^{-1}(\theta+\nu-j+1)$ с номерами $r \in A$.

Из теоремы 1 следует, что при выполнении условий 1)−4) интерполяционный сплайн $S \in S_m(F,g)$ может быть представлен в следующем виде:

$$S(x) = \sum_{\nu=0}^{m-1} y_\nu g_\nu(x) \quad (x \in [0;2\pi]),$$

где $g_\nu(x)$ $(\nu = \overline{0,m-1})$ — некоторые непрерывные 2π-периодические функции. Следовательно, сплайн $S(x) = S(f,x)$ задает линейный метод аппроксимации 2π-периодической функции f по ее значениям $y_\nu = f(\theta h + \nu h)$ $(\nu \in \mathbb{Z})$ в системе равноотстоящих точек. Нас интересует равномерная норма данного оператора. Величина

$$L = L(K,m) = \sup\{\|S(f,\cdot)\|_C:\ \|f\|_C \le 1\}$$

является равномерной нормой оператора S и носит название константы Лебега периодических интерполяционных истокообразно представимых сплайнов с равномерными узлами. Начало исследования констант Лебега интерполяционных сплайнов было положено в работах Ф. Ричардса [8] и А. А. Женсыкбаева [9] (см. библиографию, например, в [10; 11]), причем изучались только полиномиальные и экспоненциальные интерполяционные сплайны.

В настоящей работе для широкого класса ядер K, удовлетворяющих некоторому условию, возникшему в статьях [4; 7] при получении точных оценок снизу для колмогоровских поперечников классов функций $W(F,g)$, в случае четного числа m получена оценка сверху величины $L = L(K,m)$ для интерполяционных сплайнов $S \in S_m(F,g)$, определенных этим ядром K.

1. Свойство C_θ и оценка сверху для $L(K,2n)$

В данном разделе всюду считаем, что $m = 2n$ $(n \in \mathbb{N})$. При получении точных оценок снизу поперечников по Колмогорову классов функций $W(F,g)$ (в случае $g = 1$) в равномерной метрике А. К. Кушпель [7] (при $P = \{0\}$ и $P = \varnothing$) и первый автор [4] выделили класс ядер K, пространство истокообразно представимых сплайнов у которых удовлетворяет следующему свойству.

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что пространство сплайнов $S_{2n}(F,g)$ удовлетворяет свойству C_θ при некотором $\theta:\ 0 \le \theta < 1$, если при этом θ выполнены условия 1) – 4) теоремы 1 и, кроме того, последовательность чисел

$$z_l = \frac{1}{2n} \sum_{r=1}^{2n}{}'' \lambda_r^{-1}(\theta + l) \quad (l = \overline{1,2n})$$

чередуется по знаку, а именно $z_l z_{l+1} \le 0$ $(l = \overline{1,2n-1})$, где двойной штрих означает, что в сумме отсутствуют слагаемые $\lambda_r^{-1}(\theta + l)$ с номерами $r \in A$.

В [4; 7] приведены примеры ядер K, удовлетворяющих данному определению. Напомним, что для аппроксимируемой функции $f \in C_{2\pi}$ мы положили

$$y_\nu = f(\theta h + \nu h) \quad (\nu \in \mathbb{Z}).$$

Теорема 2 [4, теорема 3]. *Пусть пространство $S_{2n}(F,g)$ удовлетворяет свойству C_θ при некотором $\theta:\ 0 \le \theta < 1$. Тогда для любой функции $f \in C_{2\pi}$ и сплайна $S(x) = S(f,x) \in S_{2n}(F,g)$ имеет место неравенство*

$$\max_j |Z_j| \le |\lambda_n^{-1}(\theta)| \max_\nu |f(\theta h + \nu h)|,$$

где функция $\lambda_n(\theta)$ определена равенством (0.5) *при $m = 2n$ и $r = n$.*

В наших исследованиях важную роль играет функция

$$\lambda_n(x) = 2n \int_0^h g(t) \sum_{l \in \mathbb{Z}} \mu_{(1+2l)n} e^{i(1+2l)(xh-t)n}\, dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

(здесь $h = \pi/n$ и штрих отсутствует в силу условия 4) теоремы 1). В [4] отмечено, что эта функция является сверткой непрерывной функции g и интегрируемой функции, поэтому функция λ_n непрерывна. В случае $g = 1$, $P = \{0\}$ и $K(t) = \pi^{-1} D_r(t)$ функция $\lambda_n(x)$ является совершенным периодическим сплайном степени r с $2n$ равноотстоящими узлами на отрезке $[0; 2n]$ (соответствующие определения, свойства и комментарии см. в [2; 4]) и удовлетворяет свойству $\lambda_n(x+1) = -\lambda_n(x)$. Рассмотрим число $\theta_1:\ 0 \le \theta_1 < 1$ такое, что

$$|\lambda_n(\theta_1)| = \max_x |\lambda_n(x)|,$$

и обозначим через Ω множество тех θ : $0 \le \theta < 1$, при которых пространство $S_{2n}(F,g)$ удовлетворяет данному выше определению.

Следствие 1 [4, следствие 1]. *Если $\theta_1 \in \Omega$, то для любой функции $f \in C_{2\pi}$ и сплайна $S(x) = S(f,x) \in S_{2n}(F,g)$ справедливо точное неравенство* $\max_j |Z_j| \le \min_{\theta\in\Omega} |\lambda_n^{-1}(\theta)| \cdot \|f\|_C$, *причем знак равенства реализует функция $f(x) = \lambda_n(x/h)$.*

Приступим теперь к оценке сверху константы Лебега $L(K,2n)$ интерполяционных периодических истокообразно представимых сплайнов.

Теорема 3. *Для любой функции $f \in C_{2\pi}$ и сплайна $S(x) = S(f,x) \in S_{2n}(F,g)$, удовлетворяющего свойству C_{θ_1}, такого что*

$$S(\theta_1 h + \nu h) = f(\theta_1 h + \nu h) \quad (\nu \in \mathbb{Z}),$$

имеет место неравенство

$$\|S(f,\cdot)\|_C \le \|f\|_C \Big(\frac{\|K\|_{L_1} \|g\|_C}{\|\lambda_n\|_C} + 2\overline{\mu} \Big).$$

Доказательство. В представлении (0.2) сплайна S оценим сверху каждое слагаемое. Пусть вначале $0 \notin P$. Тогда из формул для чисел a_k, b_k $(k \in P)$ из теоремы 1 при любом $x \in \mathbb{R}$ имеем

$$|T_P(x)| = \Big| \sum_{k\in P} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \Big|$$

$$= \Big| \sum_{k\in P} \frac{1}{n} \Big(\sum_{\nu=0}^{2n-1} y_\nu \cos kh(\theta+\nu) \cos kx + \sum_{\nu=0}^{2n-1} y_\nu \sin kh(\theta+\nu) \sin kx \Big) \Big|$$

$$\le \|f\|_C \max_x \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{2n-1} \sum_{k\in P} |\cos(kh(\theta+\nu) - kx)| \le 4\mu \|f\|_C.$$

Аналогично, если $0 \in P$, получаем $|T_P(x)| \le 2(2\mu - 1)\|f\|_C$. Таким образом, справедлива оценка

$$\|T_P\|_C \le 2\overline{\mu} \|f\|_C. \tag{1.1}$$

Теперь с учетом теорем 1 и 2 оценим сверху абсолютную величину интеграла

$$\Big| \int_0^{2\pi} K(x-t)\Phi(t)\,dt \Big|$$

в случае $\Phi(t) = Z_j g(t)$, $(j-1)h \le t < jh$ $(j \in \mathbb{Z})$, $h = \pi/n$. Имеем

$$\Big| \int_0^{2\pi} K(x-t)\Phi(t)\,dt \Big| = \Big| \sum_{j=1}^{2n} Z_j \int_{(j-1)h}^{jh} g(t) K(x-t)\,dt \Big|$$

$$\le \max_j |Z_j| \Big(\sum_{j=1}^{2n} \Big| \int_{(j-1)h}^{jh} g(t)K(x-t)\,dt \Big| \Big) \le \max_j |Z_j| \cdot \|g\|_C \sum_{j=1}^{2n} \int_{(j-1)h}^{jh} |K(x-t)|\,dt$$

$$= \max_j |Z_j| \cdot \|g\|_C \cdot \|K\|_{L_1}.$$

Таким образом, из следствия 1 выводим неравенство

$$\Big| \int_0^{2\pi} K(x-t)\Phi(t)\,dt \Big| \le \|g\|_C \cdot \|K\|_{L_1} \cdot \|\lambda_n\|_C^{-1} \cdot \|f\|_C. \tag{1.2}$$

Из (1.1) и (1.2) следует утверждение теоремы 3. □

Следствие 2. *Из доказанной теоремы* 3 *при* $\theta = \theta_1$ *вытекает следующая оценка сверху для константы Лебега* $L = L(K, 2n)$:

$$L(K, 2n) \le \frac{\|K\|_{L_1} \|g\|_C}{\|\lambda_n\|_C} + 2\overline{\mu}.$$

2. Примеры и комментарии

Вопросы существования и единственности интерполяционных сплайнов исследовались многими авторами (см. библиографию в [4]). Свойство C_θ А. И. Степанец и его ученики А. К. Кушпель, А. С. Сердюк и др. (см., например, [3;7;12;13]) формулировали в терминах производящего полинома ядра K или свойств знакорегулярности фундаментальных сплайнов, соответствующих этому ядру. Приведем, на наш взгляд, наиболее простую интерпретацию этого свойства в случае $P = \varnothing$ из работы [4]. Пусть

$$\tau_s = \int_0^h K((\theta + 1 - s)h - t)\,dt \quad (s = \overline{0, 2n-1}).$$

Рассмотрим матрицу T порядка $2n \times 2n$, которая является циркулянтом с элементами первой строки $\{\tau_s\}_{s=0}^{2n-1}$. Выполнение свойства C_θ означает, что при этом θ : $0 \le \theta < 1 \det T \ne 0$ и все миноры порядка $2n - 1$ имеют один и тот же знак. Данное требование на ядро K, как отмечено в [4], является менее жестким, чем условие знакорегулярности ядра K, которое возникло у А. Пинкуса [14] при нахождении точных значений колмогоровских поперечников классов периодических функций типа Соболева.

Теперь рассмотрим несколько примеров в случае $P = \{0\}$. Случай $g = 1$, $K(t) = \pi^{-1} D_r(t)$ $(r \in \mathbb{N})$ — ядра Бернулли (см. (0.4)) приводит, как мы уже отмечали, к интерполяционным полиномиальным сплайнам минимального дефекта степени r. По традиции, начиная с основополагающих работ Дж. Алберга, Э. Нильсона, Дж. Уолша [5] и Ю. Н. Субботина [6], интерполяционные полиномиальные сплайны изучали и применяли в случае нечетного r только при $\theta = 0$, в случае четного r — при $\theta = 1/2$ (отметим, что в случае нечетного r при $\theta = 1/2$, а в случае четного r при $\theta = 0$ задача интерполяции неразрешима). А. К. Кушпель [7] доказал, что при таком классическом выборе интерполяционных условий свойство C_θ также имеет место. Константы Лебега $L(\pi^{-1} D_r, 2n)$ в этих случаях вычислены Ф. Ричардсом [8] и А. А. Женсыкбаевым [9]. Еще один принципиальный результат в данной тематике получен Ю. Н. Субботиным и А. А. Теляковским [10], которые нашли асимптотику роста констант Лебега периодических интерполяционных полиномиальных сплайнов по параметрам r и n. Х. Морше [15], И. Цимбаларио [16], В. А. Ким [11;17] и др. изучали константы Лебега интерполяционных экспоненциальных (и не только периодических) сплайнов, соответствующих линейным дифференциальным операторам с постоянными коэффициентами, характеристические многочлены которых имеют только действительные корни.

Еще один важный случай, возникающий при $P = \{0\}$ — случай ядра Пуассона, приводящий к гармоническим сплайнам (см., например, [1]). Пусть

$$\Pi_{\rho,\alpha}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos\Big(kt - \frac{\alpha\pi}{2}\Big) \quad (0 < \rho < 1,\ \alpha \in \mathbb{R})$$

— ядро, являющееся линейной комбинацией ядра Пуассона $\Pi_\rho(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos kt$ гармонических функций и его сопряженного $\widetilde{\Pi}_\rho(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \sin kt$. Выяснением вопроса: при каких

ρ, α и n свойство C_θ имеет место, помимо авторов цитированных работ [4; 7] занимались также Нгуен Тхи Тхьеу Хоа [18] и А. С. Сердюк и В. В. Боденчук [13]. Из результатов последней статьи, в частности, следует, что при стандартном выборе числа $\theta = \theta_1$, которое является точкой максимума модуля совершенного сплайна $\lambda_n(x)$, свойство C_θ имеет место при любых $0 < \rho < 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ и любых $n \geq n(\rho) \geq 9$, где $n(\rho)$ — корень некоторого трансцендентного уравнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шевалдин В.Т.** Истокообразные сплайны и поперечники классов периодических функций: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Ин-т математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 1996. 193 с.
2. **Корнейчук Н.П.** Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987. 424 с.
3. **Степанец А.И.** Методы теории приближений: в 2 ч. / Ин-т математики НАН Украины. Киев, 2002. Ч. 1. 427 с.; Ч. 2. 468 с.
4. **Шевалдин В.Т.** Оценки снизу поперечников классов истокообразно представимых функций // Тр. МИАН. 1989. Т. 189. С. 185–201.
5. **Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.** Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972. 320 с.
6. **Субботин Ю.Н.** О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Тр. МИАН СССР. 1965. Т. 78. С. 24–42.
7. **Кушпель А.К.** Точные оценки поперечников классов сверток // Изв. РАН. Сер. математическая. 1988. Т. 52, № 6. С. 1305–1322.
8. **Richards F.** Best bounds for the uniform periodic spline interpolation operator // J. Approx. Theory. 1973. Vol. 7, no. 3. P. 302–317.
9. **Женсыкбаев А.А.** Точные оценки равномерного приближения непрерывных функций сплайнами r-го порядка // Мат. заметки. 1973. Т. 13, № 2. С. 217–228.
10. **Субботин Ю.Н., Теляковский С.А.** Асимптотика констант Лебега периодических интерполяционных сплайнов с равноотстоящими узлами // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 8. С. 131–140.
11. **Ким В.А.** Точные константы Лебега для интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов формально самосопряженного дифференциального оператора // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 169–177.
12. **Степанец А.И., Сердюк А.С.** О существовании интерполяционных SK-сплайнов // Укр. мат. журн. 1994. Т. 46, № 11. С. 1546–1553.
13. **Serdyuk A.S., Bodenchuk V.V.** Exact values of Kolmogorov widths of classes of Poisson integrals // J. Approx. Theory. 2013. Vol. 173, no. 1. P. 89–109.
14. **Pinkus A.** On n-widths of periodic functions // J. Anal. Math. 1979. Vol. 35. P. 209–235.
15. **ter Morsche H.G.** On the Lebesque constants for cardinal $\mathcal{L}$-spline interpolation // J. Approx. Theory. 1985. Vol. 45, no. 3. C. 232–246.
16. **Tzimbalario J.** Lebesgue constants for cardinal $\mathcal{L}$-spline interpolation // Can. J. Math. 1977. Vol. 29, no. 2. P. 441–448.
17. **Ким В.А.** Точные константы Лебега для интерполяционных ограниченных $\mathcal{L}$-сплайнов третьего порядка // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 2. С. 330–341.
18. **Нгуен Тхи Тхьеу Хоа.** Экстремальные задачи на некоторых классах гладких периодических функций: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / МИАН им. В. А. Стеклова. М., 1994. 219 с.

Шевалдин Валерий Трифонович
Поступила 9.02.2015
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru

Шевалдина Ольга Яковлевна
канд. физ.-мат. наук
доцент
Уральский федеральный университет им. Б.Н.Ельцина
e-mail: o.ja.shevaldina@urfu.ru