ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 517.5

НЕРАВЕНСТВА ДЖЕКСОНА — СТЕЧКИНА С ОБОБЩЕННЫМИ МОДУЛЯМИ НЕПРЕРЫВНОСТИ И ПОПЕРЕЧНИКИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

М. Ш. Шабозов, К. Тухлиев

В гильбертовом пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$ с весом Чебышёва $\mu(x) := 1/\sqrt{1-x^2}$ получены неравенства типа Джексона – Стечкина между величиной $E_{n-1}(f)_{L_{2,\mu}}$ наилучшего приближения функции f алгебраическими многочленами степени не выше $n-1$ и обобщенным модулем непрерывности m-го порядка $\Omega_m(\mathcal{D}\mathcal{f};t)$, где $\mathcal{D}$ — некоторый дифференциальный оператор второго порядка. Для классов функций $W_{p,m}^{(2r)}(\Psi)$ $(m,r\in\mathbb{N},\,1/(2r)<p\le 2)$, определяемых указанным модулем непрерывности и заданной мажорантой $\Psi(t)$ $(t\ge 0)$, удовлетворяющей определенным ограничениям, вычислены значения различных n-поперечников в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$.

Ключевые слова: наилучшие приближения, полиномы Чебышёва, обобщенный модуль непрерывности m-го порядка, коэффициенты Фурье — Чебышёва, n-поперечники.

M. Sh. Shabozov, K. Tukhliev. Jackson–Stechkin type inequalities with generalized moduli of continuity and widths of some classes of functions.

In the Hilbert space $L_{2,\mu}[-1,1]$ with Chebyshev weight $\mu(x) := 1/\sqrt{1-x^2}$, we obtain Jackson–Stechkin type inequalities between the value $E_{n-1}(f)_{L_{2,\mu}}$ of the best approximation of a function $f(x)$ by algebraic polynomials of degree at most $n-1$ and the mth-order generalized modulus of continuity $\Omega_m(\mathcal{D}\mathcal{f};t)$, where $\mathcal{D}$ is some second-order differential operator. For classes of functions $W_{p,m}^{(2r)}(\Psi)$ $(m,r\in\mathbb{N},\,1/(2r)<p\le 2)$ defined by the mentioned modulus of continuity and a given majorant $\Psi(t)$ $(t\ge 0)$, which satisfies certain constraints, we calculate the values of various n-widths in the space $L_{2,\mu}[-1,1]$.

Keywords: best approximation, Chebyshev polynomials, generalized modulus of continuity of mth order, Chebyshev–Fourier coefficients, n-widths.

Введение

К настоящему времени известен целый ряд содержательных результатов, связанных с отысканием точных констант в неравенстве типа Джексона — Стечкина и вычислением точных значений различных n-поперечников функциональных классов, принадлежащих пространству измеримых 2π-периодических функций $L_2 := L_2[0,2\pi]$ с нормой (см., например, [1–14])

$$\|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty.$$

В последнее время появился ряд работ, в которых аналогичные задачи рассматриваются на конечном отрезке. Так, например, А. Г. Бабенко [15] получил точное неравенство типа Джексона — Стечкина в случае приближения на отрезке $[0,\pi]$ действительных измеримых 2π-периодических функций вида $f(x)=\varphi(\cos x)$ подпространством косинус-полиномов

$$\mathcal{F}_{n-1} := \left\{\mathcal{F}\colon \mathcal{F}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos kx,\ a_k\in\mathbb{R}\right\}$$

в пространстве $L^2_{\alpha,\beta}[0,\pi]$ $(\alpha>-1,\,\beta>-1)$ с нормой

$$\|f\|_{L^2_{\alpha,\beta}} = \left\{\int_0^{\pi} f^2(x)\Big(\sin\frac{x}{2}\Big)^{2\alpha+1}\Big(\cos\frac{x}{2}\Big)^{2\beta+1}dx\right\}^{1/2} < \infty.$$

Дальнейшее исследование этой задачи в общем случае при $\alpha = \beta \geq -1/2$ приведено в работе Д. В. Чертовой [16], а при любых $\alpha > \beta \geq -1/2$ выполнено Во Тхи Куком [17]. Для функций многих переменных в пространстве $L_p(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом указанная задача решена в работах [18; 19]. С. Б. Вакарчук [20] доказал точное неравенство типа Джексона — Стечкина для приближения действительных измеримых на отрезке $[-1,1]$ функций f подпространством $\mathcal{P}_{n-1}$ — алгебраических многочленов степени $\leq n-1$ в пространстве $L_2[-1,1]$ с обычной нормой

$$\|f\|_{L_2[-1,1]} = \left(\int\limits_{-1}^{1} f^2(x)dx\right)^{1/2} < \infty.$$

В данной работе мы продолжим исследования в этом направлении и докажем точные неравенства типа Джексона — Стечкина для наилучшего приближения действительных измеримых на отрезке $[-1,1]$ функций f с весом $\mu(x) := 1/\sqrt{1-x^2}$ элементами подпространства $\mathcal{P}_{n-1}$ в гильбертовом пространстве

$$L_{2,\mu}[-1,1] := L_2\big((\sqrt{1-x^2})^{-1}; [-1,1]\big)$$

с конечной нормой

$$\|f\|_{L_{2,\mu}[-1,1]} = \left(\int\limits_{-1}^{1} \mu(x) f^2(x)dx\right)^{1/2}.$$

1. Некоторые обозначения и вспомогательные утверждения

Введем обозначения: $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}\cup\{0\}$, $\mathbb{R}_+ := (0,\infty)$ — множество всех положительных чисел, $\mathbb{R} := (-\infty,+\infty)$. Следуя работе А. В. Абилова и Ф. В. Абиловой [21], в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$ рассмотрим оператор

$$F_h f(x) = \frac{1}{2}\left[f\big(x\cos h + \sqrt{1-x^2}\sin h\big) + f\big(x\cos h - \sqrt{1-x^2}\sin h\big)\right], \tag{1.1}$$

который будем называть *оператором обобщенного сдвига,* и введем конечные разности первого и высших порядков равенствами

$$\widetilde{\Delta}_h^1(f;x) = F_h f(x) - f(x) = (F_h - E)f(x),$$

$$\widetilde{\Delta}_h^m(f;x) = \widetilde{\Delta}_h(\widetilde{\Delta}_h^{m-1}(f;\cdot);x) = (F_h - E)^m f(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k}\binom{m}{k} F_h^k f(x),$$

где $F_h^0 f(x) \equiv f(x),\ F_h^k f(x) = F_h(F_h^{k-1} f(x)),\ k = 1,2,\ldots,m,\ m \in \mathbb{N}$, и E — единичный оператор в пространстве L_2. Определим обобщенный модуль непрерывности m-го порядка равенством

$$\Omega_m(f;t)_{L_{2,\mu}[-1,1]} = \sup\Big\{\big\|\widetilde{\Delta}_h^m(f;\cdot)\big\|_{L_{2,\mu}[-1,1]} \colon |h| \leq t\Big\}. \tag{1.2}$$

Пусть далее

$$T_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad T_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(k\arccos x), \quad k = 1,2,\ldots \tag{1.3}$$

— ортонормированная система многочленов Чебышёва первого рода в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$. Тогда, как хорошо известно [22],

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) T_k(x) \tag{1.4}$$

есть ряд Фурье — Чебышёва функции $f \in L_{2,\mu}[-1,1]$, а

$$c_k(f) = \int_{-1}^{1} \mu(x) f(x)\, T_k(x) dx \tag{1.5}$$

— коэффициенты Фурье — Чебышёва. Равенство в (1.4) понимается в смысле сходимости в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$.

Пусть теперь $\mathcal{D} = (1-x^2)\dfrac{d^2}{dx^2} - x\dfrac{d}{dx}$ — дифференциальный оператор второго порядка. Операторы высших порядков определим последовательно, полагая $\mathcal{D}^r f = \mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1} f)$, $r = 2, 3, \ldots$. Известно [22, с. 47], что многочлены (1.3) удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(1-x^2)T_k''(x) - xT_k'(x) + k^2 T_k(x) = 0, \tag{1.6}$$

а потому из (1.6) следуют равенства

$$\mathcal{D}T_k(x) = -k^2 T_k(x), \ldots, \mathcal{D}^r T_k(x) = (-1)^r k^{2r} T_k(x). \tag{1.7}$$

В [21] доказано, что для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}[-1,1]$, имеющей обобщенные производные в смысле Леви [23, с. 172], коэффициенты Фурье — Чебышёва (1.5) ряда (1.4) удовлетворяют соотношениям

$$c_k(f) = (-1)^r\, k^{-2r}\, c_k(\mathcal{D}^r f), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1.8}$$

$$c_k(F_h f) = \cos kh \cdot c_k(f), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1.9}$$

где функция $F_h f$ определена равенством (1.1).

Обозначим через $L_{2,\mu}^{(2r)}[-1,1]$ ($r \in \mathbb{Z}_+, L_{2,\mu}^{(0)}[-1,1] = L_{2,\mu}[-1,1]$) множество функций $f \in L_{2,\mu}[-1,1]$, у которых производная $\mathcal{D}^r f$ принадлежит пространству $L_{2,\mu}[-1,1]$. Всюду далее вместо $L_{2,\mu}[-1,1], L_{2,\mu}^{(2r)}[-1,1]$, $\|f\|_{L_{2,\mu}[-1,1]}$ ради сокращения записи будем писать $L_{2,\mu}, L_{2,\mu}^{(2r)}$, $\|f\|_{2,\mu}$ соответственно.

Пользуясь соотношениями (1.7)–(1.9) и равенством Парсеваля, из (1.4) для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ легко получить равенство [21]

$$\|\Delta_h^m(\mathcal{D}^r f)\|_{2,\mu}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (1-\cos kh)^{2m} k^{4r} c_k^2(f). \tag{1.10}$$

Учитывая соотношение (1.10), модуль непрерывности (1.2) запишем в виде

$$\Omega_m^2(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu} = \sup\Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} k^{4r} c_k^2(f)(1-\cos kh)^{2m} \colon |h| \le t \Big\}. \tag{1.11}$$

Пусть

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} = \inf\big\{ \|f - p_{n-1}\|_{2.\mu} \colon p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1} \big\} \tag{1.12}$$

— наилучшее приближение функции $f \in L_{2,\mu}$ элементами подпространства $\mathcal{P}_{n-1}$. В [22, с. 26] доказано, что среди всех элементов $p_n \in \mathcal{P}_{n-1}$ частичная сумма $S_{n-1}(f;x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) T_k(x)$ ряда (1.4) доставляет минимум величине (1.12). При этом

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} = \|f - S_{n-1}(f)\|_{2,\mu} = \Big(\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \Big)^{1/2}. \tag{1.13}$$

Из (1.13), учитывая равенство (1.8), для произвольной $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ получаем

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \le n^{-2r} \mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu}. \tag{1.14}$$

Неравенство (1.14) обращается в равенство для функции $f_0(x) = T_n(x)$, принадлежащей множеству $L_{2,\mu}^{(2r)}$, поскольку $\mathcal{E}_{n-1}(f_0)_{2,\mu} = 1$, $\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^r f_0)_{2,\mu} = n^{2r}$.

В [24] при любых $m, r \in \mathbb{N}$, $r \geq m/2$ доказано, что

$$\sup_{\substack{f \in L_{2,\mu}^{(2r)} \\ f \neq \text{const}}} \frac{n^{2r-m}\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu} \sin nt dt\right)^m} = \frac{1}{2^m}, \tag{1.15}$$

а в [25] при $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq h \leq \pi/n$ получено равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_{2,\mu}^{(2r)} \\ f \neq \text{const}}} \frac{n^{2r}\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^{h} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu} dt\right)^m} = \left\{\frac{nh}{nh - \sin nh}\right\}^m. \tag{1.16}$$

2. Основные теоремы

В работе [1] Н. И. Черных заметил, что для произвольной суммируемой неотрицательной не эквивалентной нулю весовой функции φ на отрезке $[0, h]$ $(0 < h \leq \pi)$ функционал

$$J_n(f; h) = \left\{\int\limits_0^h \omega_m^2(f; t)_2 \varphi(t) dt\right\}^{1/2} \left\{\int\limits_0^h \varphi(t) dt\right\}^{-1/2}$$

меньше джексоновского функционала $\omega_m(f; h)_2$ и более естественен для характеристики наилучших приближений $E_{n-1}(f)$ периодических функций в $L_2[0, 2\pi]$. Для рассматриваемой нами характеристики гладкости Ω_m наблюдается аналогичная ситуация. Очевидно, что без потери общности можно полагать, что при некотором $h \in (0, \pi/n]$ выполняется условие $\displaystyle\int_0^h \varphi(t) dt \leq 1$, и тогда имеет место неравенство

$$\left\{\int\limits_0^h \Omega_m^p(f; t)_{2,\mu}\, \varphi(t) dt\right\}^{1/p} \leq \Omega_m(f; h)_{2,\mu}.$$

В связи с этим обстоятельством, а также с целью обобщения равенств (1.15) и (1.16), введем в рассмотрение следующую экстремальную аппроксимационную характеристику

$$\mathcal{M}_{n,m,r,p}(\varphi; h) = \sup_{f \in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu}\, \varphi(t) dt\right)^{1/p}}, \tag{2.1}$$

где $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $p \in \mathbb{R}_+$, $0 < h \leq \pi$, $\varphi(t) \geq 0$ — суммируемая на отрезке $[0, h]$ не эквивалентная нулю функция.

Теорема 2.1. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq 2$, $0 < h \leq \pi$, $\varphi(t) \geq 0$ — суммируемая не эквивалентная нулю на отрезке $[0, h]$ функция. Тогда справедливы неравенства*

$$\left\{\alpha_{n,m,r,p}(\varphi; h)\right\}^{-1} \leq \mathcal{M}_{n,m,r,p}(\varphi; h) \leq \left\{\inf_{n \leq k < \infty} \alpha_{k,m,r,p}(\varphi; h)\right\}^{-1}, \tag{2.2}$$

где

$$\alpha_{k,m,r,p}(\varphi; h) = \left(k^{2rp}\int\limits_0^h (1 - \cos kt)^{mp} \varphi(t) dt\right)^{1/p}. \tag{2.3}$$

При этом если

$$\inf_{n\le k<\infty}\alpha_{k,m,r,p}(\varphi;h)=\alpha_{n,m,r,p}(\varphi;h), \tag{2.4}$$

то имеет место равенство

$$\mathcal{M}_{n,m,r,p}(\varphi;h)=\left(n^{2rp}\int\limits_0^h(1-\cos nt)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}. \tag{2.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользовавшись упрощенным вариантом неравенства Минсковского [26, с.142]

$$\left(\int\limits_0^h\left(\sum_{k=n}^{\infty}|f_k(t)|^2\right)^{p/2}dt\right)^{1/p}\ge\left(\sum_{k=n}^{\infty}\left(\int\limits_0^h|f_k(t)|^pdt\right)^{2/p}\right)^{1/2},\quad 0<p\le 2,$$

с учетом (1.10)–(1.13) и (2.3) получаем

$$\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p(\mathcal{D}^rf;t)_{2,\mu}\varphi(t)dt\right)^{1/p}\ge\left(\int\limits_0^h\|\Delta_t^m(\mathcal{D}^rf)\|_{2,\mu}^p\varphi(t)dt\right)^{1/p}$$

$$\ge\left(\int\limits_0^h\left(\sum_{k=n}^{\infty}c_k^2(f)k^{4r}(1-\cos kt)^{2m}\right)^{p/2}\varphi(t)dt\right)^{1/p}$$

$$=\left(\int\limits_0^h\left(\sum_{k=n}^{\infty}c_k^2(f)k^{4r}(1-\cos kt)^{2m}\Big[\varphi(t)\Big]^{2/p}\right)^{p/2}dt\right)^{1/p}$$

$$\ge\left(\sum_{k=n}^{\infty}c_k^2(f)\left(k^{2pr}\int\limits_0^h(1-\cos kt)^{pm}\varphi(t)\right)^{2/p}dt\right)^{1/2}$$

$$=\left(\sum_{k=n}^{\infty}c_k^2(f)\,\alpha_{k,m,r,p}^2(\varphi;h)\right)^{1/2}\ge\inf_{n\le k<\infty}\alpha_{k,m,r,p}(\varphi;h)\left\{\sum_{k=n}^{\infty}c_k^2(f)\right\}^{1/2}$$

$$=\inf_{n\le k<\infty}\alpha_{k,m,r,p}(\varphi;h)\,\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}.$$

Отсюда, учитывая определение величины (2.1), получаем оценку сверху

$$\mathcal{M}_{n,m,r,p}(\varphi;h)\le\frac{1}{\inf\limits_{n\le k<\infty}\alpha_{k,m,r,p}(\varphi;h)}. \tag{2.6}$$

Для получения оценки снизу рассмотрим функцию $f_0(x)\overset{def}{=}T_n(x)=\sqrt{2/\pi}\cos(n\arccos x)$, которая принадлежит классу $L_{2,\mu}^{(2r)}$ и для которой

$$\mathcal{E}_{n-1}(f_0)_{2,\mu}=1,\quad \Omega_m(\mathcal{D}^rf_0;t)_{2,\mu}=n^{2r}(1-\cos nh)^m,\quad 0<nh\le\pi. \tag{2.7}$$

Имеем

$$\mathcal{M}_{n,m,r,p}(\varphi;h)\ge\frac{\mathcal{E}_{n-1}(f_0)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p(\mathcal{D}^rf_0;t)_{2,\mu}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}$$

$$= \frac{1}{\left(n^{2rp}\int\limits_0^h (1-\cos nt)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \frac{1}{\alpha_{n,m,r,p}(\varphi;h)}. \tag{2.8}$$

Сравнивая оценку сверху (2.6) и оценку снизу (2.8), получаем требуемое двойное неравенство (2.2), чем и завершаем доказательство теоремы 2.1.

Отметим, что теорема 2.1 является своеобразным обобщением основных результатов работ [9; 14], полученных для наилучшего полиномиального приближения 2π-периодических дифференцируемых функций, принадлежащих множеству $L_2^{(r)}[0,2\pi]$, на случай наилучшего полиномиального приближения функций f, принадлежащих множеству $L_{2,\mu}^{(2r)}$.

Из доказанной теоремы вытекает ряд следствий.

Следствие 2.1. *Пусть весовая функция $\varphi(t)$, заданная на отрезке $[0,h]$, является неотрицательной и непрерывно дифференцируемой на нем. Если при всех $t\in[0,h]$ и $p\in[1/(2r),2]$, $r\in\mathbb{N}$, выполнено неравенство*

$$(2rp-1)\varphi(t) - t\varphi'(t) \geq 0, \tag{2.9}$$

то справедливо равенство

$$\inf_{n\leq k<\infty} \alpha_{k,m,r,p}(\varphi;h) = \alpha_{n,m,r,p}(\varphi;h) \tag{2.10}$$

и имеет место соотношение

$$\mathcal{M}_{n,m,r,p}(\varphi;h) = \Big\{\alpha_{n,m,r,p}(\varphi;h)\Big\}^{-1}. \tag{2.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Исходя из вида величины $\alpha_{k,m,r,p}(\varphi;h)$, $k\geq n$, достаточно доказать, что при выполнении неравенства (2.9) функция

$$\eta(x) = x^{2rp}\int\limits_0^h (1-\cos xt)^{mp}\varphi(t)dt$$

является возрастающей при $x\geq n$. Так как

$$\eta'(x) = 2rpx^{2rp-1}\int\limits_0^h (1-\cos xt)^{mp}\varphi(t)dt + x^{2rp}\int\limits_0^h \frac{d}{dx}(1-\cos xt)^{mp}\varphi(t)dt, \tag{2.12}$$

то, пользуясь очевидным тождеством

$$\frac{d}{dx}(1-\cos xt)^{mp} = \frac{t}{x}\,\frac{d}{dt}(1-\cos xt)^{mp}, \tag{2.13}$$

из (2.12) с учетом (2.13), выполнив интегрирование по частям, в силу (2.9) получаем

$$\eta'(x) = 2rpx^{2rp-1}\int\limits_0^h (1-\cos xt)^{mp}\varphi(t)dt + x^{2rp-1}\int\limits_0^h \frac{d}{dt}(1-\cos xt)^{mp}(t\varphi(t))dt$$

$$= x^{2rp-1}\left\{(1-\cos xh)^{mp}h\varphi(h) + \int\limits_0^h (1-\cos xt)^{mp}\big[(2rp-1)\varphi(t) - t\varphi'(t)\big]dt\right\} \geq 0,$$

откуда $\inf\{\eta(x)\colon x \geq n\} = \eta(n)$, что равносильно равенству

$$\inf_{n\leq k<\infty} \alpha_{k,m,r,p}(\varphi;h) = \alpha_{n,m,r,p}(\varphi;h),$$

из которого в силу двойного неравенства (2.2) сразу получаем (2.11). Этим следствие 2.1 доказано.

Следствие 2.2. *Пусть весовая функция* $\varphi(t) \equiv 1$ *и числа* $m,n,r \in \mathbb{N}$, $1/(2r) \leq p \leq 2$, $0 < h \leq 3\pi/(4n)$. *Тогда выполнено следующее равенство*:

$$\mathcal{M}_{n,m,r,p}(1;h) = \{\alpha_{n,m,r,p}(1;h)\}^{-1} := \left\{n^{2rp}\int_0^h (1-\cos nh)^{mp} dt\right\}^{-1/p}. \tag{2.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, согласно неравенству (2.9), имеем $(2rp-1)\varphi(t) - t\varphi'(t) = 2rp-1 \geq 0$, а потому имеет место (2.14). Следствие доказано.

В равенстве (2.3) положим $h = a/n$, где $0 < a \leq \pi$, $\varphi_*(t) = g(nt)$, $g(u) \geq 0$ — суммируемая не эквивалентная нулю на отрезке $[0,a]$ функция. Тогда

$$\alpha_{k,m,r,p}(g(nt);a/n) = \left\{k^{2rp}\int_0^{a/n} (1-\cos kt)^{mp} g(nt)dt\right\}^{1/p}$$

$$= n^{2r-1/p}\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^{2rp}\int_0^a \left(1-\cos\frac{k}{n}t\right)^{mp} g(t)dt\right\}^{1/p}. \tag{2.15}$$

Из равенства (2.15) следует, что

$$\inf\{\alpha_{k,m,r,p}(g(n\cdot);a/n)\colon n\leq k<\infty\}$$

$$= n^{2r-1/p}\inf_{x\geq 1}\left\{x^{2rp}\int_0^a (1-\cos xt)^{mp} g(t)dt\right\}^{1/p} := n^{2r-1/p}\cdot\inf_{x\geq 1}\beta_{m,r,p}(a;g,x). \tag{2.16}$$

Используя равенство (2.16) из утверждения теоремы 2.1, получаем

Следствие 2.3. *Пусть* $r \in \mathbb{Z}_+$, $m,n \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq 2$, $0 < a \leq \pi$, $g(t)$ *есть неотрицательная суммируемая на отрезке* $[0,a]$ *не эквивалентная нулю функция. Тогда имеет место неравенство*

$$\frac{1}{\beta_{m,r,p}(a;g,1)} \leq \sup_{\substack{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}\\ f\neq\mathrm{const}}} \frac{n^{2r}\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\int_0^a \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f;t/n)_{2,\mu}\, g(t)dt\right)^{1/p}} \leq \frac{1}{\inf\limits_{1\leq x<\infty}\beta_{m,r,p}(a;g,x)}.$$

Если при этом функция g *такова, что*

$$\inf_{1\leq x<\infty}\beta_{m,r,p}(a;g,x) = \beta_{m,r,p}(a;g,1),$$

то справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}\\ f\neq\mathrm{const}}} \frac{n^{2r}\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\int_0^a \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f;t/n)_{2,\mu}\, g(t)dt\right)^{1/p}} = \frac{1}{\beta_{m,r,p}(a;g,1)}.$$

Следствие 2.4. *Пусть* $0 < a \le \pi,\ m,n,r \in \mathbb{N}$. *Если при всех* $0 < p \le 2$ *функция* $g(t) := t^{2rp-1}g_1(t)$, *где* $g_1(t)$ *не возрастает, является неотрицательной суммируемой на отрезке* $[0,a]$ *функцией, то*

$$\inf_{1\le x<\infty} \beta_{m,r,p}(a;g,x) = \beta_{m,r,p}(a;g,1), \tag{2.17}$$

и, следовательно, имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}\\ f\ne\mathrm{const}}} \frac{n^{2r}\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\Big(\int\limits_0^a \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f;t/n)_{2,\mu}\, t^{2rp-1}g_1(t)dt\Big)^{1/p}} = \frac{1}{\beta_{m,r,p}(a;t^{2rp-1}g_1(t),1)}. \tag{2.18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для установления равенства (2.17) будем следовать схеме рассуждений [4]. Полагаем

$$g_*(t) = \big\{\, g_1(t),\ \text{если } 0\le t\le a;\ \ g_1(a),\ \text{если } a\le t<\infty \,\big\}.$$

Тогда для $1\le x<\infty$ имеем

$$\beta_{m,r,p}(a;t^{2rp-1}g_1(t),x) = x^{2rp}\int\limits_0^a (1-\cos xt)^{mp}\, t^{2rp-1}g_1(t)dt$$

$$= \int\limits_0^{ax} (1-\cos t)^{mp}\, t^{2rp-1}g_*(t/x)dt \ge \int\limits_0^{ax} (1-\cos t)^{mp}\, t^{2rp-1}g_*(t)dt$$

$$\ge \int\limits_0^{a} (1-\cos t)^{mp}\, t^{2rp-1}g_1(t)dt = \beta_{m,r,p}(a;t^{2rp-1}g_1(t),1),$$

откуда сразу следует равенство (2.17), и тем самым следствие 2.4 доказано.

При решении экстремальных задач теории приближений важную роль играют неравенства между нормами последовательных производных функций или неравенства типа Колмогорова в различных банаховых пространствах. Если $\mathbb{S}=\mathbb{R}$ или $\mathbb{S}=\mathbb{R}_+$, то неравенство Колмогорова имеет вид

$$\|f^{(s)}\|_{L_p(\mathbb{S})} \le M\|f\|^{\alpha}_{L_q(\mathbb{S})}\cdot\|f^{(r)}\|^{\beta}_{L_\gamma(\mathbb{S})}, \tag{2.19}$$

где

$$\alpha = \frac{r-s-1/\gamma+1/p}{r-1/\gamma+1/q}, \quad \beta = 1-\alpha.$$

Различные неравенства типа (2.19) приведены в монографии [27]. Отметим также, что в работе В. В. Арестова [28] приведен обстоятельный обзор всех результатов неравенства вида (2.19), где получены наилучшие константы и анализируется связь задачи Стечкина о наилучшем приближении оператора дифференцирования $\mathcal{D}^k$ порядка k на различных классах функций.

В приведенной ниже теореме 2.2 доказывается точное неравенство Колмогорова для функций $f\in L_{2,\mu}^{(r)}$ в пространстве $L_{2,\mu}$. Поскольку для функции $f\in L_{2,\mu}^{(2r)}$ ее промежуточные производные $\mathcal{D}^s f$, $s=1,2,\dots,r-1$, принадлежат пространству $L_{2,\mu}$, то представляет интерес изучение поведения наилучших приближений $\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)$, $s=1,2,\dots,r-1$, на классе $L_{2,\mu}^{(2r)}$. С этой целью нам понадобится неравенство типа (2.19) в пространстве $L_{2,\mu}$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Пусть* $r,s\in\mathbb{N},\ r>s$. *Тогда для произвольной функции* $f\in L_{2,\mu}^{(2r)}$, $f\neq\mathrm{const}$, *справедливо точное на* $L_{2,\mu}$ *неравенство*

$$\|\mathcal{D}^s f\|_{2,\mu}\le\|\mathcal{D}^r f\|_{2,\mu}^{s/r}\cdot\|f\|_{2,\mu}^{1-s/r}. \tag{2.20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, в силу линейности оператора $\mathcal{D}^s$ из равенства (1.4) с учетом (1.7) имеем

$$\mathcal{D}^s f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(f)(\mathcal{D}^s T_k(x))=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^s k^{2s}c_k(f)T_k(x). \tag{2.21}$$

Применяя равенство Парсеваля, из (2.21) выводим

$$\|\mathcal{D}^s f\|_{2,\mu}^2=\sum_{k=1}^{\infty}k^{4s}|c_k(f)|^2. \tag{2.22}$$

Воспользовавшись неравенством Гёльдера для рядов, из (2.22) получаем

$$\|\mathcal{D}^s f\|_{2,\mu}^2=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(k^{4r}|c_k(f)|^2\Big)^{s/r}\Big(|c_k(f)|^2\Big)^{1-s/r}$$

$$\le\left(\sum_{k=n}^{\infty}k^{4r}|c_k(f)|^2\right)^{s/r}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|c_k(f)|^2\right)^{1-s/r}=\|\mathcal{D}^r f\|_{2,\mu}^{2s/r}\cdot\|f\|_{2,\mu}^{2(1-s/r)},$$

откуда и вытекает (2.20). Точность неравенства (2.20) на множестве $L_{2,\mu}^{(2r)}$ проверяется непосредственным вычислением для функции $f_0(x)=T_n(x)\in L_{2,\mu}^{(2r)}$. Теорема 2.2 доказана.

Из теоремы 2.2 вытекает

Следствие 2.5. *При выполнении условий теоремы* 2.2 *имеет место точное неравенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}\le\Big(\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu}\Big)^{s/r}\Big(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\Big)^{1-s/r}, \tag{2.23}$$

обращающееся в равенство для $f_0(x)=T_n(x)\in L_{2,\mu}^{(2r)}$.

Следующее утверждение базируется на неравенстве (2.20).

Теорема 2.3. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}, 0<p\le 2, 0<h\le 3\pi/(4n),\ r\in\mathbb{Z}_+,\ s=0,1,\dots,r$; $\varphi(t)$ — *неотрицательная суммируемая на отрезке* $[0,h]$ *не эквивалентная нулю функция и выполняется неравенство* (2.9). *Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}\\ f\neq\mathrm{const}}}\frac{n^{2(r-s)}\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p(\mathcal{D}^r f;t)_{2,\mu}\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}=\left\{\int\limits_0^h(1-\cos nt)^{mp}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p}. \tag{2.24}$$

В частности, если в (2.24) *полагать* $p=1/m, m\in\mathbb{N}$, *и* $\varphi(t)\equiv 1$, *то имеем*

$$\sup_{\substack{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}\\ f\neq\mathrm{const}}}\frac{n^{2(r-s)}\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f;t)_{2,\mu}dt\right)^m}=\left\{\frac{n}{nh-\sin nh}\right\}^m, \tag{2.25}$$

а если же полагать $p=1/m, m\in\mathbb{N}$, *и* $\varphi(t)\equiv t$, *то будем иметь*

$$\sup_{\substack{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}\\ f\neq\mathrm{const}}}\frac{n^{2(r-s)-m}\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^h t\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f;t)_{2,\mu}dt\right)^m}=2^m\Big\{nh(nh-\sin nh)-[(nh)^2-2(1-\cos nh)]\Big\}^{-m}. \tag{2.26}$$

Доказательство. В самом деле, если выполнено равенство (2.11), то для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ выполняется неравенство

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \le \frac{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f;t)_{2,\mu}\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}{n^{2r}\left(\int\limits_0^h (1-\cos nt)^{mp}\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}. \tag{2.27}$$

Полагая в (2.27) $r=0$, получаем

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \le \frac{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(f;t)_{2,\mu}\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}{\left(\int\limits_0^h (1-\cos nt)^{mp}\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}. \tag{2.28}$$

Поскольку из определения класса $L_{2,\mu}^{(2r)}$ следует, что $\mathcal{D}^r f \in L_{2,\mu}$, то, заменяя в неравенстве (2.28) функцию f на $\mathcal{D}^r f$, имеем

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu} \le \frac{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f;t)_{2,\mu}\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}{\left(\int\limits_0^h (1-\cos nt)^{mp}\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}. \tag{2.29}$$

Подставляя в правую часть неравенства (2.23) вместо величины наилучших приближений $\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}$ и $\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu}$ их оценки сверху из неравенств (2.27) и (2.29), получаем

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} \le \frac{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f;t)_{2,\mu}\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}{n^{2(r-s)}\left(\int\limits_0^h (1-\cos nt)^{mp}\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}} \quad (s=0,1,\ldots,r),$$

или, что то же самое,

$$\frac{n^{2(r-s)}\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f;t)_{2,\mu}\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}} \le \frac{1}{\left(\int\limits_0^h (1-\cos nt)^{mp}\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}.$$

Поскольку последнее неравенство справедливо для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$, то мы имеем следующую оценку сверху:

$$\sup_{\substack{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}\\ f\ne const}} \frac{n^{2(r-s)}\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f;t)_{2,\mu}\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}} \le \frac{1}{\left(\int\limits_0^h (1-\cos nt)^{mp}\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}. \tag{2.30}$$

С другой стороны, для рассмотренной при доказательстве теоремы 2.1 функции $f_0(x) = T_n(x) \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ согласно соотношениям (2.7) и очевидному равенству

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s T_n)_{2,\mu} = n^{2s} E_{n-1}(T_n)_{2,\mu} = n^{2s}$$

будем иметь

$$\sup_{\substack{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}\\ f\neq const}} \frac{n^{2(r-s)}\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f;t)_{2,\mu}\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}} \geq \frac{n^{2(r-s)}\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f_0)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f_0;t)_{2,\mu}\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}$$

$$= \frac{n^{2r}}{\left(n^{2rp}\int\limits_0^h (1-\cos nt)^{mp}\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \frac{1}{\left(\int\limits_0^h (1-\cos nt)^{mp}\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}. \tag{2.31}$$

Требуемое равенство (2.24) получаем из сопоставления оценки сверху (2.30) и оценки снизу (2.31), чем и завершаем доказательство теоремы 2.3.

3. Значения n-поперечников некоторых классов функций в $L_{2,\mu}$

Прежде чем сформулировать остальные результаты, напомним необходимые понятия и определения, используемые нами в дальнейшем.

Пусть $\mathcal{B}$ — единичный шар в $L_{2,\mu}$; $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное подмножество из $L_{2,\mu}$; $\Lambda_n \subset L_{2,\mu}$ — n-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_{2,\mu}$ — подпространство коразмерности n; $\mathscr{L}\colon L_{2,\mu} \to \Lambda_n$ — непрерывный линейный оператор, переводящий элементы пространства $L_{2,\mu}$ в Λ_n; $\mathscr{L}^{\perp}\colon L_{2,\mu} \to \Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования пространства $L_{2,\mu}$ на подпространство Λ_n. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, L_{2,\mu}) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0\colon \varepsilon\mathcal{B}\cap\Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_{n+1} \subset L_{2,\mu}\right\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, L_{2,\mu}) = \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f-g\|_{2,\mu}\colon g\in\Lambda_n\right\} : f\in\mathfrak{M}\right\} : \Lambda_n \subset L_{2,\mu}\right\},$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}, L_{2,\mu}) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f-\mathscr{L}f\|_{2,\mu}\colon f\in\mathfrak{M}\right\} : \mathscr{L}L_{2,\mu}\subset\Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset L_{2,\mu}\right\},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, L_{2,\mu}) = \inf\left\{\sup\left\{\|f\|_{2,\mu}\colon f\in\mathfrak{M}\cap\Lambda^n\right\} : \Lambda^n \subset L_{2,\mu}\right\},$$

$$\pi_n(\mathfrak{M}, L_{2,\mu}) = \inf\Big\{\inf\Big\{\sup\Big\{\|f-\mathscr{L}^{\perp}f\|_{2,\mu}\colon f\in\mathfrak{M}\Big\}\colon \mathscr{L}^{\perp}L_{2,\mu}\subset\Lambda_n\Big\}\colon \Lambda_n \subset L_{2,\mu}\Big\}$$

называют соответственно *бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским, проекционным n-поперечниками.* Поскольку $L_{2,\mu}$ является гильбертовым пространством, то справедливы следующие соотношения между перечисленными выше n-поперечниками (см., например, [26; 29]):

$$b_n(\mathfrak{M}; L_{2,\mu}) \leqslant d^n(\mathfrak{M}; L_{2,\mu}) \leqslant d_n(\mathfrak{M}; L_{2,\mu}) = \delta_n(\mathfrak{M}; L_{2,\mu}) = \pi_n(\mathfrak{M}; L_{2,\mu}). \tag{3.1}$$

При помощи специального модуля непрерывности (1.2) определим следующий класс функций. Пусть $\Psi(t)$, $0 \le t < \infty$, — произвольная непрерывная неубывающая функция такая, что $\Psi(0) = 0$. Символом $W_{p,m}^{(2r)}(\Psi)$, $1/(2r) < p \le 2$, $m, r \in \mathbb{N}$, обозначим класс функций $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$, для которых при любом $t \in \mathbb{R}_+$ выполняется условие

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f;\tau)_{2,\mu}\,d\tau \le \Psi^p(t).$$

Полагаем также

$$(1-\cos t)_*^m = \Big\{\ (1-\cos t)^m,\ \text{если } 0<t\le\pi;\quad 2^m,\ \text{если } t\ge\pi\ \Big\}. \tag{3.2}$$

Здесь вычислим точные значения указанных выше n-поперечников при некоторых ограничениях на мажоранту $\Psi(t)$.

Теорема 3.1. *Пусть $m,n,r\in\mathbb{N}$, $1/(2r)<p\le 2$ и функция Ψ при любых значениях $t\in\mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию*

$$\left(\frac{\Psi(t)}{\Psi(\pi/n)}\right)^p \ge \frac{\pi}{nt}\int\limits_0^{nt}(1-\cos\tau)_*^{mp}d\tau\left(\int\limits_0^{\pi}(1-\cos\tau)^{mp}d\tau\right)^{-1}. \tag{3.3}$$

Тогда выполняются равенства

$$\lambda_n(W_{p,m}^{(2r)}(\Psi);L_{2,\mu}) = \mathcal{E}_{n-1}(W_{p,m}^{(2r)}(\Psi))_{L_{2,\mu}} = \left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos\tau)^{mp}d\tau\right\}^{-1/p} n^{-2r}\,\Psi(\pi/n), \tag{3.4}$$

где $\lambda_n(\cdot)$ — любой из перечисленных выше n-поперечников, а

$$\mathcal{E}_{n-1}(W_{p,m}^{(2r)}(\Psi))_{L_{2,\mu}} \overset{def}{=} \sup\Big\{\,\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\colon f\in W_{p,m}^{(2r)}(\Psi)\Big\}.$$

Множество мажорант Ψ, для которых выполняется ограничение (3.3)*, не пусто.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из соотношения (2.5) для произвольной функции $f\in L_{2,\mu}$ при $h=\pi/n$ и $\varphi(t)\equiv 1$ выводим оценку сверху величины наилучшего полиномиального приближения:

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \le n^{-2r}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos\tau)^{mp}d\tau\right)^{-1/p}\left(\frac{n}{\pi}\int\limits_0^{\pi/n}\Omega_m^p(\mathcal{D}^r f;\tau)_{2,\mu}d\tau\right)^{1/p}. \tag{3.5}$$

Учитывая определение класса $W_{p,m}^{(2r)}(\Psi)$ и соотношение (3.1), из неравенства (3.5) получим

$$\lambda_n(W_{p,m}^{(2r)}(\Psi);L_{2,\mu}) \le \mathcal{E}_{n-1}(W_{p,m}^{(2r)}(\Psi))_{L_{2,\mu}} \le \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos\tau)^{mp}d\tau\right)^{-1/p} n^{-2r}\,\Psi(\pi/n). \tag{3.6}$$

Для получения оценки снизу рассматриваемых n-поперечников в силу соотношения (3.1) достаточно оценить снизу бернштейновский n-поперечник класса $W_{p,m}^{(2r)}(\Psi)$. С этой целью во множестве $\mathcal{P}_n\cap L_{2,\mu}$ введем в рассмотрение шар

$$S_{n+1} \overset{def}{=} \left\{p_n\in\mathcal{P}_n\colon \|p_n\|_{2,\mu} \le \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos\tau)^{mp}d\tau\right)^{-1/p} n^{-2r}\,\Psi(\pi/n)\right\}.$$

Из равенства (1.10) для произвольной $p_n\in\mathcal{P}_n$ вытекает равенство

$$\|\Delta_h^m(\mathcal{D}^r p_n)\|_{2,\mu}^2 = \sum_{k=1}^{n}(1-\cos kh)^{2m}k^{4r}c_k^2(p_n).$$

Если учесть, что при любых натуральных $k\le n$ и $h\ge 0$ выполняется неравенство

$$(1-\cos kh)^{2m} \le (1-\cos nh)_*^{2m},$$

то для произвольной $p_n \in S_{n+1}$ получаем $\|\Delta_h^m(\mathcal{D}^r p_n)\|_{2,\mu}^2 \le n^{4r}(1-\cos nh)_*^{2m}\,\|p_n\|_{2,\mu}^2$ или, учитывая соотношение (1.2), запишем

$$\Omega_m(\mathcal{D}^r p_n;\tau)_{2,\mu} \le n^{2r}(1-\cos n\tau)_*^m\|p_n\|_{2,\mu}. \tag{3.7}$$

Обе части неравенства (3.7) возведем в степень p $(1/(2r) < p \le 2)$, проинтегрируем по τ в пределах от 0 до t и полученное соотношение поделим на t. Затем в интеграле, расположенном в правой части неравенства, произведем замену переменной $n\tau = u$, а также заменим норму полинома $p_n \in S_{n+1}$ радиусом шара и, учитывая ограничение (3.3), получаем

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t \Omega_m^p(\mathcal{D}^r p_n;\tau)_{2,\mu}d\tau \le n^{2rp}\|p_n\|_{2,\mu}^p\cdot\frac{1}{t}\int\limits_0^t(1-\cos n\tau)_*^{mp}d\tau$$

$$\le \frac{\pi}{nt}\int\limits_0^{nt}(1-\cos u)_*^{mp}du\biggl(\int\limits_0^{\pi}(1-\cos u)^{mp}du\biggr)^{-1}\Psi(\pi/n) \le \Psi(t).$$

Последнее неравенство означает, что шар $S_{n+1} \subset W_{p,m}^{(2r)}(\Psi)$. Используя определение бернштейновского n-поперечника и соотношение (3.1), имеем

$$\lambda_n(W_{p,m}^{(2r)}(\Psi);L_{2,\mu}) \ge b_n(W_{p,m}^{(2r)}(\Psi);L_{2,\mu}) \ge b_n(S_{n+1};L_{2,\mu})$$

$$\ge \biggl(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos\tau)^{mp}d\tau\biggr)^{-1/p} n^{-2r}\,\Psi(\pi/n). \tag{3.8}$$

Сопоставляя оценку сверху (3.6) и оценку снизу (3.8), получаем требуемое равенство (3.4). Приступая ко второй части доказательства, покажем, что функция $\Psi_*(t) := t^{\alpha/p}$, где

$$\alpha \overset{def}{=} \frac{\pi}{\int\limits_0^{\pi}\Bigl(\sin\dfrac{\tau}{2}\Bigr)^{2mp}d\tau} - 1 \tag{3.9}$$

удовлетворяет условию (3.3). Сначала определим границу значений числа $\alpha := \alpha(m,p)$ из равенства (3.9). Воспользовавшись неравенством $\sin x \ge (2/\pi)x$ $(0 \le x \le \pi/2)$, имеем

$$\alpha = \alpha(m,p) = \frac{\pi}{\int\limits_0^{\pi}\Bigl(\sin\dfrac{\tau}{2}\Bigr)^{2mp}d\tau} - 1 \le \frac{\pi}{\int\limits_0^{\pi}\Bigl(\dfrac{\tau}{\pi}\Bigr)^{2mp}d\tau} - 1 = 2mp.$$

Аналогично, учитывая неравенство $|\sin x| \le 1$, $x \in \mathbb{R}$, получаем

$$\alpha = \alpha(m,p) = \frac{\pi}{\int\limits_0^{\pi}\Bigl(\sin\dfrac{\tau}{2}\Bigr)^{2mp}d\tau} - 1 \ge \frac{\pi}{\pi} - 1 = 0.$$

Таким образом, имеем

$$0 < \alpha < 2mp. \tag{3.10}$$

Анализируем условие (3.3) теоремы 3.1. Подставляя функцию Ψ_* в (3.3), получаем

$$\Bigl(\frac{nt}{\pi}\Bigr)^{\alpha} \ge \frac{\pi}{nt}\,\frac{\int\limits_0^{nt}(1-\cos\tau)_*^{mp}d\tau}{\int\limits_0^{\pi}(1-\cos\tau)^{mp}d\tau} = \frac{\pi}{nt}\,\frac{\int\limits_0^{nt}\Bigl(\sin\dfrac{\tau}{2}\Bigr)_*^{2mp}d\tau}{\int\limits_0^{\pi}\Bigl(\sin\dfrac{\tau}{2}\Bigr)^{2mp}d\tau}. \tag{3.11}$$

Полагая $nt = \mu\pi$ $(0 \le \mu < \infty)$, неравенство (3.11) запишем в виде

$$\mu^{\alpha+1} \ge \int\limits_0^{\mu\pi} \Big(\sin\frac{\tau}{2}\Big)_*^{2mp} d\tau \Big(\int\limits_0^{\pi} \Big(\sin\frac{\tau}{2}\Big)^{2mp} d\tau\Big)^{-1}. \tag{3.12}$$

Предложенная формула (3.9) для $\alpha = \alpha(m,p)$ есть результат приравнивания производных по μ от левой и правой частей неравенства (3.12) при $\mu = 1$. С учетом равенства (3.9) неравенство (3.12) приобретает вид

$$\mu^{\alpha+1} \ge \frac{\alpha+1}{\pi} \int\limits_0^{\mu\pi} \Big(\sin\frac{\tau}{2}\Big)_*^{2mp} d\tau, \tag{3.13}$$

что еще предстоит доказать. Рассуждения проведем отдельно для двух случаев

а) $0 \le \mu \le 1$; б) $1 \le \mu < \infty$.

Пусть $0 \le \mu \le 1$. Сначала заметим, что в достаточно малой окрестности нуля неравенство (3.13) имеет место. Поскольку при $\mu \to 0+0$

$$\varphi(\mu) := \mu^{\alpha+1} - \frac{\alpha+1}{\pi} \int\limits_0^{\mu\pi} \Big(\sin\frac{\tau}{2}\Big)^{2mp} d\tau = \mu^{\alpha+1}\left[1 - \frac{\pi^{2mp}(\alpha+1)}{2^{2mp}\,(2mp+1)}\, O(\mu^{2mp-\alpha})\right],$$

то в силу правой части (3.10) φ является положительной функцией. Докажем, что функция φ на всем отрезке $[0,1]$ неотрицательна. Если допустить, что в некоторой точке $\xi \in (0,1)$ функция φ меняет знак, то с учетом равенства $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ согласно теореме Ролля получаем, что производная первого порядка

$$\varphi'(\mu) = (\alpha+1)\left[\mu^{\alpha} - \Big(\sin\frac{\mu\pi}{2}\Big)^{2mp}\right] \tag{3.14}$$

должна иметь на интервале $(0,1)$ не менее двух различных нулей. Из (3.14) следует, что столько же различных нулей и в тех же точках интервала $(0,1)$ должна иметь функция

$$\varphi_*(\mu) = \mu^{\alpha/(2mp)} - \sin\frac{\mu\pi}{2}. \tag{3.15}$$

Так как кроме того $\varphi_*(0) = \varphi_*(1) = 0$, функция φ_* должна иметь на отрезке $[0,1]$ не менее четырех нулей. Тогда из теоремы Ролля следует, что производная

$$\varphi_*'(\mu) = \frac{\alpha}{2mp}\cdot\mu^{\alpha/(2mp)-1} - \frac{\pi}{2}\cos\frac{\mu\pi}{2} \tag{3.16}$$

обязана обращаться в нуль не менее чем в трех различных точках интервала $(0,1)$. В силу неравенства (3.10) функция $\mu^{\alpha/(2mp)-1}$ является положительной монотонно убывающей выпуклой вниз функцией на $(0,1)$, $\cos(\mu\pi/2)$ — монотонно убывающая выпуклая вверх функция на этом же интервале, а потому из геометрических соображений на основании (3.16) следует, что производная φ_*' на интервале $(0,1)$ может иметь не более двух различных нулей, и мы пришли к противоречию, что доказывает неравенство (3.13) в случае а).

Приступая к рассмотрению случая б), функцию φ с учетом (3.9) и (3.2) запишем в виде

$$\varphi(\mu) = \mu^{\alpha+1} - \frac{\alpha+1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\Big(\sin\frac{\tau}{2}\Big)^{2mp} d\tau - \frac{\alpha+1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{\mu\pi}\Big(\sin\frac{\tau}{2}\Big)_*^{2mp} d\tau = \mu^{\alpha+1} - 1 - (\alpha+1)(\mu-1). \tag{3.17}$$

Дифференцируя полученное равенство, для всех $1 \leq \mu < \infty$ имеем

$$\varphi'(\mu) = (\alpha+1)(\mu^{\alpha}-1) \geq 0.$$

Поскольку, как следует из (3.17), $\varphi(1) = 0$, то $\varphi(\mu) \geq 0$ на указанном точечном множестве. Это означает, что неравенство (3.13) имеет место и в случае б). Значит условие (3.3) справедливо для мажорантной функции Ψ_* при любом $t \in \mathbb{R}_+$.

Теорема 3.1 полностью доказана.

Из теоремы 3.1 вытекает

Следствие 3.1. *Для любых $m, n, r \in \mathbb{N}$, $1/(2r) < p \leq 2$ справедливы равенства*

$$\lambda_n(W_{p,m}^{(r)}(\Psi_*); L_{2,\mu}) = \mathcal{E}_{n-1}(W_{p,m}^{(r)}(\Psi_*))_{L_{2,\mu}} = 2^m(\alpha+1)^{-1/p}\,\pi^{\alpha/p}\,n^{-(2r+\alpha/p)}.$$

Теорема 3.2. *Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}$, $1/(2r) < p \leq 2$. Если функция Ψ при любом $t \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию* (3.3) *теоремы* 3.1, *то для всех $s = 0, 1, \ldots, r$ справедливы равенства*

$$\sup\Big\{\mathcal{E}_{n-1}(D^s f)_{2,\mu}\colon f \in W_{p,m}^{(2r)}(\Psi)\Big\} = n^{-2(r-s)}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos\tau)^{mp}d\tau\right)^{-1/p}\Psi(\pi/n). \tag{3.18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из соотношения (2.24) при $\varphi(t) \equiv 1$ для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ и любого $h \in [0, \pi/n]$ получаем

$$\mathcal{E}_{n-1}(D^s f)_{2,\mu} \leq n^{-2(r-s)}\left(\frac{1}{h}\int_0^{h}\Omega_m^p(D^r f; t)_{2,\mu}dt\right)^{1/p}\left(\frac{1}{h}\int_0^{h}(1-\cos nt)^{mp}dt\right)^{-1/p}. \tag{3.19}$$

Используя определение класса $W_{p,m}^{(2r)}(\Psi)$, из неравенства (3.19) при $h = \pi/n$ получаем

$$\mathcal{E}_{n-1}(D^s f)_{2,\mu} \leq n^{-2(r-s)}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos t)^{mp}dt\right)^{-1/p}\Psi(\pi/n). \tag{3.20}$$

При доказательстве теоремы 3.1 мы установили, что множество полиномов $p_n \in \mathcal{P}_n$, удовлетворяющих условию

$$\|p_n\|_{2,\mu} \leq n^{-2r}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos t)^{mp}dt\right)^{-1/p}\Psi(\pi/n),$$

принадлежит классу $W_{p,m}^{(2r)}(\Psi)$. Рассмотрим функцию

$$f_1(t) \stackrel{def}{=} n^{-2r}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos t)^{mp}dt\right)^{-1/p}\Psi(\pi/n)T_n(x).$$

Так как

$$\|f_1\|_{2,\mu} = n^{-2r}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos t)^{mp}dt\right)^{-1/p}\Psi(\pi/n),$$

то $f_1 \in W_{p,m}^{(2r)}(\Psi)$, и поскольку

$$\mathcal{E}_{n-1}(D^s f_1)_{2,\mu} = n^{-2(r-s)}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos t)^{mp}dt\right)^{-1/p}\Psi(\pi/n),$$

то

$$\sup\Big\{\mathcal{E}_{n-1}(D^s f)_{2,\mu}\colon f\in W^{(2r)}_{p,m}(\Psi)\Big\}\geq \mathcal{E}_{n-1}(D^s f_1)_{2,\mu}$$

$$=n^{-2(r-s)}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos\tau)^{mp}d\tau\right)^{-1/p}\Psi(\pi/n). \qquad (3.21)$$

Сопоставляя неравенства (3.20) и (3.21), получаем равенство (3.18). Теорема 3.2 доказана.

Авторы признательны профессору В. В. Арестову за ценные советы и замечания, использованные в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Черных Н.И.** О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Мат. заметки. 1967. Т. 2, № 5. С. 513–522.
2. **Тайков Л.В.** Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Мат. заметки. 1976. Т. 20, № 3. С. 433–438.
3. **Тайков Л.В.** Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Мат. заметки. 1979. Т. 25, № 2. С. 217–223.
4. **Лигун А.А.** Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Мат. заметки. 1978. Т. 24, № 6. С. 785–792.
5. **Бабенко А.Г.** О точной константе в неравенстве Джексона в L^2 // Мат. заметки. 1986. Т. 39, № 5. С. 651–664.
6. **Шалаев В.В.** О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. мат. журн. 1991. Т. 43, № 1. С. 125–129.
7. **Бабенко А.Г., Черных Н.И., Шевалдин В.Т.** Неравенства Джексона — Стечкина в L_2 с тригонометрическим модулем непрерывности // Мат. заметки. 1999. Т. 65, № 6. С. 928–932.
8. **Вакарчук С.Б.** Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Мат. заметки. 2005. Т. 78, № 5. С. 792–796.
9. **Вакарчук С.Б., Забутная В.И.** Неравенства типа Джексона — Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Мат. заметки. 2012. Т. 92, № 4. С. 497–514.
10. **Иванов В.И., Смирнов О.И.** Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p. Тула: Изд-во ТулГУ, 1995. 192 с.
11. **Есмаганбетов М.Г.** Поперечники классов из $L_2[0,2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона // Мат. заметки. 1999. Т. 65, № 6. С. 816–820.
12. **Юдин В.А.** К теоремам Джексона в L_2 // Мат. заметки. 1987. Т. 41, № 1. С. 43–47.
13. **Шабозов М.Ш.** Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0,2\pi]$ // Мат. заметки. 2010. Т. 87, № 4. С. 616–623.
14. **Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А.** Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Мат. заметки. 2011. Т. 90, № 5. С. 764–775.
15. **Бабенко А.Г.** Точное неравенство Джексона — Стечкина в пространстве L^2-приближений на отрезке с весом Якоби и проективных пространствах // Изв. РАН. Серия математическая. 1998. Т. 62, № 6. С. 27–52.
16. **Чертова Д.В.** Теоремы Джексона в пространствах L_p, $1\leq p\leq 2$, с периодическим весом Якоби // Изв. ТулГУ. Естест. науки. 2009. Вып.1. С. 5–27.
17. **Кук Во Тхи.** Операторы обобщенного сдвига в пространствах L_p на торе с весом Якоби и их применение // Изв. ТулГУ. Естест. науки. 2012. Вып. 1. С. 17–43.
18. **Иванов А.В., Иванов В.И.** Теория Данкля и теорема Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 180–192.
19. **Иванов А.В., Иванов В.И.** Оптимальные аргументы в неравенстве Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом // Мат. заметки. 2013. Т. 94, № 3. С. 338–348.
20. **Вакарчук С.Б.** О неравенствах типа Джексона в L_2 и точных значениях n-поперечников функциональных классов // Укр. мат. вiсник. 2006. Т. 3, № 1. С. 116–133.

21. **Абилов В.А., Абилова Ф.В.** Об одной квадратурной формуле // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2002. Т. 42, № 4. С. 451–458.
22. **Суетин П.К.** Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979. 416 с.
23. **Никольский С.М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969. 480 с.
24. **Тухлиев К.** О верхних гранях отклонения некоторых классов функций от их частичных сумм рядов Фурье — Чебышёва в пространстве L_2 // Докл. АН РТ. 2013. Т. 56, № 8. С. 606–611.
25. **Шабозов М.Ш., Тухлиев К.** $\mathcal{K}$-функционалы и точные значения n-поперечников некоторых классов функций в пространстве $L_2\big((1-x^2)^{-1/2};[-1,1]\big)$ // Изв. ТулГУ. 2014. Вып. 1. Ч. 1. С. 83–97.
26. **Pinkus A.** n-Widths in approximation theory. Berlin: Springer-Verlag, 1985. 252 p.
27. Неравенства для производных и их приложения / В. Ф. Бабенко, Н. П. Корнейчук, В. А. Кафанов, С. А. Пичугов. Киев: Наукова думка, 2003. 590 с.
28. **Арестов В.В.** Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат наук. 1996. Т. 51. Вып. 6 (312). С. 89–124.
29. **Тихомиров В.М.** Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976. 325 с.

Шабозов Мирганд Шабозович
д-р физ.-мат. наук, профессор
академик АН Республики Таджикистан
Институт математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан
e-mail: shabozov@mail.ru

Поступила 27.05.2014

Тухлиев Камаридин
канд. физ.-мат. наук
Худжандский государственный университет им. Б. Гафурова
e-mail: kamaridin.t54@mail.ru