ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 519.65

О РАВНОМЕРНЫХ КОНСТАНТАХ ЛЕБЕГА ЛОКАЛЬНЫХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СПЛАЙНОВ С РАВНООТСТОЯЩИМИ УЗЛАМИ[1]

Е. В. Стрелкова, В. Т. Шевалдин

Для линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}_r$ произвольного порядка r с постоянными коэффициентами, характеристический многочлен которого имеет только действительные и попарно различные корни, изучаются константы Лебега (нормы линейных операторов из C в C) локальных экспоненциальных сплайнов с равномерным расположением узлов, соответствующих этому оператору, построенных авторами в предыдущих работах. В частности, для оператора $\mathcal{L}_3 = D(D^2 - \beta^2)$ $(\beta > 0)$ третьего порядка вычислены точно константы Лебега для двух видов локальных сплайнов, и произведено их сравнение с константами Лебега интерполяционных экспоненциальных сплайнов.

Ключевые слова: константы Лебега, экспоненциальные сплайны, линейный дифференциальный оператор.

E. V. Strelkova, V. T Shevaldin. On uniform Lebesgue constants of local exponential splines with equidistant knots.

For a linear differential operator $\mathcal{L}_r$ of arbitrary order r with constant coefficients and real pairwise different roots of the characteristic polynomial, we study Lebesgue constants (the norms of linear operators from C to C) of local exponential splines corresponding to this operator with a uniform arrangement of knots; such splines were constructed by the authors in earlier papers. In particular, for the third-order operator $\mathcal{L}_3 = D(D^2-\beta^2)$ $(\beta > 0)$, we find the exact values of Lebesgue constants for two types of local splines and compare these values with Lebesgue constants of exponential interpolation splines.

Keywords: Lebesgue constants, exponential splines, linear differential operator.

Введение

Вначале кратко изложим известные результаты (см. [1]), касающиеся существования и единственности интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов на всей числовой оси.

Пусть $\mathcal{L}_r = \mathcal{L}_r(D)$ $(r \in \mathbb{N},\ D$ — символ дифференцирования) — произвольный линейный дифференциальный оператор r-го порядка с постоянными действительными коэффициентами (старший коэффициент полагаем равным 1). Он может быть записан в виде

$$\mathcal{L}_r = \mathcal{L}_r(D) = \prod_{s=1}^{k}(D^2 - 2\gamma_s D + \gamma_s^2 + \alpha_s^2) \prod_{j=1}^{r-2k}(D - \beta_j), \tag{0.1}$$

где α_s, β_j и γ_s — некоторые действительные числа (при $k = 0$ первое произведение в этом равенстве отсутствует), причем можно считать, что $\alpha_s > 0$ $(s = \overline{1,k})$. Нам понадобится также оператор

$$\mathcal{L}_{r+1}(D) = D\mathcal{L}_r(D).$$

Пусть

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_{r+1}} f(x) = (T - E) \prod_{s=1}^{k}(T^2 - 2Te^{\gamma_s h}\cos\alpha_s h + e^{2\gamma_s h}E) \prod_{j=1}^{r-2k}(T - e^{\beta_j h}E) f(x)$$

[1]Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

— обобщенная конечная разность с шагом $h > 0$, соответствующая оператору $\mathcal{L}_{r+1}$, определенная на множестве функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Здесь $Tf(x) = f(x+h)$ и E — тождественный оператор. Ее можно привести к виду

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_{r+1}} f(x) = \sum_{s=0}^{r+1} (-1)^{r+1-s} \mu_s^{(r+1)} f(x+sh),$$

где $\mu_s^{(r+1)}$ $(s = \overline{0, r+1})$ — коэффициенты при степенях x в многочлене

$$p_{r+1}(x) = (x-1) \prod_{s=1}^{k} (x^2 - 2xe^{\gamma_s h} \cos \alpha_s h + e^{2\gamma_s h}) \prod_{j=1}^{r-2k} (x - e^{\beta_j h}).$$

Пусть φ_{r+1} — решение линейного однородного дифференциального уравнения $\mathcal{L}_{r+1}(D)f = 0$, удовлетворяющее условиям $\varphi_{r+1}^{(j)}(0) = \delta_{j,r}$ $(j = \overline{0, r})$, где $\delta_{j,r}$ — символ Кронекера. Введем функцию

$$R_{r+1}(t) = \sum_{j=0}^{r+1} (-1)^j \sum_{s=j}^{r+1} (-1)^{r+1-s} \mu_s^{(r+1)} \varphi_{r+1}((s-1+j-t)h) \quad (0 \le t \le 1).$$

Из [1] следует, что эта функция удовлетворяет равенству $R_{r+1}(1) = -R_{r+1}(0)$. Кроме того, в [1] доказано, что при $0 < h < h_0 = \pi / \max_{1 \le s \le k} \alpha_s$ эта функция на полуинтервале $[0;1)$ имеет только одну точку экстремума (обозначим ее через θ_1) и ровно один нуль (обозначим его через θ_2), причем этот нуль простой. Пусть $S(\mathcal{L}_{r+1}, \alpha)$ — множество $\mathcal{L}$-сплайнов $S \in C^{(r-1)}(\mathbb{R})$ порядка $r+1$ (минимального дефекта), соответствующих оператору $\mathcal{L}_{r+1}$, с равномерными узлами $(l+\alpha)h$ $(l \in \mathbb{Z})$, где α — фиксированное число, $0 \le \alpha < 1$. То есть любая функция $S \in S(\mathcal{L}_{r+1}, \alpha)$ такова, что функция $S^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывна и для любого $l \in \mathbb{Z}$ имеет место равенство

$$\mathcal{L}_r(D) S((l-1)h + t) = Z_l, \quad \alpha h \le t < (\alpha+1)h,$$

где Z_l — некоторые константы. Сетка узлов $\{(l+\alpha)h\}_{l \in \mathbb{Z}}$ называется сеткой узлов сплайна S. Пусть $M > 0$ и

$$Y = \{y = \{y_l\}_{l \in \mathbb{Z}} \colon \sup_l |\Delta_h^{\mathcal{L}_r} y_l| \le M\},$$

где

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_r} y_l = \prod_{s=1}^{k} (T^2 - 2Te^{\gamma_s h} \cos \alpha_s h + e^{2\gamma_s h} E) \prod_{j=1}^{r-2k} (T - e^{\beta_j h} E) y_l$$

— обобщенная конечная разность с шагом $h > 0$, соответствующая оператору $\mathcal{L}_r$, определенная на пространстве последовательностей $\{y_l\}_{l \in \mathbb{Z}}$ (при этом $Ty_l = y_{l+1}$).

Теорема A [1; 2]. *Пусть $0 < h < h_0 = \pi / \max_{1 \le s \le k} \alpha_s$. Для любой последовательности $y \in Y$ существует только один $\mathcal{L}$-сплайн $S \in S(\mathcal{L}_{r+1}, \alpha)$, удовлетворяющий условиям*

$$S(lh) = y_l \quad (l \in \mathbb{Z}), \tag{0.2}$$

тогда и только тогда, когда $\alpha \ne \theta_2$.

Для оператора $\mathcal{L}_r = D^r$ (приводящего к интерполяционным полиномиальным сплайнам на всей оси $\mathbb{R}$) теорема A установлена Дж. Албергом, Э. Нильсоном и Дж. Уолшем [3] и Ю. Н. Субботиным [4]. В случае оператора $\mathcal{L}_r = \prod_{j=1}^{r} (D - \beta_j)$ (т.е. при $k = 0$) теорема A доказана Ч. Мичелли [5] (другое доказательство предложил И. Шенберг [6]). Отметим, что в [2] получены и более общие результаты в задачах существования и единственности обобщенных интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов, указано их применение в ряде экстремальных задач теории приближения функций и приведена более полная библиография по данной тематике.

Поскольку из [1] следует, что при $0 < h < h_0 = \pi/\max_{1\le s\le k}\alpha_s$ числа θ_1 и θ_2 не совпадают, то согласно теореме A на полуинтервале $[0;1)$ существует ровно одна "плохая" точка $\alpha = \theta_2$, в которой задача интерполяции (0.2) неразрешима. Возникает естественный вопрос: а какая из остальных точек полуинтервала $[0;1)$ предпочтительнее остальных? Последующие исследования, в частности, второго автора [7] и С. И. Новикова [8] показали, что такой точкой является $\alpha = \theta_1$. Следует отметить, что если оператор $\mathcal{L}_r$ является формально самосопряженным (т. е. удовлетворяет равенству $\mathcal{L}_r(-D) = (-1)^r\mathcal{L}_r(D)$), то при четном $r:\theta_1 = 1/2,\ \theta_2 = 0$, а при нечетном $r:\theta_1 = 0,\ \theta_2 = 1/2$.

Для функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ положим $y_l = f(lh)$ $(l\in\mathbb{Z})$. Интерполяционный $\mathcal{L}$-сплайн $S(x) = S(f,x)\in S(\mathcal{L}_{r+1},\alpha)$ задает линейный метод аппроксимации функции f на оси $\mathbb{R}$. Одной из характеристик устойчивости метода S является поведение равномерной нормы оператора S (как оператора, действующего из пространства C непрерывных на всей оси $\mathbb{R}$ функций в C), а именно, величины

$$L_1 = L_1(\mathcal{L}_{r+1},\alpha) = \|S\|_C^C = \sup_{\|f\|_C\le 1}\|S(f,\cdot)\|_C.$$

Число L_1 называется константой Лебега метода S. Важной задачей является ее вычисление при любом $\alpha\ne\theta_2$. Чем меньше такая константа, тем больше устойчивость сплайна к изменению аппроксимативных условий.

Для интерполяционных полиномиальных сплайнов (т. е. в случае оператора $\mathcal{L}_{r+1} = D^{r+1}$) с выбором $\alpha = 0$, если r нечетно, и $\alpha = 1/2$, если r четно, различными вопросами, связанными с вычислением или оценкой сверху констант Лебега $L_1(D^{r+1},\alpha)$ (как в случае периодических функций, так и в непериодическом случае) занимались многие математики: Ф. Шурер и Е. В. Чини [9], А. А. Женсыкбаев [10], Ф. Ричардс [11], Ю. Н. Субботин и С. А. Теляковский [12; 13] и др. Для интерполяционных полиномиальных сплайнов на оси $\mathbb{R}$ выделим утверждение, полученное Ф. Ричардсом в 1975 году.

Теорема B [11]. *Пусть $\alpha = 0$, если r нечетно, и $\alpha = 1/2$, если r четно. Тогда имеет место асимптотическое равенство*

$$L_1(D^{r+1},\alpha) = \frac{2}{\pi}\ln r + \frac{4}{\pi}\Big(\ln\frac{4}{\pi} + \frac{\gamma}{2}\Big) + o(1) \quad (r\to\infty),$$

где γ — постоянная Эйлера. Кроме того, $L_1(D^3,1/2) = \sqrt{2}$.

Для $\mathcal{L}$-сплайнов с равномерными узлами задачи нахождения или оценки констант Лебега рассматривались для линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, характеристические многочлены которых имели только действительные корни, и обязательно при $\alpha = \theta_1$ (см. [14–19]). Для линейного формально самосопряженного дифференциального оператора вида

$$\mathcal{L}_{2m+1} = \mathcal{L}_{2m+1}(D) = D\prod_{j=1}^{m}(D^2-\beta_j^2), \quad \beta_j\in\mathbb{R},$$

Х. Г. Морше [15] и В. А. Ким [18] нашли два явных выражения для величины $L_1(D^{2m+1},1/2)$, отличающиеся по форме записи. При этом Х. Г. Морше был получен аналог теоремы B.

Теорема C [15]. *Пусть*

$$\tau_m = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\beta_j^2+\pi^2}.$$

Тогда в случае, если $\tau_m\to\infty$ (при $m\to\infty$), имеет место асимптотическое равенство

$$L_1\Big(\mathcal{L}_{2m+1},\frac{1}{2}\Big) = \frac{2}{\pi}\Big(\ln\tau_m + \ln\frac{8}{\pi} + \gamma\Big) + O(\tau_m^{-2}) \quad (m\to\infty).$$

Если же последовательность $\{\tau_m\}_{m=1}^{\infty}$ *сходится, то последовательность констант Лебега* $L_1(\mathcal{L}_{2m+1}, 1/2)$ *тоже сходится.*

В настоящей работе мы начинаем исследование констант Лебега неинтерполяционных локальных $\mathcal{L}$-сплайнов с равномерными узлами, построенных авторами в предыдущих работах (см., например, [20; 21] и определения в следующих разделах) в случае, когда характеристический многочлен соответствующего линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}$ имеет только действительные и попарно различные корни. Такие $\mathcal{L}$-сплайны называются экспоненциальными. Для них нам не удалось получить аналоги теорем B и C. В разд. 1 (см. далее теорему 1) доказано, что константы Лебега локальных экспоненциальных сплайнов (см. определения ниже) ограничены при $h \to 0$. Кроме того, в разд. 2 и 3 в случае оператора $\mathcal{L}_3(D) = D(D^2 - \beta^2)$ такие константы Лебега вычислены только для двух видов локальных экспоненциальных сплайнов. В данной работе развиты результаты авторов для параболических локальных сплайнов, полученные в [22].

1. Локальные экспоненциальные сплайны произвольного порядка

Вначале кратко изложим общую схему построения локальных экспоненциальных сплайнов с равноотстоящими узлами (см. [20; 21]).

Пусть $\mathcal{L}_r = \mathcal{L}_r(D)$ — линейный дифференциальный оператор r-го порядка вида (0.1), у которого все корни характеристического многочлена являются действительными (в определении (0.1) полагаем $k = 0$) и попарно различными ($\beta_j \neq \beta_s$, если $s \neq j$). Такой оператор записывается в виде

$$\mathcal{L}_r = \mathcal{L}_r(D) = \prod_{j=1}^{r}(D - \beta_j). \tag{1.1}$$

Обобщенная конечная разность $\Delta_h^{\mathcal{L}_r} f(x)$, определенная на множестве функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, соответствующая оператору $\mathcal{L}_r$ (она обращается в нуль на функциях из ядра этого оператора), представляется в виде

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_r} f(x) = \prod_{j=1}^{r}(T - e^{\beta_j h}E) f(x) = \sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\mu_s^{(r)} f(x + sh),$$

где $\mu_r^{(r)} = 1,\ \mu_{r-1}^{(r)} = \sum_{j=1}^{r} e^{\beta_j h}, \ldots, \mu_0^{(r)} = \prod_{j=1}^{r} e^{\beta_j h}$. Пусть φ_r — решение линейного однородного уравнения $\mathcal{L}_r(D)f = 0$, удовлетворяющее условиям $\varphi_r^{(j)}(0) = \delta_{j,r-1}$ $(j = \overline{0, r-1})$. B-$\mathcal{L}$-сплайн $B(x) = B_{\mathcal{L}_r}(x)$ (базисный сплайн для оператора $\mathcal{L}_r$) с носителем $\operatorname{supp} B_{\mathcal{L}_r} = [0; rh]$ и узлами $0, h, 2h, \ldots, rh$ определяется формулой

$$B(x) = B_{\mathcal{L}_r}(x) = \Delta_h^{\mathcal{L}_r} \varphi_r((x - rh)_+), \tag{1.2}$$

где $t_+ = \max\{0, t\}$. Для произвольного числа $\alpha : 0 \le \alpha < 1$ и любой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ положим

$$y_{j+\alpha} = f((j + \alpha)h) \quad (j \in \mathbb{Z})$$

и рассмотрим систему функционалов

$$I_j = I_j(\alpha) = c_1 y_{j+\alpha} + c_2 y_{j+\alpha+1} + \cdots + c_r y_{j+\alpha+r-1} \quad (j \in \mathbb{Z},\ c_s \in \mathbb{R}\ (s = \overline{1, r})).$$

Локальный экспоненциальный сплайн, задающий линейный метод приближения функции f, определяется формулой

$$S_{\mathcal{L}_r}(x) = S_{\mathcal{L}_r}(f, x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} I_j B_{\mathcal{L}_r}(x - jh) \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{1.3}$$

Таким образом, сетка узлов $\{(j+\alpha)h\}_{j\in\mathbb{Z}}$ функции f, для которой строится аппроксимирующий ее сплайн, сдвинута на величину αh относительно сетки узлов $\{jh\}_{j\in\mathbb{Z}}$ самого сплайна $S_{\mathcal{L}_r}$. Неизвестные числа c_s $(s=\overline{1,r})$ выбираются таким образом, чтобы имели место следующие равенства:

$$S_{\mathcal{L}_r}(e^{\beta_j\cdot},x)=e^{\beta_j x},\quad j=\overline{1,r}\quad (x\in\mathbb{R}).$$

В [20] установлено, что если все действительные числа β_j $(j=\overline{1,r})$ попарно различны, то для любого числа $\alpha: 0\le\alpha<1$ такой выбор может быть осуществлен единственным образом, причем для определения чисел c_s $(s=\overline{1,r})$ указана невырожденная система r линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{s=1}^{r}c_s e^{\beta_j(s-1)h}=e^{\beta_j(r-1-\alpha)h}\prod_{\substack{k=1\\k\ne j}}^{r}\frac{\beta_j-\beta_k}{e^{\beta_j h}-e^{\beta_k h}}\quad (j=\overline{1,r}).\tag{1.4}$$

Построенные локальные экспоненциальные сплайны обладают хорошими аппроксимативными, формосохраняющими и сглаживающими свойствами [20], несмотря на то что они не являются интерполяционными (т. е. $S_{\mathcal{L}_r}((j+\alpha)h)\ne f((j+\alpha)h)$ $(j\in\mathbb{Z})$). Рассматривая $S_{\mathcal{L}_r}$ как оператор, действующий из пространства C непрерывных на всей оси функций в пространство C, определим его равномерную норму при помощи равенства

$$L_2=L_2(\mathcal{L}_r,\alpha)=\|S_{\mathcal{L}_r}\|_C^C=\sup_{\|f\|_C\le 1}\|S_{\mathcal{L}_r}(f,\cdot)\|_C.$$

Величину $L_2(\mathcal{L}_r,\alpha)$ будем называть константой Лебега локального экспоненциального сплайна $S_{\mathcal{L}_r}(f,x)$ и поставим вопрос о ее точном вычислении или оценке сверху.

Теорема 1. *Пусть числа β_j $(j=\overline{1,r})$ действительны и попарно различны. Тогда для любого $\alpha: 0\le\alpha<1$ имеет место равенство*

$$L_2(\mathcal{L}_r,\alpha)=O(1)\quad (h\to 0).$$

Доказательство. В [21, теорема 1.6] было доказано следующее равенство:

$$\max_{x\in[0;rh]}|B_{\mathcal{L}_r}(x)|=O(h^{r-1})\quad (h\to 0).$$

Е. Г. Пыткеев [23, теорема 1] доказал, что

$$c_s=c_s(h)=O(h^{-(r-1)})\quad (h\to 0).$$

Поэтому из определения (1.3) сплайна $S_{\mathcal{L}_3}(f,x)$ выводим равенство

$$\|S_{\mathcal{L}_r}\|_C^C=O(1)\quad (h\to 0).$$

Теорема 1 доказана. □

Замечание 1. Интересно выяснить поведение величин $L_2(\mathcal{L}_r,\alpha)$ при $r\to\infty$ и сравнить полученные результаты с утверждениями теорем B и C.

2. Локальные экспоненциальные сплайны оператора $\mathcal{L}_3(D)=D(D^2-\beta^2)$ $(\beta>0)$, сохраняющие его ядро

В данном разделе сохраним обозначения разд. 1 и в равенстве (1.1) положим $r=3$, $\beta_1=0$, $\beta_2=\beta$, $\beta_3=-\beta$ $(\beta>0)$, и пусть $\alpha=1/2$.

Теорема 2. *Для оператора* $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_3(D) = D(D^2 - \beta^2)$ $(\beta > 0)$ *имеет место равенство*

$$L_2\Big(\mathcal{L}_3, \frac{1}{2}\Big) = \frac{e^{2\beta h} + 2e^{\frac{3}{2}\beta h} + 4e^{\beta h} + 2e^{\frac{\beta h}{2}} + 1}{(e^{\frac{\beta h}{2}} + 1)^2(1 + e^{\beta h})}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для оператора $\mathcal{L}_3(D)$ функции из разд. 1 имеют следующий вид:

$$\varphi_3(x) = \frac{1}{\beta^2}(\operatorname{ch}\beta x - 1),$$

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_3} f(x) = f(x+3h) - (1 + e^{\beta h} + e^{-\beta h}) f(x+2h) + (1 + e^{\beta h} + e^{-\beta h}) f(x+h) - f(x),$$

$$B_{\mathcal{L}_3}(x) = \frac{1}{\beta^2}\begin{cases} \operatorname{ch}\beta x - 1, & x \in [0; h], \\ 2\operatorname{ch}\beta h - \dfrac{e^{\beta(x-h)}(1 + e^{-\beta h}) + e^{-\beta(x-h)}(1 + e^{\beta h})}{2}, & x \in [h; 2h], \\ \operatorname{ch}\beta(x - 3h) - 1, & x \in [2h; 3h], \end{cases} \tag{2.1}$$

причем

$$\max_{x \in [0;3h]} B_{\mathcal{L}_3}(x) = B_{\mathcal{L}_3}\Big(\frac{3h}{2}\Big) = \frac{(e^{\frac{\beta h}{2}} - 1)^2(1 + e^{\frac{\beta h}{2}} + e^{\beta h})}{\beta^2 e^{\beta h}}.$$

Решая систему (1.4) линейных алгебраических уравнений при $\alpha = 1/2$, выводим следующие равенства (см. [24]):

$$c_1 = c_3 = -\frac{\beta^2 e^{2\beta h}(e^{\frac{\beta h}{2}} - 1)^2}{(e^{\beta h} - 1)^4(1 + e^{\beta h})},$$

$$c_2 = \frac{\beta^2 e^{\beta h}(e^{\frac{\beta h}{2}} - 1)^2(e^{2\beta h} + 2e^{\frac{3}{2}\beta h} + 4e^{\beta h} + 2e^{\frac{\beta h}{2}} + 1)}{(e^{\beta h} - 1)^4(1 + e^{\beta h})}.$$

Положим $x = t + 3h/2$ и $\widetilde{B}_{\mathcal{L}_3}(t) = B_{\mathcal{L}_3}(x - 3h/2)$. Тогда носитель $\operatorname{supp}\widetilde{B}_{\mathcal{L}_3} = [-3h/2; 3h/2]$, и при $t \in [(l-1/2)h; (l+1/2)h]$ $(l \in \mathbb{Z})$ формула (1.3) может быть записана в виде

$$\widetilde{S}_{\mathcal{L}_3}(t) = S_{\mathcal{L}_3}\Big(f, t + \frac{3h}{2}\Big) = \widetilde{I}_{l-1}\widetilde{B}_{\mathcal{L}_3}(t - (l-1)h) + \widetilde{I}_l\widetilde{B}_{\mathcal{L}_3}(t - lh) + \widetilde{I}_{l+1}\widetilde{B}_{\mathcal{L}_3}(t - (l+1)h), \tag{2.2}$$

где $\widetilde{I}_l = c_1\widetilde{y}_{l-1} + c_2\widetilde{y}_l + c_3\widetilde{y}_{l+1}$, $\widetilde{y}_l = f(lh)$ $(l \in \mathbb{Z})$. Следовательно, с учетом (2.1) при $t \in [(l-1/2)h; (l+1/2)h]$ $(l \in \mathbb{Z})$ имеем

$$\widetilde{S}_{\mathcal{L}_3}(t) = \frac{1}{\beta^2}\Big\{(c_1\widetilde{y}_{l-2} + c_2\widetilde{y}_{l-1} + c_3\widetilde{y}_l)\Big(\operatorname{ch}\beta\Big(t - (l-1)h - \frac{3h}{2}\Big) - 1\Big)$$

$$+ (c_1\widetilde{y}_{l-1} + c_2\widetilde{y}_l + c_3\widetilde{y}_{l+1})\Big(2\operatorname{ch}\beta h - \frac{(1 + e^{-\beta h})e^{\beta(t - lh + \frac{h}{2})}}{2} - \frac{(1 + e^{\beta h})e^{-\beta(t - lh + \frac{h}{2})}}{2}\Big)$$

$$+ (c_1\widetilde{y}_l + c_2\widetilde{y}_{l+1} + c_3\widetilde{y}_{l+2})\Big(\operatorname{ch}\beta\Big(t - (l+1)h + \frac{3h}{2}\Big) - 1\Big)\Big\}.$$

Для доказательства теоремы 2 можно, не ограничивая общности, положить $l = 0$ и считать, что $|y_j| \le 1$ $(j \in \mathbb{Z})$. Тогда при $t \in [-h/2; h/2]$ функция $\widetilde{S}_{\mathcal{L}_3}(t)$ может быть представлена в виде

$$\widetilde{S}_{\mathcal{L}_3}(t) = \frac{e^{\beta h}(e^{\frac{\beta h}{2}} - 1)^2}{(e^{\beta h} - 1)^4(1 + e^{\beta h})}\big\{\widetilde{y}_{-2}q_1(t) + \widetilde{y}_{-1}q_2(t) + \widetilde{y}_0 q_3(t) + \widetilde{y}_1 q_4(t) + \widetilde{y}_2 q_5(t)\big\}, \tag{2.3}$$

где

$$q_1(t) = -e^{\beta h}\Big(\operatorname{ch}\beta\Big(t - \frac{h}{2}\Big) - 1\Big),$$

$$q_2(t) = (e^{2\beta h} + 2e^{\frac{3}{2}\beta h} + 4e^{\beta h} + 2e^{\frac{\beta h}{2}} + 1)\Big(\operatorname{ch}\beta\Big(t - \frac{h}{2}\Big) - 1\Big)$$

$$- e^{\beta h}\Big(2\operatorname{ch}\beta h - \frac{e^{\beta(t+\frac{h}{2})} + e^{\beta(t-\frac{h}{2})} + e^{-\beta(t+\frac{h}{2})} + e^{-\beta(t-\frac{h}{2})}}{2}\Big),$$

$$q_3(t) = (e^{2\beta h} + 2e^{\frac{3}{2}\beta h} + 4e^{\beta h} + 2e^{\frac{\beta h}{2}} + 1)\Big(2\operatorname{ch}\beta h - \frac{e^{\beta(t+\frac{h}{2})} + e^{\beta(t-\frac{h}{2})} + e^{-\beta(t+\frac{h}{2})} + e^{-\beta(t-\frac{h}{2})}}{2}\Big)$$

$$- e^{\beta h}\Big(\operatorname{ch}\beta\Big(t - \frac{h}{2}\Big) - 1\Big) - e^{\beta h}\Big(\operatorname{ch}\beta\Big(t + \frac{h}{2}\Big) - 1\Big),$$

$$q_4(t) = (e^{2\beta h} + 2e^{\frac{3}{2}\beta h} + 4e^{\beta h} + 2e^{\frac{\beta h}{2}} + 1)\Big(\operatorname{ch}\beta\Big(t + \frac{h}{2}\Big) - 1\Big)$$

$$- e^{\beta h}\Big(2\operatorname{ch}\beta h - \frac{e^{\beta(t+\frac{h}{2})} + e^{\beta(t-\frac{h}{2})} + e^{-\beta(t+\frac{h}{2})} + e^{-\beta(t-\frac{h}{2})}}{2}\Big),$$

$$q_5(t) = -e^{\beta h}\Big(\operatorname{ch}\beta\Big(t + \frac{h}{2}\Big) - 1\Big).$$

Для любой непрерывной на всей числовой оси $\mathbb{R}$ функции f такой, что $\|f\|_C \le 1$, из (2.3) выводим оценку

$$|\widetilde{S}_{\mathcal{L}_3}(t)| \le \frac{e^{\beta h}(e^{\frac{\beta h}{2}} - 1)^2}{(e^{\beta h} - 1)^4(1 + e^{\beta h})}\big\{|q_1| + |q_2| + |q_3| + |q_4| + |q_5|\big\}, \quad t \in \Big[-\frac{h}{2}; \frac{h}{2}\Big]. \tag{2.4}$$

Таким образом, доказательство теоремы 2 сводится к изучению знаков функций $q_s(t)$ $(s = \overline{1,5})$ на отрезке $[-h/2; h/2]$. Ясно, что

$$q_1(t) \le 0, \quad q_5(t) \le 0 \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Исследуем функцию $q_2(t)$ при $-h/2 \le t \le h/2$. Представим эту функцию в виде

$$q_2(t) = A_1 e^{\beta t} + C_1 e^{-\beta t} + B_1 = e^{-\beta t}(A_1\tau^2 + B_1\tau + C_1),$$

где $\tau = e^{\beta t}$ и

$$A_1 = e^{-\frac{\beta h}{2}}\big(2e^{2\beta h} + 2e^{\frac{3}{2}\beta h} + 5e^{\beta h} + 2e^{\frac{\beta h}{2}} + 1\big) > 0,$$

$$C_1 = e^{\frac{\beta h}{2}}\big(e^{2\beta h} + 2e^{\frac{3}{2}\beta h} + 5e^{\beta h} + 2e^{\frac{\beta h}{2}} + 2\big) > 0,$$

$$B_1 = -\big(2e^{2\beta h} + 2e^{\frac{3}{2}\beta h} + 4e^{\beta h} + 2e^{\frac{\beta h}{2}} + 2\big) < 0.$$

Легко проверяется, что $q_2(-h/2) > 0$, $q_2(0) > 0$, $q_2(h/2) < 0$. Следовательно, уравнение $q_2(t) = 0$ имеет на отрезке $[-h/2; h/2]$ единственный корень $t_1 > 0$, причем

$$e^{\beta t_1} = \frac{-B_1 - \sqrt{D_1}}{2A_1},$$

где $D_1 = 2e^{4\beta h} + 2e^{\frac{7}{2}\beta h} + e^{3\beta h} - 2e^{\frac{5}{2}\beta h} - 6e^{2\beta h} - 2e^{\frac{3}{2}\beta h} + e^{\beta h} + 2e^{\frac{\beta h}{2}} + 2 > 0$.

Аналогично исследуется функция $q_4(t)$ на отрезке $[-h/2; h/2]$. Имеем $q_4(-h/2) < 0$, $q_4(0) > 0$, $q_4(h/2) > 0$ и

$$q_4(t) = A_2 e^{\beta t} + C_2 e^{-\beta t} + B_2 = e^{-\beta t}(A_2\tau^2 + B_2\tau + C_2),$$

где $\tau = e^{\beta t}$ и

$$A_2 = e^{\frac{\beta h}{2}}\big(e^{2\beta h} + 2e^{\frac{3}{2}\beta h} + 5e^{\beta h} + 2e^{\frac{\beta h}{2}} + 2\big) > 0,$$

$$C_2 = e^{-\frac{\beta h}{2}}\big(2e^{2\beta h} + 2e^{\frac{3}{2}\beta h} + 5e^{\beta h} + 2e^{\frac{\beta h}{2}} + 1\big) > 0,$$

$$B_2 = -\left(2e^{2\beta h} + 2e^{\frac{3}{2}\beta h} + 4e^{\beta h} + 2e^{\frac{\beta h}{2}} + 2\right) < 0.$$

Поэтому уравнение $q_4(t) = 0$ имеет на отрезке $[-h/2; h/2]$ единственный корень $t_2 < 0$, причем

$$e^{\beta t_2} = \frac{-B_2 + \sqrt{D_2}}{2A_2},$$

где $D_2 = D_1$. Таким образом, получаем неравенство

$$-\frac{h}{2} < t_2 < 0 < t_1 < \frac{h}{2}.$$

Кроме того, из проведенного исследования легко понять, что функция $q_2(t)$ меняет знак в точке t_1 с плюса на минус, а функция $q_4(t)$ — в точке t_2 с минуса на плюс.

Осталось исследовать функцию $q_3(t)$. Заметим, что эта функция четная (относительно $t = 0$) и $q_3(0) > 0,\ q_3(h/2) > 0$. Кроме того, имеет место равенство

$$q_3(t) = A_3 e^{\beta t} + C_3 e^{-\beta t} + B_3 = e^{-\beta t}(A_3\tau^2 + B_3\tau + C_3),$$

где $\tau = e^{\beta t}$ и

$$A_3 = -\frac{e^{\frac{\beta h}{2}}}{2} - \frac{e^{\frac{3}{2}\beta h}}{2} - (e^{2\beta h} + 2e^{\frac{3}{2}\beta h} + 4e^{\beta h} + 2e^{\frac{\beta h}{2}} + 1)\operatorname{ch}\frac{\beta h}{2} < 0.$$

Значит, функция $q_3(t)$ выпукла вверх на отрезке $[-h/2; h/2]$ и $q_3(t) > 0$ при $t \in [-h/2; h/2]$. Обозначим выражение в правой части неравенства (2.4) через $Q(t)$. С учетом проведенного анализа знаков функций $q_s(t)$ $(s = \overline{1,5})$ получаем, что

$$Q(t) = \frac{e^{\beta h}(e^{\frac{\beta h}{2}} - 1)^2}{(e^{\beta h} - 1)^4(1 + e^{\beta h})} \begin{cases} Q_1(t), & -\dfrac{h}{2} \le t \le t_2, \\ Q_2(t), & t_2 \le t \le t_1, \\ Q_3(t), & t_1 \le t \le \dfrac{h}{2}, \end{cases}$$

где

$$Q_1(t) = -q_1(t) + q_2(t) + q_3(t) - q_4(t) - q_5(t),$$
$$Q_2(t) = -q_1(t) + q_2(t) + q_3(t) + q_4(t) - q_5(t),$$
$$Q_3(t) = -q_1(t) - q_2(t) + q_3(t) + q_4(t) - q_5(t).$$

Элементарные вычисления показывают, что

$$Q_1(t) = (-e^{\frac{5}{2}\beta h} - 2e^{2\beta h} - 4e^{\frac{3}{2}\beta h} - 2e^{\beta h} - e^{\frac{\beta h}{2}})e^{\beta t} + (-e^{\frac{3}{2}\beta h} - 2e^{\beta h} - 4e^{\frac{\beta h}{2}} - 2 - e^{-\frac{\beta h}{2}})e^{-\beta t}$$
$$+ e^{3\beta h} + 2e^{\frac{5}{2}\beta h} + 4e^{2\beta h} + 2e^{\frac{3}{2}\beta h} + 2e^{\beta h} + 2e^{\frac{\beta h}{2}} + 4 + 2e^{-\frac{\beta h}{2}} + e^{-\beta h},$$

$$Q_2(t) = \Big(\frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}\beta h} + \frac{3}{2}e^{\frac{\beta h}{2}}\Big)e^{\beta t} + \Big(\frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}\beta h} + \frac{3}{2}e^{\frac{\beta h}{2}}\Big)e^{-\beta t} + e^{3\beta h} + 2e^{\frac{5}{2}\beta h} - 2e^{\frac{3}{2}\beta h} - 6e^{\beta h} - 2e^{\frac{\beta h}{2}} + 2e^{-\frac{\beta h}{2}} + e^{-\beta h},$$

$$Q_3(t) = (-e^{\frac{3}{2}\beta h} - 2e^{\beta h} - 4e^{\frac{\beta h}{2}} - 2 - e^{-\frac{\beta h}{2}})e^{\beta t} + (-e^{\frac{5}{2}\beta h} - 2e^{2\beta h} - 4e^{\frac{3}{2}\beta h} - 2e^{\beta h} - e^{\frac{\beta h}{2}})e^{-\beta t}$$
$$+ e^{3\beta h} + 2e^{\frac{5}{2}\beta h} + 4e^{2\beta h} + 2e^{\frac{3}{2}\beta h} + 2e^{\beta h} + 2e^{\frac{\beta h}{2}} + 4 + 2e^{-\frac{\beta h}{2}} + e^{-\beta h}.$$

Легко понять, что функция $Q_2(t)$ четна относительно $t = 0$, $Q_1(-t) = Q_3(t)$, $Q_1'(t) < 0$ при $-h/2 < t \le 0$, $Q_3'(t) > 0$ при $0 \le t < h/2$, $Q_2'(t) > 0$ при $0 \le t \le h/2$. Таким образом,

$$\max_{t\in[-\frac{h}{2};\frac{h}{2}]} Q(t) = Q\Big(\frac{h}{2}\Big) = Q\Big(-\frac{h}{2}\Big) = \frac{e^{\beta h}(e^{\frac{\beta h}{2}} - 1)^2}{(e^{\beta h} - 1)^4(1 + e^{\beta h})}$$

$$\times (e^{2\beta h}+2e^{\frac{3}{2}\beta h}+4e^{\beta h}+2e^{\frac{\beta h}{2}}+1)(e^{\beta h}+e^{-\beta h}-2)=\frac{e^{2\beta h}+2e^{\frac{3}{2}\beta h}+4e^{\beta h}+2e^{\frac{\beta h}{2}}+1}{(e^{\frac{\beta h}{2}}+1)^2(1+e^{\beta h})}. \quad (2.5)$$

Напомним, что через $Q(t)$ было обозначено выражение в правой части неравенства (2.4). Из (2.2), (2.4) и (2.5) получим неравенство

$$\Big|S_{\mathcal{L}_3}\Big(f,t+\frac{h}{2}\Big)\Big|\le\frac{e^{2\beta h}+2e^{\frac{3}{2}\beta h}+4e^{\beta h}+2e^{\frac{\beta h}{2}}+1}{(e^{\frac{\beta h}{2}}+1)^2(1+e^{\beta h})},\quad t\in\Big[\Big(l-\frac{1}{2}\Big)h;\Big(l+\frac{1}{2}\Big)h\Big]\quad (l\in\mathbb{Z}). \quad (2.6)$$

Из приведенного доказательства следует, что на классе непрерывных на всей числовой оси $\mathbb{R}$ функций f таких, что $\|f\|_C\le 1$, неравенство (2.6) является точным в том смысле, что знак равенства в нем при $t=(l-1/2)h$ реализуется, если

$$\widetilde{y}_{l-2}=-1,\quad \widetilde{y}_{l-1}=1,\quad \widetilde{y}_l=1,\quad \widetilde{y}_{l+1}=-1,\quad \widetilde{y}_{l+2}=-1,$$

а при $t=(l+1/2)h$, если

$$\widetilde{y}_{l-2}=-1,\quad \widetilde{y}_{l-1}=-1,\quad \widetilde{y}_l=1,\quad \widetilde{y}_{l+1}=1,\quad \widetilde{y}_{l+2}=-1.$$

Напомним, что $\widetilde{y}_l=f(lh)$ $(l\in\mathbb{Z})$. Следовательно, из (2.6) выводим равенство

$$\sup_{\|f\|_C\le 1}\|S_{\mathcal{L}_3}(f,\cdot)\|_C=\frac{e^{2\beta h}+2e^{\frac{3}{2}\beta h}+4e^{\beta h}+2e^{\frac{\beta h}{2}}+1}{(e^{\frac{\beta h}{2}}+1)^2(1+e^{\beta h})}.$$

Теорема 2 доказана. □

З а м е ч а н и е 2. При $\beta\to 0$ предельным случаем экспоненциальных сплайнов $S_{\mathcal{L}_3}(f,x)$ являются локальные параболические сплайны, точные на алгебраических многочленах второй степени. Такие сплайны изучал Н. П. Корнейчук [25]. Точнее, им были указаны коэффициенты $c_1=c_3=-1/8h^2$, $c_2=5/4h^2$ (сравните с коэффициентами функционала I_j в теореме 2) и исследованы аппроксимативные свойства таких сплайнов на соболевских классах дифференцируемых функций. Константа Лебега локальных параболических сплайнов $L_2(D^3,1/2)$ была вычислена в [22] и оказалась равной 1.25. Заметим, что из теоремы 2 также следует, что при $\beta\to 0$ величина $L_2(\mathcal{L}_3,1/2)\to 1.25$.

З а м е ч а н и е 3. Для константы Лебега $L_2(\mathcal{L}_3,1/2)$ в теореме 2 при любых $\beta>0$ и $h>0$ справедлива оценка сверху

$$L_2\Big(\mathcal{L}_3,\frac{1}{2}\Big)=1+\frac{2e^{\beta h}}{(e^{\frac{\beta h}{2}}+1)^2(1+e^{\beta h})}\le 1.25.$$

Возвращаясь к интерполяционным сплайнам третьего порядка (см. обозначения во введении), отметим, что для оператора $\mathcal{L}_3(D)=D(D^2-\beta^2)$ $(\beta>0)$ В. А. Ким [16] доказал, что

$$L_1\Big(\mathcal{L}_3,\frac{1}{2}\Big)=\frac{(1+e^{-\frac{\beta h}{2}})(1+e^{\frac{\beta h}{2}})}{\sqrt{(1+e^{\frac{\beta h}{2}})^2+(1+e^{-\frac{\beta h}{2}})^2}}=\frac{e^{\frac{\beta h}{2}}+1}{\sqrt{1+e^{\beta h}}}.$$

Из этой формулы следует, что при $\beta\to 0$ величина $L_1(\mathcal{L}_3,1/2)$ стремится к $\sqrt{2}$ (см. также теорему B из введения). Нетрудно проверить, что при любых $\beta>0$ и $h>0$ имеет место неравенство

$$L_2\Big(\mathcal{L}_3,\frac{1}{2}\Big)<L_1\Big(\mathcal{L}_3,\frac{1}{2}\Big).$$

Таким образом, для оператора $\mathcal{L}_3(D)=D(D^2-\beta^2)$ локальные экспоненциальные сплайны более устойчивы к возмущению аппроксимационных условий, чем соответствующие интерполяционные.

3. Простейшая схема локальной экспоненциальной сплайн-аппроксимации

В данном разделе рассмотрим оператор третьего порядка более общего вида, чем в предыдущем разделе. Пусть

$$\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_3(D) = (D-\beta)(D-\gamma)(D-\delta), \tag{3.1}$$

где β, γ и δ — попарно различные действительные числа. Изложим простейшую схему локальной экспоненциальной сплайн-аппроксимации (см. [19; 21]) при $\beta \neq 0$ и $\gamma \neq 0$. Базисный экспоненциальный сплайн для оператора (3.1) на отрезке $[-3h/2; 3h/2]$ с узлами $-3h/2$, $-h/2$, $h/2$, $3h/2$ может быть записан в виде

$$\overline{B}_{\mathcal{L}_3}(x) = m \begin{cases} (\gamma-\delta)e^{\beta(x+\frac{3h}{2})} + (\delta-\beta)e^{\gamma(x+\frac{3h}{2})} + (\beta-\gamma)e^{\delta(x+\frac{3h}{2})}, & x \in \Big[-\dfrac{3h}{2}; -\dfrac{h}{2}\Big], \\ -(\gamma-\delta)(e^{\gamma h}+e^{\delta h})e^{\beta(x+\frac{h}{2})} - (\delta-\beta)(e^{\delta h}+e^{\beta h})e^{\gamma(x+\frac{h}{2})} - & \\ -(\beta-\gamma)(e^{\beta h}+e^{\gamma h})e^{\delta(x+\frac{h}{2})}, & x \in \Big[-\dfrac{h}{2}; \dfrac{h}{2}\Big], \\ (\gamma-\delta)e^{(\gamma+\delta)h}e^{\beta(x-\frac{h}{2})} + (\delta-\beta)e^{(\delta+\beta)h}e^{\gamma(x-\frac{h}{2})} + & \\ +(\beta-\gamma)e^{(\beta+\gamma)h}e^{\delta(x-\frac{h}{2})}, & x \in \Big[\dfrac{h}{2}; \dfrac{3h}{2}\Big]. \end{cases}$$

Здесь $m = m(\mathcal{L}_3, h)$ — нормирующий множитель (необязательно положительный),

$$m = \Big(\frac{e^{\delta h}-e^{\gamma h}}{\delta-\gamma}\,\frac{\beta-\delta}{e^{\beta h}-e^{\delta h}}\Big)^{\frac{\gamma}{\gamma-\beta}} \frac{1}{(e^{\beta h}-e^{\gamma h})(e^{\delta h}-e^{\gamma h})(\delta-\beta)}.$$

Функция $\overline{B}_{\mathcal{L}_3}(x) > 0$ с точностью до постоянного множителя совпадает с функцией $B_{\mathcal{L}_3}(x - 3h/2)$ из формулы (1.2) при $\beta_1 = \beta$, $\beta_2 = \gamma$, $\beta_3 = \delta$. Для произвольной функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ рассмотрим локальный экспоненциальный сплайн, соответствующий оператору (3.1), вида

$$\overline{S}(x) = \overline{S}_{\mathcal{L}_3}(f, x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} y_{j+\alpha}\overline{B}_{\mathcal{L}_3}(x - jh) \quad (x \in \mathbb{R}), \tag{3.2}$$

где $y_{j+\alpha} = f((j+\alpha)h)$ $(j \in \mathbb{Z})$. Сплайн $\overline{S}(x)$ в равенстве (3.2) реализует простейшую схему локальной сплайн-аппроксимации (см. [19; 21]). Ключевым моментом в этой схеме является выбор параметров m и α. Положим

$$\alpha = \varepsilon = \frac{1}{2} + \frac{1}{(\beta-\gamma)h} \ln \frac{(e^{\gamma h}-e^{\delta h})(\delta-\beta)}{(e^{\delta h}-e^{\beta h})(\gamma-\delta)}.$$

В [19] доказано, что при указанном выборе параметров m и $\alpha = \varepsilon$ имеют место равенства

$$\overline{S}_{\mathcal{L}_3}(e^{\beta\,\cdot}, x) = e^{\beta x}, \quad \overline{S}_{\mathcal{L}_3}(e^{\gamma\,\cdot}, x) = e^{\gamma x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Следовательно, простейшая схема (3.2) локальной экспоненциальной сплайн-аппроксимации сохраняет не все ядро $\operatorname{Ker}\mathcal{L}_3$ оператора (3.1), а только подпространство, натянутое на две функции $e^{\beta x}$ и $e^{\gamma x}$. Величину

$$L_3(\mathcal{L}_3, \varepsilon) = \sup_{\|f\|_C \le 1} \|\overline{S}_{\mathcal{L}_3}(f, \cdot)\|_C$$

назовем константой Лебега метода (3.2). Имеет место следующий результат.

Теорема D [19]. *Для локального сплайна* (3.2) *справедливо равенство*

$$L_3(\mathcal{L}_3, \varepsilon) = \max_{t\in[0;h]} \Big\{ m[(\gamma-\delta)e^{\beta t}(e^{\gamma h}-1)(e^{\delta h}-1) + (\delta-\beta)e^{\gamma t}(e^{\beta h}-1)(e^{\delta h}-1)$$

$$+ (\beta-\gamma)e^{\delta t}(e^{\beta h}-1)(e^{\gamma h}-1)]\Big\}.$$

З а м е ч а н и е 4. В случае $\gamma=-\beta,\ \delta=0$, т.е. для оператора $\mathcal{L}_3(D)=D(D^2-\beta^2)$ ($\beta>0$), из теоремы D имеем

$$\varepsilon=0,\quad m=-\frac{e^{\frac{3}{2}\beta h}}{\beta(e^{\beta h}-1)^2(1+e^{\beta h})}$$

и

$$L_3(\mathcal{L}_3,0)=\frac{2e^{\frac{\beta h}{2}}}{e^{\beta h}+1}\le 1.$$

Из замечаний 3 и 4 выводим следующее утверждение.

Теорема 3. *Для оператора* $\mathcal{L}_3(D)=D(D^2-\beta^2)$ ($\beta>0$) *имеет место неравенство*

$$L_3(\mathcal{L}_3,0)<L_2\Big(\mathcal{L}_3,\frac{1}{2}\Big)<L_1\Big(\mathcal{L}_3,\frac{1}{2}\Big).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шевалдин В.Т.** Об одной задаче экстремальной интерполяции // Мат. заметки. 1981. Т. 29, № 4. С. 603–622.
2. **Шевалдин В.Т.** Некоторые задачи экстремальной интерполяции в среднем для линейных дифференциальных операторов // Тр. МИАН. 1983. Т. 164. С. 203–240.
3. **Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.** Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972. 316 с.
4. **Субботин Ю.Н.** О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Тр. МИАН. 1965. Т. 78. С. 24–42.
5. **Micchelli C.A.** Cardinal $\mathcal{L}$-splines // Studies in Splines and Approximation Theory. New-York, etc.: Acad. Press, 1976. P. 203–250.
6. **Schoenberg I.J.** On Micchelli's theory of cardinal $\mathcal{L}$-splines // Studies in Splines and Approximation Theory. New-York, etc.: Acad. Press, 1976. P. 251–276.
7. **Шевалдин В.Т.** $\mathcal{L}$-сплайны и поперечники // Мат. заметки. 1982. Т. 33, № 5. С. 735–744.
8. **Новиков С.И.** Приближение одного класса дифференцируемых функций $\mathcal{L}$-сплайнами // Мат. заметки. 1983. Т. 33, № 3. С. 393–408.
9. **Schurer F., Cheney E.W.** On interpolation cubic splines with equally-spaced nodes // Proc. Nederlande Acad. van Wetenschappen. 1968. Bd. 71, h 5. P. 517–524.
10. **Женсыкбаев А.А.** Точные оценки равномерного приближения непрерывных функций сплайнами r-го порядка // Мат. заметки. 1973. Т. 13, № 2. С. 217–228.
11. **Richards F.** The Lebesque constants for cardinal spline interpolation // J. Approx. Theory. 1975. Vol. 14, № 2. P. 83–92.
12. **Субботин Ю.Н., Теляковский С.А.** Асимптотика констант Лебега периодических интерполяционных сплайнов с равноотстоящими узлами // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 8. С. 131–140.
13. **Субботин Ю.Н., Теляковский С.А.** Нормы в L-периодических интерполяционных сплайнов с равноотстоящими узлами // Мат. заметки. 2003. Т. 74, № 1. С. 108–117.
14. **Tzimbalario J.** Lebesque constants for cardinal $\mathcal{L}$-spline interpolation // Can. J. Math. 1977. Vol. 29, no. 2. P. 441–448.
15. **Morsche H.G. ter** On the Lebesque constants for cardinal $\mathcal{L}$-spline interpolation // J. Approx. Theory. 1985. Vol. 45, no. 3. C. 232–246.
16. **Ким В.А.** Точные константы Лебега для интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов третьего порядка // Мат. заметки. 2008. Т. 84, № 1. С. 59–68.
17. **Ким В.А.** Точные константы Лебега для интерполяционных ограниченных $\mathcal{L}$-сплайнов третьего порядка // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 2. С. 330–341.
18. **Ким В.А.** Точные константы Лебега для интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов формально самосопряженного дифференциального оператора // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 169–177.

19. **Жданов П.Г., Шевалдин В.Т.** Формосохраняющие локальные $\mathcal{L}$-сплайны, соответствующие произвольному линейному дифференциальному оператору третьего порядка // Сб. тр. Ин-та математики НАН Украины. 2008. Т. 366, № 2. С. 151–164.
20. **Стрелкова Е.В., Шевалдин В.Т.** Аппроксимация локальными сплайнами, точными на подпространствах ядра дифференциального оператора // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 272–280.
21. **Шевалдин В.Т.** Аппроксимация локальными сплайнами. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2014. 198 с.
22. **Стрелкова Е.В., Шевалдин В.Т.** О константах Лебега локальных параболических сплайнов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 1. С. 213–219.
23. **Волков Ю.С., Пыткеев Е.Г., Шевалдин В.Т.** Порядки аппроксимации локальными экспоненциальными сплайнами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 135–144.
24. **Шевалдина Е.В.** Локальные $\mathcal{L}$-сплайны, сохраняющие ядро дифференциального оператора // Сиб. журн. вычисл. математики. 2010. Т. 13, № 1. С. 111–121.
25. **Корнейчук Н.П.** О приближении локальными сплайнами минимального дефекта // Укр. мат. журн. 1982. Т. 34, № 5. С. 617–621.

Стрелкова Елена Валерьевна
канд. физ.-мат. наук
гл. программист
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

Поступила 15.05.2015

Шевалдин Валерий Трифонович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru