ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 517.51

ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ГЛАДКОСТНЫХ КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ПОЛИНОМАМИ ПО ТЕНЗОРНОЙ СИСТЕМЕ ХААРА[1]

С. А. Стасюк

В работе изучаются два вида приближения (линейное и нелинейное) некоторых гладкостных классов (близких классам функций смешанной гладкости типа Никольского — Бесова) периодических функций многих переменных полиномами, построенными по тензорной системе Хаара. Для функций из этих классов получены порядковые оценки сверху приближения ступенчато–гиперболическими суммами Фурье — Хаара, а также точные по порядку оценки наилучшего m-членного приближения по тензорной системе Хаара.

Ключевые слова: приближение функций многих переменных, тензорная система Хаара, наилучшее m-членное приближение.

S. A. Stasyuk. Approximation of certain smoothness classes of periodic functions of several variables by polynomials with regard to the tensor Haar system.

We investigate two kinds of approximation (linear and nonlinear) of certain smoothness classes (close to Nikol'skii–Besov type classes of mixed smoothness) of periodic functions of several variables by polynomials with regard to the tensor Haar system. For the functions of these classes we obtain upper order estimates for the approximation by step-hyperbolic Fourier–Haar sums and exact order estimates for the best m-term approximation with regard to the tensor Haar system.

Keywords: approximation of functions of several variables, tensor Haar system, best m-term approximation.

1. Введение

В настоящей работе изучаются вопросы, связанные с линейным и нелинейным способами приближения классов $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных полиномами, построенными по тензорной системе Хаара.

Изложение материала организовано следующим образом. В первой части работы для функций из классов $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$, $1 \le p \le \infty$, устанавливаются порядковые оценки сверху их приближения ступенчато-гиперболическими суммами Фурье — Хаара в метрике $L_q([0,1]^d)$, $1 < q < \infty$, а во второй части — точные по порядку оценки наилучшего m-членного приближения классов $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ по тензорной системе Хаара в пространстве $L_q([0,1]^d)$, $1 < q < \infty$. В завершающей части приводятся замечания и комментарии к полученным результатам.

Предваряют первую и вторую части работы определения упомянутых аппроксимационных характеристик и классов, а также краткое изложение истории их исследования. С этой целью приведем необходимые обозначения и соотношения.

Пусть $L_p([0,1]^d)$, $1 \le p < \infty$, — лебегово пространство 1-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, \dots, x_d)$ с конечной нормой, которая определяется следующим образом:

$$||f||_p := \left(\int\limits_{[0,1]^d} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

[1]Работа выполнена при частичной поддержке FP7-People-2011-IRSES (проект № 295164 (EUMLS: EU–Ukrainian Mathematicians for Life Sciences)).

Будем считать, что пространство $L_\infty([0,1]^d)$ состоит из 1-периодических по каждой переменной и непрерывных на $[0,1]^d$ функций и снабжено обычной равномерной нормой.

Всюду ниже для функций $f \in L_p([0,1]^d)$, $1 \le p \le \infty$, будем требовать выполнения условия

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx_j = 0, \quad j = 1, \dots, d.$$

В дальнейшем некоторые положительные величины μ_1 и μ_2 будем связывать отношением $\mu_1 \ll \mu_2$ ($\mu_1 \gg \mu_2$), если для них выполняется неравенство $\mu_1 \le C_1\mu_2$ ($\mu_1 \ge C_2\mu_2$) при некотором значении величины $C_1 > 0$ ($C_2 > 0$), которая не зависит от одного, обозначенного контекстом, параметра. Если же одновременно выполняются отношения $\mu_1 \ll \mu_2$ и $\mu_2 \ll \mu_1$, то будем писать $\mu_1 \asymp \mu_2$.

Приведем сначала определение системы Хаара $\mathcal{H}$ в одномерном случае.

Пусть D_s, $s \in \mathbb{Z}_+$, обозначает множество всех двоичных интервалов на отрезке $[0,1]$ вида $I = [j2^{-s}, (j+1)2^{-s})$, $j = 0, \dots, 2^s - 1$. Положим

$$H_I(t) := |I|^{-1/2} \begin{cases} 1, & \text{если } t \in \Big[j2^{-s}, \Big(j + \dfrac{1}{2}\Big)2^{-s}\Big), \\ -1, & \text{если } t \in \Big[(j + \dfrac{1}{2})2^{-s}, (j+1)2^{-s}\Big), \\ 0, & \text{если } t \notin I, \end{cases}$$

где $I \in D_s$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $I = [j2^{-s}, (j+1)2^{-s})$, $j = 0, \dots, 2^s - 1$, а $|I| = 2^{-s}$ — длина двоичного интервала I. Тогда системой Хаара в одномерном случае является следующее множество:

$$\mathcal{H} := \{H_I \colon I \in D_s,\ s \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Перейдем теперь к определению тензорной системы Хаара $\mathcal{H}$, т. е. системы Хаара в d-мерном случае. Заметим, что для обозначения тензорной системы Хаара сохраняем то же обозначение $\mathcal{H}$, что и для одномерной, которое, надеемся, не будет вызывать недоумения, поскольку далее из контекста будет понятно, о какой системе идет речь. Также далее упомянутую систему будем просто называть системой Хаара (вместо использования словосочетания "тензорная система Хаара"), если из контекста будет понятно, о какой системе идет речь.

Для $I = I_1 \times \dots \times I_d$ определим d-мерную функцию Хаара как тензорное произведение соответствующих одномерных функций Хаара, т. е.

$$H_I(x) := \prod_{j=1}^d H_{I_j}(x_j).$$

Далее, для функции $f \in L_q([0,1])^d)$ и вектора $s = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ обозначим

$$\delta_s(f) := \sum_{I \in \mathcal{D}_s} c_I(f) H_I,$$

где

$$c_I(f) := \int\limits_{[0,1]^d} f(x) H_I(x)\,dx,$$

$$\mathcal{D}_s := \{I = I_1 \times \dots \times I_d \colon\ I_j \in D_{s_j},\ j = 1, \dots, d\}.$$

Наконец, полагаем

$$\mathcal{H} := \{H_I \colon I \in \mathcal{D}_s, s \in \mathbb{Z}_+^d\}.$$

Приведем еще некоторые утверждения и соотношения, которыми будем пользоваться.

Теорема Литтлвуда — Пэли (см., например, [1, гл. 3]). *Для любой функции* $f \in L_p([0,1])$, $1 < p < \infty$, *имеет место сотношение*

$$C_1(p)||f||_p \le \left\| \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} |\delta_s(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \le C_2(p)||f||_p. \tag{1.1}$$

Из (1.1) вытекает следующее неравенство (см., например, [2]):

$$||f||_p \le C_3(p) \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} ||\delta_s(f)||_p^{p_0} \right)^{1/p_0}, \tag{1.2}$$

где $p_0 = \min\{p; 2\}$.

Пусть $1 \le p < q < \infty$, тогда для $f \in L_p([0,1]^d)$ имеет место неравенство [3]

$$||f||_q \le C(p,q,d) \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+^d} \left(||\delta_s(f)||_p \, 2^{||s||_1 (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \right)^q \right)^{1/q}, \tag{1.3}$$

где $||s||_1 = s_1 + \dots + s_d$.

Заметим, что аналогичные (1.2) и (1.3) неравенства имеют место и для кратной тригонометрической системы (см., например, [4–6]).

Для $r > 0$, $1 \le p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ определим пространства $MB^r_{p,\theta}$, которые являются аналогами пространств Никольского — Бесова функций смешанной гладкости, следующим образом:

$$MB^r_{p,\theta} := \{f \in L_p([0,1]^d) \colon ||f||_{MB^r_{p,\theta}} < \infty\},$$

где

$$||f||_{MB^r_{p,\theta}} := \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+^d} \left(2^{r||s||_1} ||\delta_s(f)||_p \right)^\theta \right)^{1/\theta}, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{1.4}$$

$$||f||_{MB^r_{p,\infty}} := \sup_{s \in \mathbb{Z}_+^d} \frac{||\delta_s(f)||_p}{2^{-r||s||_1}}. \tag{1.5}$$

Для пространства $MB^r_{p,\infty}$ будем использовать также обозначение MH^r_p.

Наряду с приведенными пространствами $MB^r_{p,\theta}$ рассмотрим близкие к ним пространства $MH^r_{p,\theta}$, $r > 0$, $1 \le p \le \infty$, $1 \le \theta < \infty$, определяемые следующим образом:

$$MH^r_{p,\theta} := \{f \in L_p([0,1]^d) \colon ||f||_{MH^r_{p,\theta}} < \infty\},$$

где

$$||f||_{MH^r_{p,\theta}} := \sup_k \left(\sum_{||s||_1 = k} \left(2^{r||s||_1} ||\delta_s(f)||_p \right)^\theta \right)^{1/\theta}. \tag{1.6}$$

Далее через $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ и $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ обозначим единичные шары пространств $MB^r_{p,\theta}$ и $MH^r_{p,\theta}$ соответственно, т. е.

$$\mathbf{MB}^r_{p,\theta} := \{f \in MB^r_{p,\theta} \colon ||f||_{MB^r_{p,\theta}} \le 1\}, \tag{1.7}$$

$$\mathbf{MH}^r_{p,\theta} := \{f \in MH^r_{p,\theta} \colon ||f||_{MH^r_{p,\theta}} \le 1\}. \tag{1.8}$$

Множества $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ и $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ будем называть классами.

Заметим, что аналогичные $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ классы периодических функций многих переменных, определяемые через L_p-нормы соответствующих двоичных “блоков” $\delta_s(f)$ рядов Фурье функции по кратной тригонометрической системе, рассматривались В. Н. Темляковым [7] с точки зрения их наилучших m-членных приближений по кратной тригонометрической системе. При этом установление оценок сверху сопровождалось конструктивным построением m-членных приближающих агрегатов.

Согласно определениям (1.4)–(1.8) имеют место вложения

$$\mathbf{MB}^r_{p,1} \subset \mathbf{MB}^r_{p,\theta_1} \subset \mathbf{MB}^r_{p,\theta_2} \subset \mathbf{MB}^r_{p,\infty} \equiv \mathbf{MH}^r_p, \quad 1 < \theta_1 < \theta_2 < \infty,$$

$$\mathbf{MH}^r_{p,1} \subset \mathbf{MH}^r_{p,\theta_1} \subset \mathbf{MH}^r_{p,\theta_2} \subset \mathbf{MH}^r_{p,\infty} \equiv \mathbf{MH}^r_p, \quad 1 < \theta_1 < \theta_2 < \infty, \tag{1.9}$$

$$\mathbf{MB}^r_{p,\theta} \subset \mathbf{MH}^r_{p,\theta}, \quad 1 \le \theta < \infty. \tag{1.10}$$

При $d = 1$ букву $\mathbf{M}$ в обозначениях классов будем опускать. В этом случае согласно определениям (1.5), (1.6), (1.8) вместо цепочки вложений (1.9) можем записать

$$\mathbf{H}^r_{p,\theta} \equiv \mathbf{H}^r_p, \quad 1 \le \theta < \infty, \quad d = 1. \tag{1.11}$$

2. Приближения классов $\mathrm{MH}^r_{p,\theta}$ ступенчато-гиперболическими суммами Фурье — Хаара

Рассмотрим множество

$$Q_n := \bigcup_{||s||_1 \le n} \mathcal{D}_s,$$

которое называют ступенчатым гиперболическим крестом. Обозначив через $\#A$ количество элементов конечного множества A, заметим, что имеет место соотношение (см., например, [4])

$$\#Q_n \asymp 2^n n^{d-1}. \tag{2.1}$$

Функции $f \in L_q([0,1]^d)$ сопоставим ряд Фурье — Хаара

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{||s||_1 = n} \delta_s(f) \tag{2.2}$$

и обозначим через $S_{Q_n}(f)$ ее ступенчато-гиперболическую сумму Фурье — Хаара или частичную сумму Фурье — Хаара с носителем в множестве Q_n, полагая

$$S_{Q_n}(f) := \sum_{I \in Q_n} c_I(f) H_I = \sum_{||s||_1 \le n} \delta_s(f). \tag{2.3}$$

Для $f \in L_q([0,1]^d)$ определим

$$\mathcal{E}_{Q_n}(f)_q := ||f - S_{Q_n}(f)||_q \tag{2.4}$$

— величину приближения функции f частной суммой Фурье — Хаара $S_{Q_n}(f)$ в метрике пространства $L_q([0,1]^d)$.

Сформулируем и докажем теорему, в которой установлены порядковые оценки сверху для величины

$$\mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q := \sup_{f \in \mathbf{MH}^r_{p,\theta}} \mathcal{E}_{Q_n}(f)_q.$$

Теорема 1. *Пусть* $1 \le p \le \infty$, $1 \le q < \infty$, $1 \le \theta < \infty$, $(1/p - 1/q)_+ < r < 1$, *тогда*

$$\mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \ll \begin{cases} 2^{-(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})n}\, n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+}, & 1 \le p < q < \infty, \\ 2^{-rn}\, n^{(d-1)\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{\theta}\right)_+}, & 1 \le q \le p \le \infty, \ p \ne 1, \end{cases}$$

где $p_0 = \min\{p; 2\}$, $a_+ = \max\{a; 0\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in \mathbf{MH}^r_{p,\theta}$. При $1 \le p < q \le \theta < \infty$, используя неравенство (1.3), неравенство Гельдера (с показателем θ/q), а также соотношение

$$\sum_{||s||_1=k} 1 \asymp k^{d-1}, \tag{2.5}$$

получим

$$\Big\| \sum_{||s||_1>n} \delta_s(f) \Big\|_q \ll \Big(\sum_{||s||_1>n} \Big(||\delta_s(f)||_p \, 2^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})||s||_1} \Big)^q \Big)^{1/q}$$

$$= \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{||s||_1=k} \Big(2^{r||s||_1} ||\delta_s(f)||_p \Big)^q 2^{-q||s||_1(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \Big)^{1/q}$$

$$\le \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} \Big(\sum_{||s||_1=k} 2^{r||s||_1\theta} ||\delta_s(f)||_p^{\theta} \Big)^{q/\theta} \Big(\sum_{||s||_1=k} 2^{-||s||_1(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})\frac{q\theta}{\theta-q}} \Big)^{\frac{\theta-q}{\theta}} \Big)^{1/q}$$

$$\le ||f||_{MH^r_{p,\theta}} \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-qk(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \Big(\sum_{||s||_1=k} 1 \Big)^{\frac{\theta-q}{\theta}} \Big)^{1/q} \le \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-qk(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \Big(\sum_{||s||_1=k} 1 \Big)^{\frac{\theta-q}{\theta}} \Big)^{1/q}$$

$$\asymp \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-qk(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} k^{(d-1)\frac{\theta-q}{\theta}} \Big)^{1/q} \asymp 2^{-(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})n} n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})}. \tag{2.6}$$

Из (2.6) заключаем, что ряд (2.2) сходится к функции f в пространстве $L_q([0,1]^d)$ и

$$\mathcal{E}_{Q_n}(f)_q \ll 2^{-(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})n} n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})}, \quad 1 \le p < q \le \theta < \infty. \tag{2.7}$$

Если же $1 \le p < q < \infty$, а $1 \le \theta < q$, то из (2.7) с учетом (1.9) получим

$$\mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \le \mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^r_{p,q})_q \ll 2^{-(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})n}.$$

Пусть теперь $1 < q = p < \infty$. В случае $\theta \ge p_0 = \min\{p, 2\}$, используя неравенство (1.2), неравенство Гельдера (с показателем θ/p_0) и соотношение (2.5), имеем

$$\Big\| \sum_{||s||_1>n} \delta_s(f) \Big\|_p \ll \Big(\sum_{||s||_1>n} ||\delta_s(f)||_p^{p_0} \Big)^{1/p_0} = \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{||s||_1=k} \Big(2^{r||s||_1} ||\delta_s(f)||_p \Big)^{p_0} \; 2^{-rp_0||s||_1} \Big)^{1/p_0}$$

$$\le \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} \Big(\sum_{||s||_1=k} 2^{r||s||_1\theta} ||\delta_s(f)||_p^{\theta} \Big)^{p_0/\theta} \Big(\sum_{||s||_1=k} 2^{-r\frac{\theta p_0}{\theta-p_0}||s||_1} \Big)^{\frac{\theta-p_0}{\theta}} \Big)^{1/p_0}$$

$$\le ||f||_{MH^r_{p,\theta}} \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-p_0kr} \Big(\sum_{||s||_1=k} 1 \Big)^{\frac{\theta-p_0}{\theta}} \Big)^{1/p_0} \ll \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-p_0kr} k^{(d-1)\frac{\theta-p_0}{\theta}} \Big)^{1/p_0}$$

$$\asymp 2^{-rn} n^{(d-1)(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{\theta})}. \tag{2.8}$$

Из (2.8) с учетом замечания при получении неравенства (2.7) заключаем, что

$$\mathcal{E}_{Q_n}(f)_p \ll 2^{-rn} n^{(d-1)(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{\theta})}, \quad 1 < q = p < \infty, \quad \theta \ge p_0. \tag{2.9}$$

Если же $1 < q = p < \infty$ и $1 \le \theta < p_0$, то из (2.9) с учетом (1.9) получаем

$$\mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_p \le \mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^r_{p,p_0})_p \ll 2^{-rn}. \tag{2.10}$$

Для случая $1 \le q < p < \infty$, $1 \le \theta < \infty$ вследствие неравенства $||\cdot||_q \le ||\cdot||_p$ и доказанных выше неравенств (2.9) и (2.10) имеем

$$\mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \le \mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_p \ll 2^{-rn} n^{(d-1)(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{\theta})_+}.$$

Наконец, при $1 \le q < \infty$, $p = \infty$, $1 \le \theta < \infty$ в силу вложения $\mathbf{MH}^r_{\infty,\theta} \subset \mathbf{MH}^r_{q+1,\theta}$, а также неравенств (2.9) и (2.10) получим

$$\mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^r_{\infty,\theta})_q \le \mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^r_{\infty,\theta})_{q+1} \le \mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^r_{q+1,\theta})_{q+1} \ll 2^{-rn} n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}.$$

Теорема 1 доказана.

3. Наилучшее m-членное приближение классов $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ по тензорной системе Хаара

Пусть задана функция $f \in L_q([0,1]^d)$, $1 \le q \le \infty$, и множество $\mathcal{B} = \{g_j \in L_q([0,1]^d) : j = 1, 2, \dots\}$, $\overline{\operatorname{span} \mathcal{B}} = L_q([0,1]^d)$. Наилучшим m-членным приближением функции f по системе $\mathcal{B}$ в пространстве $L_q([0,1]^d)$ называется величина

$$\sigma_m(f, \mathcal{B})_q := \inf_{\substack{\Lambda \subset \mathbb{N} \\ \#\Lambda = m}} \inf_{a_j} \Big\| f - \sum_{j \in \Lambda} a_j g_j \Big\|_q, \quad m = 1, 2, \dots. \tag{3.1}$$

Для $F \subset L_q([0,1]^d)$ полагаем

$$\sigma_m(F, \mathcal{B})_q := \sup_{f \in F} \sigma_m(f, \mathcal{B})_q. \tag{3.2}$$

Величина $\sigma_m(f, \mathcal{B})_2$ была введена С. Б. Стечкиным [8] при формулировке критерия абсолютной сходимости ряда из коэффициентов Фурье для f по ортонормированной системе $\mathcal{B}$. Далее, исследования как величин (3.1), так и величин (3.2) для тех или иных функциональных классов проводились в многочисленных работах (см., например, [4; 6; 9–15; 7], где можно ознакомиться с более подробной информацией по данному вопросу, в частности, касательно приближения по кратной тригонометрической системе). Относительно исследования величин (3.1) и (3.2) для систем Хаара $\mathcal{H} = \{H_I\}_I$ отметим работы [16–23].

Рассмотрим в (3.2) в качестве $\mathcal{B}$ тензорную систему Хаара $\mathcal{H} = \{H_I\}_I$, а в качестве F — классы $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$, а затем — классы $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$.

Итак, для классов $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ имеет место следующий результат.

Теорема A [22; 23]. *Пусть $1 < p \le \infty$, $1 < q < \infty$, $1 \le \theta < \infty$, $1/p < r < 1$. Тогда для любого $m \ge 2$*

$$\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta}, \mathcal{H})_q \asymp m^{-r} \left(\log_2^{d-1} m\right)^{r+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}. \tag{3.3}$$

Заметим, что при $p = \infty$ теорема A доказана в [22], а при $1 < p < \infty$ — в [23].

Для более широких, чем $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$, классов $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ имеет место такой же, как и в теореме A, результат. Сформулируем его.

Теорема 2. *Пусть $1 < p \le \infty$, $1 < q < \infty$, $1 \le \theta < \infty$, $1/p < r < 1$. Тогда для любого $m \ge 2$*

$$\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta}, \mathcal{H})_q \asymp m^{-r} \left(\log_2^{d-1} m\right)^{r+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}. \tag{3.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Установим сначала оценку сверху для величины $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta}, \mathcal{H})_q$. При этом будет использоваться схема рассуждений, аналогичная той, которая применялась А. В. Андриановым [18] при получении оценки сверху для величины $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_p, \mathcal{H})_q$.

По заданному m выберем $n \in \mathbb{N}$, которое удовлетворяет соотношению

$$m \asymp 2^n n^{d-1}, \tag{3.5}$$

и представим функцию $f \in \mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ в виде

$$f = S_{Q_n}(f) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{||s||_1=k} \delta_s(f) = S_{Q_n}(f) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{I \in \Delta Q_k} c_I(f) H_I$$

$$= S_{Q_n}(f) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{||s||_1=k} \sum_{I \in \mathcal{D}_s} c_I(f) H_I, \tag{3.6}$$

где $\Delta Q_k := Q_k \backslash Q_{k-1}$.

Введем следующие обозначения

$$N_k := \#\{s \in \mathbb{N}^d \colon ||s||_1 = k\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$M_k := [\#\{\Delta Q_n\} 2^{-\eta(k-n)}], \quad k > n,$$

где $n \in \mathbb{N}$, а $\eta > 0$ — число, значение которого при $1 < p < \infty$ будет уточнено позже.

Заметим, что

$$N_k \asymp k^{d-1}, \tag{3.7}$$

$$M_k \asymp 2^n n^{d-1} 2^{-\eta(k-n)} \tag{3.8}$$

вследствие (2.5) и (2.1) соответственно.

Дальше, отталкиваясь от представления (3.6), опишем процедуру построения полинома P_m, которым будем приближать функцию f.

Для каждого $k = n+1, n+2, \ldots$ и $s\colon ||s||_1 = k$ найдем $\big[M_k/N_k\big]$ наибольших по модулю коэффициентов $c_I(f)$, $I \in \mathcal{D}_s$, в сумме

$$\sum_{I \in \mathcal{D}_s} c_I(f) H_I, \tag{3.9}$$

содержащейся в представлении (3.6).

Поскольку для функций Хаара (одной переменной) H_{I_j} с $|I_j| = 2^{-k_j}$, $k_j = 0, 1, \ldots$, при любом $p \in [1; \infty)$ и произвольных действительных a_{I_j} имеет место равенство [24]

$$\Big\| \sum_{|I_j| = 2^{-k_j}} a_{I_j} H_{I_j} \Big\|_p = 2^{k_j(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})} \Big(\sum_{|I_j| = 2^{-k_j}} |a_{I_j}|^p \Big)^{1/p},$$

то для функций H_I таких, что $I \in \mathcal{D}_s$, $||s||_1 = k$, имеем

$$||\delta_s(f)||_p = 2^{||s||_1(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})} \Big(\sum_{I \in \mathcal{D}_s} |c_I(f)|^p \Big)^{1/p} = \Big(\sum_{I \in \mathcal{D}_s} |c_I(f)|^p \Big)^{1/p} 2^{-k(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})}. \tag{3.10}$$

Соответствующие (3.10) равенства для $p = \infty$ будут иметь следующий вид:

$$||\delta_s(f)||_\infty = 2^{||s||_1/2} \max_{I \in \mathcal{D}_s} |c_I(f)| = 2^{k/2} \max_{I \in \mathcal{D}_s} |c_I(f)|. \tag{3.11}$$

Далее, вследствие (1.8) (1.6) и (3.10), для $1 < p < \infty$ можем записать

$$1 \geq \Big(\sum_{||s||_1=k} \Big(2^{r||s||_1} ||\delta_s(f)||_p \Big)^\theta \Big)^{1/\theta} = 2^{k(r - \frac{1}{p} + \frac{1}{2})} \Big(\sum_{||s||_1=k} \Big(\sum_{I \in \mathcal{D}_s} |c_I(f)|^p \Big)^{\theta/p} \Big)^{1/\theta}. \tag{3.12}$$

Если же $p=\infty$, то вследствие (1.8), (1.6) и (3.11) имеем

$$1 \geq \Bigg(\sum_{||s||_1=k} \Big(2^{r||s||_1}||\delta_s(f)||_\infty\Big)^\theta \Bigg)^{1/\theta} = 2^{k(r+\frac{1}{2})} \Bigg(\sum_{||s||_1=k} \max_{I\in\mathcal{D}_s} |c_I(f)|^\theta \Bigg)^{1/\theta}. \tag{3.13}$$

Итак, для каждого $k=n+1,n+2,\dots$ и s: $||s||_1=k$ выделим $\big[M_k/N_k\big]$ таких слагаемых $c_I(f)H_I$ из (3.9) (и одновременно из (3.6)), которым соответствуют наибольшие значения $|c_I(f)|$. По такому же принципу выделяем $\big[M_k/N_k\big]$ слагаемых $|c_I(f)|^p$ из суммы $\sum_{I\in\mathcal{D}_s}|c_I(f)|^p$ в (3.12) при $1<p<\infty$. Отметим, что в результате проделанной процедуры каждое из оставшихся в (3.12) слагаемых $|c_I(f)|^p$, $1<p<\infty$, а также каждый из коэффициентов, оставшихся в (3.6) и (3.9) слагаемых $c_I(f)H_I$, в силу (3.12) и (3.13) будет удовлетворять соотношению

$$|c_I(f)| \ll 2^{-k(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})}\left(\frac{N_k}{M_k}\right)^{1/p} k^{-\frac{d-1}{\theta}}, \quad 1<p\leq\infty. \tag{3.14}$$

Искомый полином P_m будет состоять из заданной формулой (2.3) суммы $S_{Q_n}(f)$ и всех тех слагаемых $c_I(f)H_I$ из (3.6), которые выделены в результате описанной выше процедуры. Убедимся, что количество слагаемых $c_I(f)H_I$ построенного полинома P_m равно по порядку m. Действительно, принимая во внимание (2.1), (3.7), (3.8) и (3.5), имеем

$$\#Q_n + \sum_{k=n+1}^{\infty}\left[\frac{M_k}{N_k}\right]k^{d-1} \asymp 2^n n^{d-1} + 2^n n^{d-1}\sum_{k=n+1}^{\infty}2^{-\eta(k-n)} \asymp 2^n n^{d-1} \asymp m.$$

Покажем, что построенный полином P_m реализует оценку сверху в (3.4). В силу теоремы Литтлвуда — Пэли, а также соотношений (3.6), (3.14), (3.7), (3.8), (2.5) получаем

$$||f-P_m||_q \asymp \left\| \Bigg(\sum_I |c_I(f-P_m)|^2\,|H_I|^2 \Bigg)^{1/2} \right\|_q$$

$$\ll \left\| \Bigg(\sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{I\in\Delta Q_k} 2^{-2k(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})}k^{-\frac{2(d-1)}{\theta}}\left(\frac{N_k}{M_k}\right)^{2/p} H_I^2 \Bigg)^{1/2} \right\|_q$$

$$= \left\| \Bigg(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-2k(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})}k^{-\frac{2(d-1)}{\theta}}\left(\frac{N_k}{M_k}\right)^{2/p} 2^k \sum_{I\in\Delta Q_k}\chi_I \Bigg)^{1/2} \right\|_q$$

$$\ll \Bigg(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-2k(r-\frac{1}{p})}k^{-\frac{2(d-1)}{\theta}}\left(\frac{k^{d-1}}{M_k}\right)^{2/p} \chi_{[0,1]^d}\sum_{||s||_1=k}1 \Bigg)^{1/2}$$

$$\asymp \Bigg(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-2k(r-\frac{1}{p})}\left(\frac{k^{d-1}}{M_k}\right)^{2/p} k^{(d-1)(1-\frac{2}{\theta})} \Bigg)^{1/2}$$

$$\asymp \Bigg(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-2k(r-\frac{1}{p})}2^{k\eta\frac{2}{p}-(\eta+1)\frac{2n}{p}}\,n^{-\frac{2}{p}(d-1)}k^{(d-1)(1-\frac{2}{\theta}+\frac{2}{p})} \Bigg)^{1/2}$$

$$= 2^{-(\eta+1)\frac{n}{p}}n^{-\frac{d-1}{p}}\Bigg(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-2k(r-\frac{1}{p}-\frac{\eta}{p})}k^{(d-1)(1-\frac{2}{\theta}+\frac{2}{p})} \Bigg)^{1/2}, \tag{3.15}$$

где через χ_A обозначен индикатор множества $A\subset\mathbb{R}^d$.

Поскольку $1/p<r<1$, то очевидным является существование такого $\eta>0$, для которого будет верным неравенство $r-1/p-\eta/p>0$. Поэтому при таком η из (3.15), учитывая (3.5), имеем

$$\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta},\mathcal{H})_q \ll 2^{-(\eta+1)\frac{n}{p}}\,n^{-\frac{d-1}{p}}\left(2^{-2n(r-\frac{1}{p}-\frac{\eta}{p})}n^{(d-1)(1-\frac{2}{\theta}+\frac{2}{p})}\right)^{1/2}$$

$$= 2^{-rn} n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})} \asymp m^{-r} \left(\log_2^{d-1} m\right)^{r+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}.$$

Оценка сверху установлена.

Оценка снизу в (3.4) следует из (3.3) вследствие вложения (1.10).

Теорема 2 доказана.

4. Замечания и комментарии к полученным результатам

З а м е ч а н и е 1. Для классов $\mathbf{MH}_p^r$ утверждения, аналогичные теоремам 1 и 2, ранее доказаны А. В. Андриановым [18].

З а м е ч а н и е 2. При $d = 1$ результаты, содержащиеся в теоремах 1 и 2, известны (см. [18]). Констатация этого факта основана на (1.11).

З а м е ч а н и е 3. Оценка снизу в теореме 2, как видно из доказательства, справедлива при $0 < r < 1$. Это с учетом неравенства $\sigma_m(f, \mathcal{H})_q \le \mathcal{E}_{Q_n}(f)_q$ при $m = \#Q_n$ позволяет записать

Следствие. *Пусть* $2 \le p \le \infty$, $1 < q < \infty$, $q \le p$, $2 \le \theta < \infty$, $0 < r < 1$, $m = \#Q_n$, *тогда*

$$\sigma_m(\mathbf{MH}_{p,\theta}^r, \mathcal{H})_q \asymp \mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}_{p,\theta}^r)_q \asymp 2^{-rn}\, n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

З а м е ч а н и е 4. В. С. Романюком [25] установлено (как следствие одного результата для произвольного натурального d), что при $d = 1, 1 \le p < \infty$, $1 < q \le \infty$, $(1/p - 1/q)_+ < r < 1/p$ имеет место оценка

$$\sigma_m(\mathbf{H}_p^r, \mathcal{H})_q \asymp m^{-r},$$

которая при допустимых следствием ограничениях на параметры p, q с учетом условия $m = \#Q_n$ содержится в этом следствии.

В заключение выражаем искреннюю благодарность рецензенту за ценные советы и замечания, которые способствовали улучшению изложения материала работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кашин Б.С., Саакян А.А.** Ортогональные ряды. 2-е изд., доп. М.: АФЦ, 1999. 550 с.
2. **Temlyakov V.N.** The best m-term approximation and greedy algorithms // Adv. Comput. Math. 1998. Vol. 8, no. 3. P. 249–265.
3. **Temlyakov V.N.** Some inequalities for multivariate Haar polynomials // East J. Appr. 1995. Vol. 1, no. 1. P. 61–72.
4. **Темляков В.Н.** Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН СССР. 1986. Т. 178. С. 1–112.
5. **Temlyakov V.N.** Approximation of periodic functions. Commack, New York: Nova Science Publishers, Inc., 1993. 419 p. (Comput. Math. and Anal. Ser.)
6. **Романюк А.С.** Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных / Ін-т математики НАН України. Київ, 2012. Т. 93 (Праці Інституту математики НАН України). 352 с.
7. **Темляков В.Н.** Конструктивные разреженные тригонометрические приближения и другие задачи для функций смешанной гладкости // Мат. сб. 2015. Т. 206, № 11. С. 131–160.
8. **Стечкин С.Б.** Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. 1955. Т. 102, № 2. С. 37–40.
9. **Исмагилов Р.С.** Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // Успехи мат. наук. 1974. Т. 29, № 3. С. 161–178.
10. **Кашин Б.С.** Об аппроксимационных свойствах полных ортонормированных систем // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 172. С. 187–191.
11. **Белинский Э.С.** Приближение “плавающей” системой экспонент на классах гладких периодических функций // Мат. сб. 1987. Т. 132, № 1. С. 20–27.
12. **Кашин Б.С., Темляков В.Н.** О наилучших m-членных приближениях и энтропии множеств в пространстве L_1 // Мат. заметки. 1994. Т. 56, № 5. С. 57–86.

13. **Temlyakov V.N.** Nonlinear methods of approximation // Found. Comput. Math. 2003. Vol. 3, no. 1. P. 33–107.
14. **Романюк А.С.** Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. математическая. 2003. Т. 67, № 2. С. 61–100.
15. **Temlyakov V.N.** Constructive sparse trigonometric approximation for functions with small mixed smoothness // arXiv: 1503.00282v1 [math.NA] 1 Mar 2015. P. 1–30. URL: http://arxiv.org/pdf/1503.00282v1.pdf.
16. **Temlyakov V.N.** Non-linear m-term approximation with regard to the multivariate Haar system // East J. Appr. 1998. Vol. 4, no. 1. P. 87–106.
17. **Andrianov A.V., Temlyakov V.N.** Best m-term approximation of functions from classes $MW^r_{q,\alpha}$ // Approx. Theory IX. 1998. Vol. 1. P. 7–14.
18. **Андрианов А.В.** Приближение функций из классов MH^r_p полиномами Хаара // Мат. заметки. 1999. Т. 66, № 3. С. 323–335.
19. **Andrianov A.V.** Nonlinear Haar approximation of functions with bounded mixed derivative // Wavelet analysis and multiresolution methods (Urbana-Champaign, IL, 1999). New York, 2000. P. 27–47. (Lecture Notes in Pure and Appl. Math.; vol. 212.)
20. **Освальд П.** Об N-членных приближениях по системе Хаара в H^s-нормах // Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа / под ред. С. М. Никольского. М.: АФЦ, 1999. С. 137–163.
21. **Стасюк С.А.** Приближение функций многих переменных классов H^Ω_p полиномами по системе Хаара // Anal. Math. 2009. Vol. 35, no. 4. P. 257–271.
22. **Стасюк С.А.** Наилучшее m-членное приближение классов $B^r_{\infty,\theta}$ функций многих переменных полиномами по системе Хаара // Укр. мат. журн. 2011. Т. 63, № 4. С. 549–555.
23. **Стасюк С.А.** Приближения классов $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных полиномами по системе Хаара // Укр. мат. вiсн. 2015. Т. 12, № 1. С. 97–109.
24. **Голубов Б.И.** Наилучшие приближения функций в метрике L_p полиномами Хаара и Уолша // Мат. сб. 1972. Т. 87(129), № 2. С. 254–274.
25. **Романюк В.С.** Конструктивная характеристика классов Гельдера и m-членные приближения по кратному базису Хаара // Укр. мат. журн. 2014. Т. 66, № 3. С. 349–360.

Стасюк Сергей Андреевич
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики НАН Украины, Киев
e-mail: stasyuk@imath.kiev.ua

Поступила 15.10.2014
Исправленный вариант 12.10.2015