ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 512.552.4

ПОЧТИ ЛИЕВО НИЛЬПОТЕНТНЫЕ НЕПЕРВИЧНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР[1]

О. Б. Финогенова

Многообразие ассоциативных алгебр называется *лиево нильпотентным*, если оно при некотором n удовлетворяет тождеству $[\cdots[[x_1,x_2],\ldots],x_n]=0$, где $[x,y]=xy-yx$. В работе изучаются почти лиево нильпотентные многообразия, т. е. минимальные элементы в множестве не лиево нильпотентных многообразий. Полностью описаны почти лиево нильпотентные многообразия алгебр над полем положительной характеристики, как конечным, так и бесконечным, в тех случаях, когда идеалы тождеств этих многообразий являются непервичными идеалами в классе всех T-идеалов.

Ключевые слова: многообразие ассоциативных алгебр, тождества ассоциированной алгебры Ли, лиева нильпотентность, энгелевость.

O. B. Finogenova. Almost Lie nilpotent non-prime varieties of associative algebras.

A variety of associative algebras is called *Lie nilpotent* if it satisfies the identity $[\cdots[[x_1,x_2],\ldots,x_n]=0$ for some positive integer n, where $[x,y]=xy-yx$. We study almost Lie nilpotent varieties, i.e., minimal elements in the set of all varieties that are not Lie nilpotent. We describe all almost Lie nilpotent varieties of algebras over a field of positive characteristic, both finite and infinite, in the cases when the ideals of identities of these varieties are nonprime in the class of all T-ideals.

Keywords: variety of associative algebras, identities of the associated Lie algebra, Lie nilpotency, Engel property.

Введение

Всюду далее мы считаем, если не сказано иное, что F — произвольное ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей, и слово “алгебра” означает “F-алгебра”.

На каждой ассоциативной алгебре $\langle A,+,\cdot\rangle$ можно определить операцию $[x,y]=xy-yx$. Множество A относительно операций $+$ и $[,]$, как легко видеть, становится алгеброй Ли. Она называется ассоциированной алгеброй Ли и является одним из наиболее изучаемых производных объектов исходной алгебры. Тождества ассоциированной алгебры Ли формируют специфический подкласс полиномиальных тождеств. К наиболее известным из них относятся тождества лиевой нильпотентности, энгелевости, разрешимости. Напомним, что алгебры или многообразия называются *лиево нильпотентными*, если при некотором натуральном числе n удовлетворяют тождеству $[\cdots[[[x_1,x_2],x_3],\ldots],x_n]=0$, и *энгелевыми*, если удовлетворяют тождеству $[\cdots[[[x,y],y],\ldots],y]=0$. (В дальнейшем мы будем опускать внутренние скобки при *левонормированной* их расстановке, т. е. запись $[\cdots[[[x_1,x_2],x_3]\ldots],x_n]$ будет упрощена до $[x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n]$ и т. п.) Интерес к тождествам указанных типов во многом был инспирирован задачами бернсайдовского типа (см., например, [5]). Одна из наиболее известных проблем данной тематики — задача о локальной нильпотентности энгелевых многообразий. Она была положительно решена Е. И. Зельмановым: каждая конечнопорожденная энгелева алгебра Ли над полем положительной характеристики является нильпотентной [2; 3]. Над полем нулевой характеристики любая, а не только конечнопорожденная, энгелева алгебра Ли нильпотентна [1]. Для алгебр Ли, ассоциированных с ассоциативными алгебрами, последний результат

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-01-00524) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-5161.2014.1).

был получен ранее А. Р. Кемером [4]. В случае поля положительной характеристики достаточные условия для глобальной нильпотентности были найдены П. Хиггинсом [11]: если алгебра Ли над полем характеристики p является $(p-1)$-энгелевой, т. е. удовлетворяет тождеству $[x, \underbrace{y, \ldots, y}_{p-1}] = 0$, и разрешимой, то она нильпотентна.

Проверка, будет ли данное многообразие лиево нильпотентным, энгелевым или разрешимым, сопряжена, как правило, с техническими трудностями. Более того, если многообразие задается системой тождеств, то даже существование алгоритма такой проверки находится под вопросом, поскольку исследователю требуется вывести из данного набора одно из тождеств бесконечной серии или доказать, что ни одно тождество этой серии следствием данного набора не является. В этой ситуации несомненную пользу может принести более “алгоритмичная”, нежели эквациональная, характеризация изучаемого свойства θ. К таким характеризациям относится, например, описание почти θ-многообразий, т. е. минимальных элементов в множестве многообразий, не удовлетворяющих свойству θ. Согласно лемме Цорна каждое многообразие, не обладающее свойством θ, будет содержать в качестве подмногообразия некоторое почти θ-многообразие. Если алгебры, порождающие почти θ-многообразия, не слишком сложно устроены, то полный список почти θ-многообразий обеспечивает нас алгоритмом проверки: многообразие, задаваемое системой тождеств, удовлетворяет θ тогда и только тогда, когда ни одна из указанных алгебр не удовлетворяет данной системе. Такой подход был реализован для всех трех свойств (лиева нильпотентность, энгелевость, разрешимость) в случае алгебр над полем нулевой характеристики [4; 7]. Почти энгелевы многообразия алгебр над полем положительной характеристики (как конечным, так и бесконечным) и почти энгелевы многообразия колец полностью описаны автором [9]. Почти разрешимые многообразия алгебр над ассоциативно-коммутативным нетеровым кольцом изучались в [10].

Цель настоящей работы — исследование свойств почти лиево нильпотентных многообразий ассоциативных алгебр и нахождение таких многообразий в одном из двух возможных естественных случаев. Напомним, что T-*идеалом* называется идеал свободной ассоциативной счетнопорожденной алгебры, замкнутый относительно всех ее эндоморфизмов. Идеал I называется T-*первичным*, если для любых T-идеалов I_1 и I_2 из включения $I_1 \cdot I_2 \subseteq I$ следует одно из включений: $I_1 \subseteq I$ или $I_2 \subseteq I$. Это понятие играет важную роль в структурной теории многообразий. Многообразие будем называть *первичным*, если его идеал тождеств T-первичен. В данной работе мы полностью описываем почти лиево нильпотентные непервичные многообразия алгебр над полями положительной характеристики, конечными и бесконечными.

Нам понадобятся обозначения для нескольких алгебр.

$$K_{F,n} = F\langle k_1, k_2, \ldots \mid k_i k_j = k_j k_i,\ k_i^n = 0,\ i, j = 1, 2 \ldots\rangle \quad \text{при} \quad n > 0.$$

Если U — произвольная алгебра, то $A(U) = \begin{pmatrix} U & U \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Если F, G — конечные поля, $F \subseteq G$, и σ — такой автоморфизм поля G, что поле инвариантов G^σ — единственное максимальное подполе в поле G, содержащее F, то

$$B(F, G, \sigma) = \left\{ \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & \sigma(b) \end{pmatrix};\ b, c \in G \right\}.$$

Через $\overleftarrow{\mathcal{V}}$ обозначим многообразие, двойственное к $\mathcal{V}$, т. е. класс, состоящий из алгебр, антиизоморфных алгебрам из $\mathcal{V}$; в случае алгебр $\overleftarrow{A}$ — алгебра, антиизоморфная A.

Теорема 1. *Пусть F — бесконечное поле положительной характеристики p, а $\mathcal{V}$ — непервичное многообразие F-алгебр. Многообразие $\mathcal{V}$ почти лиево нильпотентно тогда и только тогда, когда оно порождено либо алгеброй $A(K_{F,p})$, либо алгеброй $\overleftarrow{A}(K_{F,p})$.*

Теорема 2. *Пусть F — конечное поле характеристики p, а $\mathcal{V}$ — непервичное многообразие F-алгебр. Многообразие $\mathcal{V}$ почти лиево нильпотентно тогда и только тогда, когда оно порождено одной из алгебр $A(F)$, $\overleftarrow{A}(F)$, $A(K_{F,p})$, $\overleftarrow{A}(K_{F,p})$, $B(F,G,\sigma)$.*

Через $\bar{k}$ будем обозначать набор символов $k_1, k_2, \ldots$, будь то переменные или индексы. Из контекста при этом будет ясно, считается этот набор упорядоченным или нет.

Обозначим через $W_n(\bar{x})$ левонормированный лиев коммутатор длины n, т. е.

$$W_n(\bar{x}) = [x_1, \ldots, x_n].$$

Следующее утверждение с очевидностью следует из теорем 1 и 2.

Следствие 1. *Предположим, что многообразие F-алгебр $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству вида $W_{n_1}(\bar{x}_1)W_{n_2}(\bar{x}_2)\cdots W_{n_k}(\bar{x}_k) = 0$ при некоторых натуральных $n_1, \ldots, n_k$ и попарно не пересекающихся наборах переменных $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k$.*

1) *Если F — бесконечное поле характеристики p, то $\mathcal{V}$ лиево нильпотентно тогда и только тогда, когда $\mathcal{V}$ не содержит алгебр $A(K_{F,p})$ и $\overleftarrow{A}(K_{F,p})$.*

2) *Если F — конечное поле характеристики p, то многообразие $\mathcal{V}$ лиево нильпотентно тогда и только тогда, когда $\mathcal{V}$ не содержит алгебр $A(F)$, $\overleftarrow{A}(F)$, $B(F,G,\sigma)$, $A(K_{F,p})$ и $\overleftarrow{A}(K_{F,p})$.*

Перечислим некоторые термины и обозначения, используемые в работе.

Всюду ниже рассматриваются только ассоциативные алгебры, поэтому прилагательное “ассоциативная” будет опускаться.

Через $\mathsf{var}\,\Sigma$ мы обозначаем многообразие, задаваемое системой Σ многочленов с некоммутирующими переменными, т. е. класс алгебр, удовлетворяющих всем тождествам вида $f = 0$ для $f \in \Sigma$; через $T(\mathcal{V})$ — идеал тождеств многообразия $\mathcal{V}$; через $T(\Sigma)$ — T-идеал свободной счетнопорожденной F-алгебры, порожденный множеством многочленов Σ. При этом для упрощения вместо $T(\{f\})$ будем писать $T(f)$.

Напомним, что многочлен называется *существенным по x*, если буква x присутствует в каждом его одночлене. Многочлен называется *существенным*, если он существен по всем своим переменным.

1. Алгебры над произвольным коммутативным кольцом операторов

До конца этого раздела мы считаем, если не сказано иное, что F — произвольное коммутативное кольцо с 1, и рассматриваем многообразия F-алгебр.

Лемма 1. *Пусть для целого $n \geq 3$ многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $W_n(\bar{x}) = 0$, тогда для любого $k \leq n-3$ многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству*

$$W_{n-k}(\bar{y}_1)W_{n-k}(\bar{y}_2)\cdots W_{n-k}(\bar{y}_{2^k}) = 0.$$

Доказательство. Сделаем в W_n подстановку $x_{n-1} \mapsto zx_{n-1}$. Получим

$$\begin{aligned} 0 &= [W_{n-2}, zx_{n-1}, x_n] \\ &= z[W_{n-2}, x_{n-1}, x_n] + [z, x_n][W_{n-2}, x_{n-1}] + [W_{n-2}, z][x_{n-1}, x_n] + [W_{n-2}, z, x_n]x_{n-1}. \end{aligned}$$

Первое и четвертое слагаемые принадлежат $T(W_n)$. Положим $z = W_{n-2}(\bar{u})$ и тем самым благодаря тождеству Якоби превратим первый коммутатор третьего слагаемого в следствие W_n. Значит, по модулю $T(W_n)$

$$[W_{n-2}(\bar{u}), x_n][W_{n-2}, x_{n-1}] = 0,$$

т. е. $W_{n-1}(\bar{y}_1)W_{n-1}(\bar{y}_2)=0$ есть тождество многообразия $\mathcal{M}$. Поскольку $W_s u W_m \subseteq T(W_s W_m)$ для любых s,m, можно повторить проделанные действия для каждого W_{n-1}, чтобы получить произведение четырех многочленов W_{n-2} и так далее. □

Всюду в этом разделе через $\mathcal{V}$ мы обозначаем произвольное почти лиево нильпотентное многообразие алгебр.

Лемма 2. *Для любого многочлена $g(\bar{x})$ либо $g\in T(\mathcal{V})$, либо $W_n(x_1,\dots,x_n)\in T(g)+T(\mathcal{V})$ для некоторого натурального числа n.*

Доказательство. Если $g\notin T(\mathcal{V})$, то идеал $T(g)+T(\mathcal{V})$ задает собственное подмногообразие в многообразии $\mathcal{V}$. Каждое собственное подмногообразие в многообразии $\mathcal{V}$ лиево нильпотентно. Следовательно, для некоторого n имеем $W_n(x_1,\dots,x_n)\in T(g)+T(\mathcal{V})$. □

Лемма 3. *Если $T(f)T(g)+T(g)T(f)\subseteq T(\mathcal{V})$, то либо $f\in T(\mathcal{V})$, либо $g(\bar{x})g(\bar{y})\in T(\mathcal{V})$.*

Доказательство. Предположим, что $f\notin T(\mathcal{V})$ и $g(\bar{x})g(\bar{y})\notin T(\mathcal{V})$. По лемме 2 в многообразии $\mathcal{V}$ есть тождество $W_n(\bar{x})=h(\bar{x})$ для некоторого $h\in T(f)$. Кроме того, у нас есть тождество $W_s(\bar{y})=t(\bar{y})$, где $t(\bar{y})$ есть сумма многочленов вида $ug(a_1,a_2,\dots)g(b_1,b_2,\dots)v$, где u,v — одночлены, а a_i,b_i — многочлены, зависящие от $y_1,y_2\dots$. Очевидно, многочлен $t(\bar{y})$ можно считать существенным по всем его переменным. По модулю $T(\mathcal{V})$ выполняется цепочка равенств

$$W_{n+s-1}=W_s(W_n(\bar{x}),y_2,\dots)=W_s(h(\bar{x}),y_2,\dots)=t(h(\bar{x}),y_2,\dots).$$

Нам остается доказать, что $t(h(\bar{x}),y_2,\dots)\in T(f)T(g)+T(g)T(f)$. Действительно, подстановка $y_1\mapsto h(\bar{x})$ обращает в нуль по модулю $T(f)T(g)+T(g)T(f)$ все слагаемые из $t(\bar{y})$, в которых u или v содержат y_1. Рассмотрим остальные слагаемые. Легко заметить, что

$$g(a_1,a_2,\dots)=g(c_1,c_2,\dots)+d(\bar{y}),$$

где многочлены $c_1,c_2,\dots$ не зависят от y_1, а каждый одночлен из $d(\bar{y})$ содержит y_1. Следовательно, подстановка $y_1\mapsto h(\bar{x})$ обращает в нуль по модулю $T(f)T(g)$ все слагаемые вида $ud(\bar{y})g(b_1,\dots)v$. В оставшихся слагаемых $ug(c_1,c_2,\dots)g(b_1,b_2,\dots)v$ переменная y_1 обязана входить в каждый одночлен из $g(b_1,b_2,\dots)$. Следовательно, наша подстановка $y_1\mapsto h(\bar{x})$ обращает в нуль по модулю $T(g)T(f)$ и эти последние слагаемые. Таким образом, верно включение $t(h(\bar{x}),y_2,\dots)\in T(f)T(g)+T(g)T(f)$. Следовательно, $W_{n+s-1}\in T(\mathcal{V})$. Противоречие. □

Лемма 4. *Если многообразие $\mathcal{V}$ не является первичным, то многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $[x,y][z,t]=0$.*

Доказательство. Согласно определению найдутся два таких многочлена $f_1\notin T(\mathcal{V})$ и $f_2\notin T(\mathcal{V})$, что $T(f_1)\cdot T(f_2)\subseteq T(\mathcal{V})$. По лемме 2 у нас есть два включения: $W_n\in T(f_1)+T(\mathcal{V})$ и $W_s\in T(f_2)+T(\mathcal{V})$. По лемме 1 для некоторого r выполняется включение

$$\underbrace{W_3\cdots W_3}_{r}\in (T(f_1)+T(\mathcal{V}))(T(f_2)+T(\mathcal{V}))\subseteq T(\mathcal{V}).$$

Предположим, что r — минимальное число с таким свойством. Положим $f=\underbrace{W_3\cdots W_3}_{r-1}$ и $g=W_3$. Тогда $f\notin T(\mathcal{V})$ и $T(f)T(g)+T(g)T(f)\subseteq T(\mathcal{V})$. По лемме 3 выполняется включение $g(\bar{x})g(\bar{y})\in T(\mathcal{V})$, т. е. $W_3W_3=0$ — тождество многообразия $\mathcal{V}$.

Предположим, что $[x,y][z,t]\notin T(\mathcal{V})$. Тогда по лемме 2 многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет при некотором m тождеству

$$W_m(\bar{x})=g(\bar{x}), \tag{1}$$

где g — сумма многочленов вида $u[x_i,x_j]v[x_l,x_k]w$ и u, v, w — одночлены, возможно пустые, зависящие от переменных $x_1,\dots,x_m$. Легко видеть, что подстановка $x_i\mapsto[x_i,y_i]$ $(i=1,\dots,m)$ превратит правую часть (1) в следствие многочлена $W_3W_3\in T(\mathcal{V})$. Следовательно, и левая часть $W_m([x_1,y_1],\dots,[x_m,y_m])$ будет принадлежать $T(\mathcal{V})$. Пусть теперь m — минимальное число, при котором

$$W_m([x_1,y_1],\dots,[x_m,y_m])\in T(\mathcal{V}).$$

Мы хотим доказать, что $m=2$. Предположим, что $m\geq 3$. По лемме 2 многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет при некотором t тождеству

$$W_t(\bar{x})=h(\bar{x}), \tag{2}$$

где h — сумма многочленов вида $uW_{m-1}([a_1,b_1],\dots,[a_{m-1},b_{m-1}])v$ и u,v,a_i,b_i — одночлены от переменных $x_1,\dots,x_m$. Нетрудно убедиться, что

$$[h(\bar{x}),[y,z]]\in T(W_m([x_1,y_1],\dots,[x_m,y_m]))+T(W_3(\bar{x})W_3(\bar{y}))\subseteq T(\mathcal{V}).$$

Следовательно, $[W_t(\bar{x}),[y,z]]=0$ — тождество $\mathcal{V}$. Поскольку $m\geq 3$, то и $t\geq 3$. Теперь заметим, что $h(W_t(\bar{y}),x_2,\dots)$ — сумма многочленов типа $\tilde{u}[[c_1,c_2],c_3W_t(\bar{y})c_4]\tilde{v}$ для некоторых многочленов $\tilde{u}$, c_1, c_2, c_3, c_4, $\tilde{v}$. Ясно, что

$$\tilde{u}[[c_1,c_2],c_3W_t(\bar{y})c_4]\tilde{v}\in T(W_3(\bar{x})W_3(\bar{y}))+T([W_t(\bar{x}),[y,z]]).$$

Следовательно, $h(W_t(\bar{y}),x_2,\dots)\in T(\mathcal{V})$. Поэтому, заменяя в (2) x_1 на $W_t(\bar{y})$, получаем справа многочлен из $T(\mathcal{V})$, а слева $W_{2t-1}=W_t(W_t(\bar{y}),x_2,\dots,x_t)$. Противоречие показывает, что $m=2$, т. е. $[[x_1,y_1],[x_2,y_2]]=0$ — тождество многообразия $\mathcal{V}$.

Подставляя в тождество $[[x_1,y_1],[x_2,y_2]]=0$ произведение y_2z вместо y_2, получаем следствие $[x_1,y_1,y_2][x_2,z]+[x_2,y_2][x_1,y_1,z]=0$. Сделаем в нем замену $y_2\mapsto y_2t$ и, вспомнив, что $W_3W_3=0$, получим тождество $[x_2,y_2][x_1,y_1,z,t]=0$. Двойственным образом можно получить тождество $[x_1,y_1,z,t][x_2,y_2]=0$. По лемме 3 имеем $[x_2,y_2][x_3,y_3]\in T(\mathcal{V})$. $\square$

Следующее абстрактное свойство часто встречается у экстремальных многообразий.

Определение. Будем говорить, что многообразие $\mathcal{M}$ обладает *свойством* $\mathcal{Z}$, если для любых многочленов f и g из включений $f(v(\bar{t}),\bar{x})\in T(\mathcal{M})$, выполняющихся при всех $v\in T(g)$, следует либо $g\in T(\mathcal{M})$, либо $f([y,z],\bar{x})\in T(\mathcal{M})$.

Легко заметить, что свойство $\mathcal{Z}$ достаточно проверять только для многочленов $f(t,\bar{x})$, существенных по переменной t.

Лемма 5. *Если многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $[x,y][z,t]=0$, то $\mathcal{V}$ обладает свойством $\mathcal{Z}$.*

Доказательство. Пусть f и g — многочлены из условия свойства $\mathcal{Z}$. Предположим, что ни g, ни $f([y,z],\bar{x})$ не лежат в $T(\mathcal{V})$. По лемме 2 многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет двум тождествам:

$$W_r(\bar{t})=h(\bar{t}), \tag{3}$$

где $h(\bar{t})$ — следствие g, и

$$W_s(\bar{u})=c(\bar{u}), \tag{4}$$

где $c(\bar{u})$ — следствие $f([y,z],\bar{x})$. Ясно, что $c(\bar{u})$ — сумма слагаемых двух типов:

A. $vf(\sum_i[a_i,b_i],\dots)w$, и u_1 входит в каждый одночлен из a_i;

B. $a[v,w]b$, и u_1 входит либо в a, либо в b.

Подстановка $u_1\mapsto W_r(\bar{t})$ в (4) обращает в нуль по модулю $T([x,y][z,t])$ все слагаемые типа B. Из (3) следует, что эта подстановка обращает в нуль по модулю идеала $T(f(T(g),\dots))$ все слагаемые типа A. Поэтому в результате этой подстановки мы получим тождество $W_{r+s-1}=W_s(W_r(\bar{t}),u_2,\dots)=0$. Противоречие показывает, что либо g, либо $f([y,z],\bar{x})$ лежит в $T(\mathcal{V})$. $\square$

Для того, чтобы сформулировать результат, касающийся многообразий со свойством $\mathcal{Z}$, нам понадобится ввести несколько обозначений. Пусть H — свободная счетнопорожденная F-алгебра многообразия $\mathsf{var}\{[x,y][z,t]\}$. Обозначим через Λ множество свободных порождающих алгебры H. Для удобства элементы H будем называть многочленами.

Для произвольного одночлена $f(x_1,x_2,\dots)$ положим $S_{x_i}(f)=\{m\}$, где m — число вхождений буквы x_i в f (другими словами, степень f по x_i). Отметим, что поскольку идеал тождеств H порожден однородным многочленом $[x,y][z,t]$, степень f по x_i для любого одночлена $f\in H$ определяется однозначно. Если теперь $f(\bar x,\bar t)=f_1(\bar x,\bar t)+\dots+f_n(\bar x,\bar t)$ — сумма одночленов f_i, положим

$$S_{\bar x}(f)=\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{u\in\bar x}S_u(f_i).$$

Похожим образом для каждого многочлена f из $[H,H]$ определим $D(f)$ — множество *двусторонних степеней*. Будем для удобства называть *коммутаторными одночленами* многочлены вида $\alpha u(x,y,\bar t)[x,y]v(x,y,\bar t)$, где x,y, $\bar t$ — переменные, $u(x,y,\bar t)$, $v(x,y,\bar t)$ — слова мультипликативной полугруппы алгебры H. Пусть $f(x,\bar t)$ — коммутаторный одночлен вида $a(x,\bar t)[t_i,t_j]b(x,\bar t)$, причем $S_x(a)=\{k\}$ и $S_x(b)=\{l\}$. Тогда положим $D_x(f)=\{(k,l)\}$. Если же $f(x,\bar t)=a(x,\bar t)[x,t_i]b(x,\bar t)$ и a,b такие же, как и раньше, то положим $D_x(f)=\{(k+1,s),(k,s+1)\}$. Наконец, если

$$f(\bar x,\bar t)=f_1(\bar x,\bar t)+\dots+f_n(\bar x,\bar t)$$

— сумма коммутаторных одночленов f_i, то определим $D_{\bar x}(f)$ — *множество двусторонних степеней многочлена f по переменным $x_1,x_2,\dots$* — следующим образом:

$$D_{\bar x}(f)=\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{u\in\bar x}D_u(f_i).$$

Пусть, например, $f(x,y,z)=x[x,y]x^2+y^5[y,z]$, тогда $S_{\{x,y\}}(f)=\{4,1,0,6\}$, а $D_{\{x,y\}}(f)=\{(2,2),(1,3),(1,0),(0,1),(0,0),(6,0),(5,1)\}$.

З а м е ч а н и е. Вообще говоря, множества $S_{\bar x}(f)$ и $D_{\bar x}(f)$ определяются для f неоднозначно и зависят от конкретного его представления в виде суммы одночленов или коммутаторных одночленов. Но в дальнейшем запись вида $S_{\bar x}(f)=M$ (или $D_{\bar x}(f)=M$) будет означать для нас, что f обладает таким представлением, при котором $S_{\bar x}(f)$ (соответственно $D_{\bar x}(f)$) совпадает с множеством M. Поэтому мы сочли возможным не усложнять обозначения и не ссылаться на представление, по которому строились $S_{\bar x}(f)$ или $D_{\bar x}(f)$. При этом, правда, мы полагаем, что $D_{\bar x}(f)$ и $S_{\bar x}(f)$ для многочлена $f\in[H,H]$ выписываются по одному и тому же представлению, т.е. если $D_{\bar x}(f)=\{(i_1,j_1),\dots,(i_m,j_m)\}$, то $S_{\bar x}(f)=\{i_1+j_1,\dots,i_m+j_m\}$. Кроме того договоримся, что в любом многочлене вида $f(\bar x,[y,z])$ множество двойных степеней $D_{\bar x}(f)$ строится по представлению, в котором все коммутаторные одночлены имеют вид $u(\bar x)[y,z]v(\bar x)$.

Следующее утверждение позволяет упрощать тождества в многообразиях, удовлетворяющих свойству $\mathcal{Z}$.

Предложение 1 [9, предложение 1]. *Предположим, что $\mathcal{M}$ — многообразие F-алгебр, обладающее свойством $\mathcal{Z}$ и удовлетворяющее тождеству $[x,y][z,t]=0$.*

Пусть существенный по всем x_i многочлен $f(\bar x,\bar t)\in H$ имеет вид

$$f(\bar x,\bar t)=w(\bar x,\bar t)+\sum_i g_i(\bar x,\bar t)+\sum_i h_i(\bar x,\bar t),$$

где $h_i(\bar x,\bar t)$ — одночлены, $g_i(\bar x,\bar t)$ — коммутаторные одночлены, а $w(\bar x,\bar t)\in[H,H]$. Предположим, что при этом существуют такие конечные множества

$$A\subseteq(\mathbb{N}\cup\{0\})\times(\mathbb{N}\cup\{0\})\ \text{и}\ B\subseteq\mathbb{N}\cup\{0\},$$

что выполняются 2 *условия*:

1) $A \cap D_{\bar{x}}(w(\bar{x}, \bar{t})) = \varnothing$ *и* $B \cap S_{\bar{x}}(w(\bar{x}, \bar{t})) = \varnothing$;

2) *для любого* i *существуют такие* j *и* k, *что* $D_{x_j}(g_i) \subseteq A$ *и* $S_{x_k}(h_i) \subseteq B$.

Тогда, если $f \in T(\mathcal{M})$ *и* $w(\bar{x}, \bar{t}) \notin T(\mathcal{M})$, *в* $\mathcal{M}$ *выполняется тождество вида*

$$x^l[y, z]x^m = x^r[y, z]x^s,$$

где $(l, m) \in D_{\bar{x}}(w(\bar{x}, \bar{t}))$, *а* $(r, s) \in A$ *или* $r + s \in B$. □

Отметим, что в предложении 1 не исключаются случаи, когда одно из множеств A или B пустое. В этих случаях предполагается, что все многочлены g_i или соответственно h_i нулевые.

Напомним, что $\mathcal{V}$ — произвольное почти лиево нильпотентное многообразие алгебр.

Лемма 6. *Если многообразие* $\mathcal{V}$ *порождено нильпотентными алгебрами и удовлетворяет тождеству* $[x, y][z, t] = 0$, *то* $\mathcal{V}$ *удовлетворяет либо тождеству* $[y, z]x = 0$, *либо тождеству* $x[y, z] = 0$.

Доказательство. Предположим, что $x[y, z] \notin T(\mathcal{V})$. Тогда по лемме 2 многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет для некоторого n тождеству $W_n(\bar{x}) = h(\bar{x})$, где h — сумма многочленов вида $ux_i[x_j, x_k]v$, а u, v — одночлены, возможно, пустые. Подстановка $x_1 \mapsto [y, z]$ обращает в нуль по модулю $[x, y][z, t] = 0$ все слагаемые, в которых x_1 не попадает в коммутатор. Таким образом, после подстановки мы получим тождество

$$[y, z]x_2x_3 \cdots x_n + g(y, z, \bar{x}) = 0,$$

где $g = \sum_{i>1,j} a_{ij}x_i[y, z]b_{ij}$. По лемме 5 многообразие $\mathcal{V}$ обладает свойством $\mathcal{Z}$ и удовлетворяет условию предложения 1. Положим $w = [y, z]x_2x_3 \cdots x_n$, $A = \{(n, k) \mid n \geq 1\} \cap D_{\{x_2, x_3, \ldots, x_n\}}(g)$, $B = \varnothing$. Ясно, что $D_{\{x_2, \ldots, x_n\}}(w) = \{(0, 1)\}$ и $D_{\{x_2, \ldots, x_n\}}(w) \cap A = \varnothing$. Согласно предложению 1 многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет либо тождеству $w = 0$, либо тождеству $[y, z]x = x^r[y, z]x^s$, причем r, s — целые числа и $r \geq 1$.

Предположим сначала, что $w = 0$ — тождество многообразия $\mathcal{V}$. Пусть n — минимальное число с таким свойством, т.е. $[y, z]x_2x_3 \cdots x_{n-1} \notin T(\mathcal{V})$. Положим $g = [y, z]x_2x_3 \cdots x_{n-1}$ и $f(t, x) = tx$. Ясно, что $f(v, x) \in T(\mathcal{V})$ для любого $v \in T(g)$. Благодаря свойству $\mathcal{Z}$ имеем $f([y, z], x) \in T(\mathcal{V})$, т. е. $[y, z]x \in T(\mathcal{V})$. В этом случае лемма доказана.

Теперь предположим, что $[y, z]x = x^r[y, z]x^s$ — тождество многообразия $\mathcal{V}$. Можно считать, что $s = 0$, так как в противном случае в любой нильпотентной алгебре, а значит, и в самом многообразии $\mathcal{V}$, будет выполняться тождество $[y, z]x = 0$. Кроме того, $r \neq 1$, так как $[[y, z], x] \notin T(\mathcal{V})$. Следовательно, многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $[y, z]x = x^r[y, z]$ при $r > 1$. Далее, предполагая дополнительно, что $[y, z]x \notin T(\mathcal{V})$, и используя двойственные рассуждения, получим тождество $x[y, z] = [y, z]x^k$ при $k > 1$. Выполнение обоих этих тождеств в любой нильпотентной алгебре гарантирует выполнение двух тождеств $x[y, z] = 0$ и $[y, z]x = 0$, а значит, и включение $[[y, z], x] \in T(\mathcal{V})$. Противоречие. □

2. Алгебры над полем положительной характеристики

В этой части мы доказываем теоремы 1 и 2. До конца этого раздела мы считаем, что F — конечное или бесконечное поле характеристики $p > 0$, а $\mathcal{V}$ — почти лиево нильпотентное многообразие F-алгебр.

Лемма 7. *Если многообразие* $\mathcal{V}$ *порождено нильпотентными алгебрами, то из включения* $[y, z]x \in T(\mathcal{V})$ *следует включение* $y^px \in T(\mathcal{V})$, *а из включения* $x[y, z] \in T(\mathcal{V})$ — *включение* $xy^p \in T(\mathcal{V})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По модулю идеала $T([y,z]x)$ верны равенства

$$W_n(\bar{x}) = (-1)^n x_3 \cdots x_n [x_1, x_2] \quad \text{и} \quad (u+v)^p x = u^p x + v^p x.$$

Предположим, что $y^p x \notin T(\mathcal{V})$. Тогда по лемме 2 многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $x_3 \cdots x_n [x_1, x_2] = h(\bar{x})$, где $h(\bar{x})$ — сумма одночленов вида $ab^p c$, причем a могут быть пустыми. Подставим $[y, x_2]$ вместо x_2 в это тождество и, воспользовавшись тождеством $[y,z]x = 0$, получим $x_3 \cdots x_n x_1 [y, x_2] = \sum_i u_i [y, x_2]$, где длина каждого слова u_i больше $n-1$. Отсюда, поскольку многообразие $\mathcal{V}$ порождается нильпотентными алгебрами, оно удовлетворяет тождеству $x_3 \cdots x_n x_1 [y, x_2] = 0$ и, значит, тождеству $W_{n+1}(y, x_1, \ldots, x_n) = 0$. Противоречие. Двойственное утверждение доказывается аналогично. □

Обозначим $\mathcal{A}_p = \mathsf{var}\{[y,z]x,\ y^p x\}$.

Доказательство следующей леммы несложно, и мы его опускаем.

Лемма 8. *Алгебры $A(K_{F,p})$ и $\overleftarrow{A}(K_{F,p})$ не являются лиево нильпотентными. Алгебра $A(K_{F,p})$ лежит в многообразии $\mathcal{A}_p$, и алгебра $\overleftarrow{A}(K_{F,p})$ лежит в многообразии $\overleftarrow{\mathcal{A}}_p$.*

Лемма 9. *Каждое собственное подмногообразие в многообразии $\mathcal{A}_p$ или в многообразии $\overleftarrow{\mathcal{A}}_p$ лиево нильпотентно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{M}$ — собственное подмногообразие в многообразии $\mathcal{A}_p$. Возьмем многочлен f из $T(\mathcal{M}) \setminus T(\mathcal{A}_p)$. Нам достаточно найти следствие многочлена f вида

$$u_1^{s_1} \cdots u_m^{s_m} [y,z], \quad s_1 < p, \ldots, s_m < p, \tag{5}$$

поскольку полная линеаризация этого многочлена и многочлен $[y,z]x$ имеют в качестве следствия многочлен $W_n(\bar{x})$ при $n = (p-1)m + 2$.

Учитывая тождество Якоби и то, что $[y,z]x = 0$, имеем $x_1[u,v] = -v[x_1,u] - u[v,x_1]$. Кроме того, в многообразии $\mathcal{A}$ выполняется тождество $x_1^{p-1}[u,x_1] = u x_1^p$. Поэтому многочлен f может быть записан в виде

$$f(\bar{x}) = \sum_{\substack{\bar{k}: k_j < p, \\ j=1,\ldots,n}} \alpha_{\bar{k}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} + \sum_{\substack{i,\ \bar{s}:\, s_1 < p-1, \\ s_j < p, j=2,\ldots,n}} \beta_{i,\bar{s}} x_1^{s_1} x_2^{s_2} \cdots x_n^{s_n} [x_i, x_1] + \sum_{\substack{\bar{t}:\, t_j < p, \\ j=2,\ldots,n}} \gamma_{\bar{t}} x_2^{t_2} \cdots x_n^{t_n} x_1^p.$$

Если для некоторого $\bar{k}$ имеем $\alpha_{\bar{k}} \neq 0$, то умножим f на $[y,z]$ справа и получим

$$\sum_{\bar{k}:\, k_1 < p, \ldots, k_n < p} \alpha_{\bar{k}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} [y,z] \in T(\mathcal{M}).$$

Все степени переменных меньше p, поэтому каждая полиоднородная компонента данного многочлена принадлежит $T(\mathcal{M})$. Осталось заметить, что она вида (5).

Если $\alpha_{\bar{k}} = 0$ для всех $\bar{k}$ и $\beta_{i,\bar{s}} \neq 0$ для некоторой пары $\bar{s}$, i, то сделаем в многочлен f подстановку $x_i \mapsto x_i + [y,z]$ и соберем все слагаемые с $[y,z]$. Получим

$$\sum_{\substack{i,\ \bar{s}:\, s_1 < p-1, \\ s_j < p, j=2,\ldots,n}} \beta_{i,\bar{s}} x_1^{s_1+1} x_2^{s_2} \cdots x_n^{s_n} [y,z] \in T(\mathcal{M}).$$

Как и абзацем выше, находим многочлен вида (5).

Наконец, если все α и β равны нулю, сделаем в многочлен f подстановку $x_1 \mapsto x_1 + [y,z]$, соберем слагаемые с $[y,z]$ и получим $\sum_{\bar{t}, t_2 < p, \ldots, t_n < p} \gamma_{\bar{t}} x_2^{t_2} \cdots x_n^{t_n} x_1^{p-1} [y,z] \in T(\mathcal{M})$. Как и раньше, мы найдем в $T(\mathcal{M})$ многочлен вида (5).

Следовательно, все собственные подмногообразия в многообразии $\mathcal{A}_p$ лиево нильпотентны. Аналогично доказывается этот факт для многообразия $\overleftarrow{\mathcal{A}}_p$. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. *Необходимость.* Пусть $\mathcal{V}$ — непервичное почти лиево нильпотентное многообразие. Хорошо известно, что каждое многообразие алгебр над бесконечным полем порождается нильпотентными алгебрами. Следовательно, по леммам 4, 6, 7 многообразие $\mathcal{V}$ содержится в $\mathcal{A}_p$ или в $\overleftarrow{\mathcal{A}}_p$. По леммам 8 и 9 многообразия $\mathcal{A}_p$ и $\overleftarrow{\mathcal{A}}_p$ являются почти лиево нильпотентными. Следовательно, многообразие $\mathcal{V}$ совпадает с одним из них. Остается заметить, что любое почти лиево нильпотентное многообразие порождается любой своей алгеброй, не являющейся лиево нильпотентной. По лемме 8 в качестве таких алгебр можно взять $A(K_{F,p})$ и $\overleftarrow{A}(K_{F,p})$.

Достаточность. По лемме 8 алгебра $A(K_{F,p})$ лежит в многообразии $\mathcal{A}_p$ и не является лиево нильпотентной. Следовательно, эта алгебра согласно лемме 9 не может порождать в многообразии $\mathcal{A}_p$ собственное подмногообразие. Аналогично доказывается, что алгебра $\overleftarrow{A}(K_{F,p})$ порождает почти лиево нильпотентное многообразие. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. *Необходимость.* Пусть $\mathcal{V}$ — почти лиево нильпотентное многообразие алгебр над конечным полем F. Предположим сначала, что $\mathcal{V}$ неэнгелево. Тогда по лемме Цорна многообразие $\mathcal{V}$ содержит некоторое почти энгелево многообразие в качестве подмногообразия. Поскольку любое такое многообразие неэнгелево, а тем более не лиево нильпотентное, оно не может быть собственным подмногообразием многообразия $\mathcal{V}$, поэтому $\mathcal{V}$ является почти энгелевым многообразием алгебр. Из описания таких многообразий [9, теорема 2] следует, что $\mathcal{V}$ порождается одной из алгебр $A(F)$, $\overleftarrow{A}(F)$ или $B(F,G,\sigma)$.

Предположим теперь, что многообразие $\mathcal{V}$ непервично и энгелево. Остается показать, что в этом случае $\mathcal{V}$ порождается своими нильпотентными алгебрами. Тогда, дословно повторив рассуждение из доказательства теоремы 1, можно убедиться, что многообразие $\mathcal{V}$ порождается либо алгеброй $A(K_{F,p})$, либо алгеброй $\overleftarrow{A}(K_{F,p})$.

Итак, будучи энгелевым, многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $W_{n+1}(x,y,\dots,y)=0$. Без ограничения общности можно считать, что $n=p^t$, где p — характеристика поля F. Нетрудно проверить, что $W_{n+1}(x,y,\dots,y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^k y x^{n-k}$. Поэтому, если $n=p^t$, то $W_{n+1}(x,y,y,\dots,y)=[x,y^n]$.

Наличие тождества $[x,y^{p^t}]=0$ позволяет сделать несколько простых замечаний. Во-первых, в центре любой алгебры A из многообразия $\mathcal{V}$ содержатся все подалгебры алгебры A, являющиеся конечными полями. Во-вторых, многообразие $\mathcal{V}$ локально финитно аппроксимируемо (см., например, [6]). Следовательно, оно порождается всеми своими конечномерными алгебрами. Рассмотрим произвольную такую алгебру A. Многообразие $\mathcal{V}$ не содержит полных матричных алгебр второго порядка, поэтому $A=B+J(A)$, где B — конечная сумма конечных полей, $J(A)$ — нильпотентный радикал. Согласно первому наблюдению B содержится в центре A. Поэтому для любого k выполняется включение $W_k(A,A,\dots,A)\subseteq W_k(J(A),J(A),\dots,J(A))$.

Предположим теперь, что все нильпотентные алгебры из многообразия $\mathcal{V}$ порождают собственное, а значит, лиево нильпотентное, многообразие. Пусть оно удовлетворяет тождеству $W_k(\bar{x})=0$. Следовательно, ему удовлетворяют радикалы $J(A)$ во всех конечномерных алгебрах из многообразия $\mathcal{V}$, и, значит, этому тождеству удовлетворяют и все конечномерные алгебры A. Другими словами, $W_k(\bar{x})=0$ — тождество многообразия $\mathcal{V}$. Противоречие показывает, что многообразие $\mathcal{V}$ порождено нильпотентными алгебрами.

Достаточность. Алгебры $A(F)$, $\overleftarrow{A}(F)$ и $B(F,G,\sigma)$ являются неэнгелевыми и порождают почти коммутативные многообразия (см. [9; 12]). Это доказывает, что они порождают почти лиево нильпотентные многообразия. Как уже было замечено при доказательстве достаточности теоремы 1, каждая из алгебр $A(K_{F,p})$ и $\overleftarrow{A}(K_{F,p})$ порождает почти лиево нильпотентное многообразие. □

Выделим простое следствие лемм 8 и 9 в качестве самостоятельного утверждения.

Следствие 2. *Пусть F — конечное или бесконечное поле характеристики $p>0$. Много-*

образие $\mathsf{var}\{[y,z]x,\ y^p x\}$ *порождено алгеброй* $A(K_{F,p})$. *Многообразие* $\mathsf{var}\{x[y,z],\ xy^p\}$ *порождено алгеброй* $\overleftarrow{A}(K_{F,p})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Зельманов Е.И.** Об энгелевых алгебрах Ли // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 5. С. 112–117.
2. **Зельманов Е.И.** Решение ослабленной проблемы Бернсайда для групп нечетного показателя // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1990. Т. 54, № 1. С. 42–59.
3. **Зельманов Е.И.** Решение ослабленной проблемы Бернсайда для 2-групп // Мат. сб. 1991. Т. 182, № 4. С. 568–592.
4. **Кемер А.Р.** О нематричных многообразиях // Алгебра и логика. 1980. Т. 19, № 3. С. 255–283.
5. **Кострикин А.И.** Вокруг Бернсайда. М.: Наука, 1986. 232 с.
6. **Кублановский С.И.** О многообразиях ассоциативных алгебр с локальными условиями конечности // Алгебра и анализ. 1997. Т. 9, № 4. С. 119–174.
7. **Мальцев Ю.Н.** О многообразиях ассоциативных алгебр // Алгебра и логика. 1976. Т. 15, № 5. С. 579–584.
8. **Мальцев Ю. Н.** Почти энгелевы локально конечные многообразия ассоциативных колец // Изв. вузов. Математика. 1982. № 11. С. 41–42.
9. **Финогенова О.Б.** Многообразия ассоциативных алгебр, удовлетворяющие тождествам Энгеля // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 4. С. 482–505.
10. **Финогенова О.Б.** Почти лиево разрешимые многообразия ассоциативных алгебр конечного базисного ранга // Сиб. электрон. мат. изв. 2015. Т. 12. С. 1–6.
11. **Higgins P.J.** Lie rings satisfying the Engel condition // Proc. Cambr. Philos. Soc. 1954. Vol. 50, no. 1. P. 8–15.
12. **Mal'cev Yu. N.** Just non commutative varieties of operator algebras and rings with some conditions on nilpotent elements // Tamkang J. Math. 1996. Vol. 27, no. 1. P. 59–65.

Финогенова Ольга Борисовна
канд. физ.-мат. наук, доцент,
доцент
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: ob.finogenova@urfu.ru

Поступила 01.08.2015