ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 517.518

РАВНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ КРИВИЗНЫ ГЛАДКИХ КЛАССОВ ПЛОСКИХ КРИВЫХ[1]

Ю. Н. Субботин

Рассматриваются проблемы аппроксимации кривизны плоских кривых из гладких классов в равномерной норме кривизной элементов гладких конечномерных функциональных пространств (тригонометрические полиномы, сплайны с равномерными узлами).

Ключевые слова: кривизна, равномерная аппроксимация, гладкие классы функций, тригонометрические полиномы, сплайны с равномерными узлами, оценки аппроксимации.

Yu. N. Subbotin. Uniform approximation of curvature for smooth classes of plane curves.

We consider problems of approximation of the curvature for certain smooth classes of plane curves by the curvature of elements of smooth finite-dimensional function spaces (trigonometric polynomials, splines with equidistant knots) in the uniform norm.

Keywords: curvature, uniform approximation, classes of smooth functions, trigonometric polynomials, splines with equidistant knots, estimates of approximation error.

1. Введение

В работе рассматриваются плоские явно заданные 2π-периодические кривые (функции) $y = f(x)$ $(0 \le x \le 2\pi)$ и предполагается, что $(r-1)$-я производная функции $f(x)$ абсолютно непрерывна, а r-я производная удовлетворяет неравенству

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\le x\le 2\pi} |f^{(r)}(x)| \le 1 \quad (r \ge 3).$$

Класс таких функций обозначим W^r, $r \in \mathbb{N}$. Устанавливаются оценки погрешности аппроксимации нелинейного оператора кривизны с использованием периодических сплайнов четной и нечетной степени и равномерными узлами.

Хорошо известны результаты А. Н. Колмогорова [1] по оценкам норм промежуточных производных через норму функции и норму старшей производной. В. Н. Габушин, иногда с соавторами [2; 3] обобщал результаты А. Н. Колмогорова и некоторых других авторов на нелинейные операторы, например, на оператор кривизны.

По-видимому, проблема аппроксимации кривизны кривой

$$K(y,x) = \frac{y''(x)}{[1 + (y'(x))^2]^{3/2}}, \quad y'(x) = \frac{dy(x)}{dx}, \quad y''(x) = \frac{d^2y(x)}{dx^2}$$

впервые рассматривалась в работе Ю. Н. Субботина [4]. В ней речь шла об аппроксимации в среднеквадратической метрике кривизны 2π-периодических кривых посредством соответствующей кривизны тригонометрических полиномов или 2π-периодических сплайнов с равномерными узлами и сплайнов, удовлетворяющих краевым условиям 1-го или 2-го типа.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 14-01-00496), гранта Президента РФ (проект НШ-4538.2014.1) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства Российской Федерации, контракт № 02.A03.21.0006).

2. Основные результаты

Так как при аппроксимации кривизны кривой сама исходная функция и аппроксимирующая функция не участвуют, то для получения более точных оценок мы будем использовать для аппроксимации $y'(x)$ интерполяционный периодический сплайн $S_{r-1}(y', x, \pi/n)$ степени $(r-1)$ дефекта 1 с узлами интерполяции $k\pi/n$ $(k \in \mathbb{Z})$ и с узлами склейки в тех же точках, если $r-1$ нечетно, и в точках $\pi(2k+1)/2n$ $(k \in \mathbb{Z})$, если $r-1$ четно.

Тогда в силу результата из работы В. М. Тихомирова [5] получаем

$$\left\| y'(x) - S_{r-1}\Big(y', x, \frac{\pi}{n}\Big)\right\|_{C[0,2\pi]} \le \frac{\mathcal{K}_{r-1}}{n^{r-1}}, \quad r \ge 3, \tag{1}$$

где $\mathcal{K}_r$ — известные константы Фавара (см., например, [6–8]). Для констант Фавара справедливы неравенства

$$\frac{\pi^2}{8} = \mathcal{K}_2 < \mathcal{K}_4 < \mathcal{K}_6 < \dots < \mathcal{K}_3 < \mathcal{K}_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \mathcal{K}_r = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(r+1)k}}{(2k+1)^{r+1}}.$$

Аналогично, используя для аппроксимации $y''(x)$ сплайн $S_{r-2}(y'', x, \pi/n)$ и тот же результат из [5], имеем

$$\left\| y''(x) - S_{r-2}\Big(y'', x, \frac{\pi}{n}\Big)\right\|_{C[0,2\pi]} \le \frac{\mathcal{K}_{r-2}}{n^{r-2}}, \quad r \ge 3. \tag{2}$$

В качестве аппроксимирующей кривизны для $K(y,x)$ возьмем функцию

$$\widetilde{K}(s,x) := \frac{S_{r-2}(y'', x, \frac{\pi}{n})}{\Big[1 + S_{r-1}^2\Big(y', x, \frac{\pi}{n}\Big)\Big]^{3/2}}. \tag{3}$$

Тогда, учитывая (3), имеем неравенство

$$|K(y,x) - \widetilde{K}(s,x)| \le \left| \frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}} - \frac{y''}{\Big[1 + S_{r-1}^2\Big(y', x, \frac{\pi}{n}\Big)\Big]^{3/2}} \right| + \left| \frac{y'' - S_{r-2}(y'', x, \frac{\pi}{n})}{\Big[1 + S_{r-1}^2\Big(y', x, \frac{\pi}{n}\Big)\Big]^{3/2}} \right|$$

$$\le \left\| y'' - S_{r-2}\Big(y'', x, \frac{\pi}{n}\Big)\right\| + |y''| \left| \frac{\Big[1 + S_{r-1}^2\Big(y', x, \frac{\pi}{n}\Big)\Big]^{3/2} - [1+(y')^2]^{3/2}}{[1+(y')^2]^{3/2}\Big[1 + S_{r-1}^2\Big(y', x, \frac{\pi}{n}\Big)\Big]^{3/2}} \right|. \tag{4}$$

Далее положим $|y'(x)| = u \ge 0$, $|S_{r-1}(y', x, \pi/n)| = v \ge 0$, тогда после домножения числителя и знаменателя второго слагаемого в правой части неравенства (4) на $[1+S_{r-1}^2(y', x, \pi/n)]^{3/2} + [1+(y')^2]^{3/2}$ из (4), (1) и (2) вытекает неравенство

$$|K(y,x) - \widetilde{K}(s,x)| \le \left| y''(x) - S_{r-2}\Big(y'', x, \frac{\pi}{n}\Big)\right| + |y''(x)| \left| y'(x) - S_{r-1}\Big(y', x, \frac{\pi}{n}\Big)\right| J(u,v), \tag{5}$$

где

$$J(u,v) = \frac{(u+v)[(1+u^2)^2 + (1+u^2)(1+v^2) + (1+v^2)^2]}{(1+u^2)^{3/2}(1+v^2)^{3/2}\{(1+u^2)^{3/2} + (1+v^2)^{3/2}\}}. \tag{6}$$

Из неравенства Бора [7] при $n = 1$ для 2π-периодической функции $y''(x)$, со средним значением, равным нулю и удовлетворяющей условию $|y^{(r)}(x)| \le 1$, имеем (см. также [8])

$$\|y''\|_{C[0,2\pi]} \le \mathcal{K}_{r-2} \quad (r \ge 3). \tag{7}$$

Из (5)–(7), (1) и (2) следует, что

$$|K(y,x) - \widetilde{K}(s,x)| \le \frac{\mathcal{K}_{r-2}}{n^{r-2}} + \mathcal{K}_{r-2}\ J(u,v)\frac{\mathcal{K}_{r-1}}{n^{r-1}}. \tag{8}$$

Оценим $J(u,v)$ при $0 \le u, v < \infty$, преобразовав (6) к виду

$$J(u,v) = \frac{u+v}{(1+u^2)(1+v^2)} \cdot \frac{(1+u^2)^2 + (1+u^2)(1+v^2) + (1+v^2)^2}{(1+u^2)^2(1+v^2)^{1/2} + (1+u^2)^{1/2}(1+v^2)^2}.$$

Имеем

$$\frac{(1+u^2)^2 + (1+u^2)(1+v^2) + (1+v^2)^2}{(1+u^2)^2(1+v^2)^{1/2} + (1+u^2)^{1/2}(1+v^2)^2}$$

$$= \frac{(1+u^2)^2 + (1+v^2)^2}{(1+u^2)^2(1+v^2)^{1/2} + (1+u^2)^{1/2}(1+v^2)^2} + \frac{(1+u^2)(1+v^2)}{(1+u^2)^2(1+v^2)^{1/2} + (1+u^2)^{1/2}(1+v^2)^2}$$

$$\le 1 + \frac{(1+u^2)(1+v^2)}{(1+u^2)^2 + (1+v^2)^2} \le 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Таким образом, $J(u,v) \le (3/2) \cdot (u+v)/((1+u^2)(1+v^2))$ $(0 \le v \le u < \infty)$. В силу симметрии $J(u,v) = J(v,u)$ аналогичное неравенство имеет место при $0 \le u \le v < \infty$.

Найдем точки, подозрительные на экстремум функции $\varphi(u,v) = (u+v)/((1+u^2)(1+v^2))$ в области $0 < u, v < \infty$. Имеем

$$\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u} = \frac{1-u^2-2uv}{(1+v^2)(1+u^2)^2} = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v} = \frac{1-v^2-2uv}{(1+v^2)^2(1+u^2)} = 0.$$

Отсюда $1-u^2-2uv = 0,\ 1-v^2-2uv = 0$, и единственной точкой, подозрительной на экстремум в области $0 < u, v < \infty$, является точка $u = v = \sqrt{3}/3$. В этой точке $\varphi(\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3) = (2\sqrt{3} \cdot 3^2)/(3 \cdot 16) = 3\sqrt{3}/8$, и, следовательно,

$$J\Big(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\Big) \le \frac{9\sqrt{3}}{16}.$$

Исследуем поведение функции $\varphi(u,v)$ на границе $v = 0$. Имеем $\varphi(u,0) = u/(1+u^2) \le 1/2$ и $J(u,0) \le (3/2)\varphi(u,0) \le 3/4,\ 0 \le u < \infty$. В силу отмеченной симметрии функций $J(u,v),\ \varphi(u,v)$, аналогичные неравенства имеет место и для $J(0,v),\ \varphi(0,v),\ 0 \le v < \infty$, а $J(u,v) \to 0$ при $u^2+v^2 \to \infty$.

Так как функция $\varphi(u,v)$ неотрицательна и во внутренней области $0 < u, v < \infty$ имеется единственная точка, подозрительная на экстремум, а значения $\varphi(u,v)$ на границе области: $u = 0,\ 0 \le v < \infty;\ v = 0,\ 0 \le u < \infty$ меньше, чем значение во внутренней точке, подозрительной на экстремум, и $\varphi(u,v) \to 0$ при $u^2+v^2 \to \infty$, то $J(u,v) \le (3/2)\varphi(\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3) = 9\sqrt{3}/16$.

Лемма. $J(u,v) \le 9\sqrt{3}/16,\ 0 \le u, v \le \infty$. *В частности,* $J(u,v) < 1,\ 0 \le u, v \le \infty$.

Из (1), (2), (8) и леммы вытекает следующее утверждение.

Теорема. *Справедлива оценка*

$$|K(y,x) - \widetilde{K}(s,x)| \le \frac{\mathcal{K}_{r-2}}{n^{r-2}} + \frac{\mathcal{K}_{r-2}\mathcal{K}_{r-1}}{n^{r-1}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Колмогоров А.Н.** О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале // Уч. зап. МГУ. 1939. Т. 30. С. 3–16.
2. **Габушин В.Н., Жильцова О.Ю.** Оценка кривизны различных классов кривых // Проблемы физико-математического образования в педагогических вузах на современном этапе: тез. докл. Магнитогорск, 1996. С. 90.
3. **Габушин В.Н.** Оценки некоторых нелинейных функционалов // Изв. ТулГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2006. Т. 12, вып. 1. С. 67–73.
4. **Субботин Ю.Н.** Аппроксимация кривизны гладких классов плоских кривых элементами конечномерных подпространств // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2012. Вып. 3. С. 41–47.
5. **Тихомиров В.М.** Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, вып. 3 (93). С. 81–120.
6. Exposition of the lectures by S. B. Stechkin on approximation theory / V. V. Arestov, V. I. Berdyshev, N. I. Chernykh, T. V. Demina, N. N. Kholschevnikova, S. V. Konyagin, Yu. N. Subbotin, S. A. Telyakovskii, I. G. Tsar'kov, V. A. Yudin // Eurasian Math. 2011. Vol. 2, no. 4. P. 5–155.
7. **Bohr H.** Un theoreme generale sur l'integration d'un polinóme trigonometric // C.R. Acad. Sci. Paris. 1935. Vol. 200. P. 1276–1277.
8. **Ахиезер Н.И.** Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука. 1965. 407 с.

Субботин Юрий Николаевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
гл. науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета им. Б. Н. Ельцина
e-mail: yunsub@imm.uran.ru

Поступила 30.06.2015