ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 517.518.86

О НЕРАВЕНСТВЕ СЕГЁ — ТАЙКОВА ДЛЯ СОПРЯЖЕННЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ[1]

А. О. Серков

Г. Сегё в 1943 г. нашел наилучшую константу и все экстремальные полиномы в неравенстве между равномерной нормой сопряженного тригонометрического полинома и нормой самого полинома для полиномов с вещественными коэффициентами. В 1990 г. другим методом точная константа была также найдена Л.В. Тайковым. В данной статье выписаны все экстремальные полиномы с комплексными коэффициентами, также обсуждаются некоторые свойства экстремальных полиномов.

Ключевые слова: тригонометрический полином, сопряженный полином, равномерная норма, интерполяционная формула.

A. O. Serkov. On the Szegö–Taikov inequality for conjugate trigonometric polynomials.

In 1943, Szegö found the best constant and all extremal polynomials in the inequality between the uniform norm of a conjugate trigonometric polynomial and the norm of the polynomial with real coefficients. In 1990, Taikov also found the best constant by means of another method. In the present paper, we describe all extremal polynomials with complex coefficients and discuss some properties of the extremal polynomials.

Keywords: trigonometric polynomial, conjugate polynomial, uniform norm, interpolation foumula.

1. Постановка задачи. Формулировка и обсуждение результата

Пусть $\mathscr{T}_n = \mathscr{T}_n(\mathbb{P})$ есть множество тригонометрических полиномов

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

порядка (не выше) $n \geq 1$ с коэффициентами из поля $\mathbb{P} = \mathbb{R}$ вещественных чисел или поля $\mathbb{P} = \mathbb{C}$ комплексных чисел. Для полинома T_n через $\widetilde{T}_n$ обозначим сопряженный полином

$$\widetilde{T}_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(a_k \sin kx - b_k \cos kx). \tag{1.1}$$

На множестве $\mathscr{T}_n$ введем равномерную норму

$$\|T_n\| = \|T_n\|_{C_{2\pi}} = \max_{x\in[0,2\pi]} |T_n(x)|. \tag{1.2}$$

Обозначим через $C(n) = C(n,\mathbb{P})$ наименьшую константу в неравенстве

$$\|\widetilde{T}_n\| \leq C(n)\|T_n\| \tag{1.3}$$

для $T_n \in \mathscr{T}_n(\mathbb{P})$. Нетрудно видеть, что на самом деле $C(n,\mathbb{R}) = C(n,\mathbb{C})$. Действительно, с одной стороны, $C(n,\mathbb{R}) \leq C(n,\mathbb{C})$. С другой стороны, если T_n есть экстремальный полином в неравенстве (1.3) на множестве $\mathscr{T}_n(\mathbb{C})$ и $a \in \mathbb{R}$ — точка, в которой достигается равномерная норма его сопряженного, то полином

$$Q_n(x) = \overline{\widetilde{T}_n(a)}T_n(x) + \widetilde{T}_n(a)\overline{T_n(x)}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-02705), а также при финансовой поддержке Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства Российской Федерации, контракт № 02.A03.21.0006).

принадлежит $\mathscr{T}_n(\mathbb{R})$ и является экстремальным в (1.3) на множестве $\mathscr{T}_n(\mathbb{R})$.

В 1943 г. Г. Сегё [1] доказал, что

$$C(n) = \frac{2}{n+1} \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \operatorname{ctg}\Big(\frac{(2\ell+1)\pi}{2(n+1)}\Big).$$

В работе Сегё также выписаны все экстремальные полиномы с действительными коэффициентами. При этом оказалось, что при четном n экстремальный полином неединственный. А точнее, для всех n с точностью до мультипликативной константы и сдвига экстремальными являются полиномы

$$T_n^*(x) = \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} K_n\Big(x - \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1}\Big) - K_n\Big(x + \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1}\Big), \tag{1.4}$$

а для четных n экстремальными являются также полиномы

$$T_n^{**}(x) = T_n^{**}(x;\gamma) = T_n^*(x) + \gamma K_n(x-\pi), \quad \gamma \in \mathbb{R}, \quad |\gamma| \le 1. \tag{1.5}$$

Здесь и далее K_n обозначает ядро Фейера

$$K_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big(1 - \frac{k}{n+1}\Big)\cos kx = \frac{1}{2(n+1)}\Big(\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}\Big)^2. \tag{1.6}$$

В 1990 г. Л. В. Тайков [2], видимо, не зная работы Сегё, другим методом нашел величину $C(n)$ и показал, что полиномы T_n^* являются экстремальными. Отметим, что выражение (1.4) взято нами из работы Тайкова, в работе Сегё представление экстремальных полиномов, на наш взгляд, более сложное.

В работах Сегё и Тайкова отмечено, что

$$C(n) = \frac{2}{\pi}\ln n + O(1), \quad n \to \infty.$$

Более обстоятельно асимптотика $C(n)$ исследована в [3; 4].

Неравенство (1.3) относится к тематике точных неравенств Бернштейна и Сегё для тригонометрических полиномов; таким неравенствам в пространствах L_p, $0 \le p \le \infty$, к настоящему времени посвящен большой объем исследований (см., в частности, монографию [5], работы [6–8] и приведенную в них библиографию).

В данной статье описано все множество полиномов с комплексными коэффициентами, которые являются экстремальными в неравенстве (1.3), метод доказательства основан на свойстве неотрицательности ядра Фейера и отличен от метода Г. Сегё и Л. В. Тайкова.

При умножении экстремального полинома на мультипликативную константу свойство экстремальности полинома сохраняется. Операция сопряжения (1.1) и норма (1.2) инвариантны относительно произвольного сдвига аргумента. Поэтому свойство экстремальности полинома сохраняется и при любом сдвиге аргумента. Таким образом, если T_n — экстремальный полином неравенства (1.3), то при любых $A, a \in \mathbb{R}$ полином $AT_n(x+a)$ также является экстремальным. Имея в виду этот факт, будем говорить, что экстремальный полином определен с точностью до мультипликативной константы и сдвига аргумента.

Для четного $n = 2k$ рассмотрим полином (1.5) $T_n^{**}(x;\gamma)$ для комплексных γ. Исходя из (1.4), получаем для полинома (1.5) следующее представление:

$$T_n^{**}(x) = \sum_{\ell=0}^{n} \varepsilon_\ell K_n\Big(x - \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1}\Big), \tag{1.7}$$

где

$$\varepsilon_\ell = 1, \quad 0 \le \ell \le k-1; \quad \varepsilon_k = \gamma; \quad \varepsilon_\ell = -1, \quad k+1 \le \ell \le n. \tag{1.8}$$

Теорема 1. *С точностью до мультипликативной константы и сдвига аргумента в неравенстве* (1.3) *при нечетном n полином* (1.4) *является единственным экстремальным; для четного же n все экстремальные полиномы имеют вид* (1.5) *с* $\gamma \in \mathbb{C}$, $|\gamma| \le 1$.

Во множестве экстремальных полиномов неравенства (1.3) выделим полином Ψ_n в зависимости от четности n следующим образом. Для нечетного $n = 2k+1$ полагаем

$$\Psi_n(x) = T_n^*\Big(x + \frac{\pi}{2}\Big) = \sum_{\ell=0}^{k} \Big\{ K_n\Big(x + \frac{\pi}{2} - \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1}\Big) - K_n\Big(x + \frac{\pi}{2} + \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1}\Big)\Big\}. \qquad (1.9)$$

Для четного $n = 2k$ определим полином Ψ_n формулой

$$\Psi_n(x) = T_n^{**}\Big(x - \frac{n\pi}{2(n+1)}; 1\Big) = T_n^*\Big(x - \frac{n\pi}{2(n+1)}\Big) + K_n\Big(x - \pi - \frac{n\pi}{2(n+1)}\Big); \qquad (1.10)$$

этот полином получен из полинома (1.5) при $\gamma = 1$ с помощью специально выбранного сдвига аргумента. Исходя из (1.4) и (1.7), получаем для полинома (1.10) следующее представление:

$$\Psi_n(x) = \sum_{\ell=0}^{k} K_n\Big(x - \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1} - \frac{n\pi}{2(n+1)}\Big) - \sum_{\ell=0}^{k-1} K_n\Big(x + \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1} - \frac{n\pi}{2(n+1)}\Big). \qquad (1.11)$$

Теорема 2. *В неравенстве* (1.3) *существуют четные экстремальные полиномы. А именно, полином Ψ_n, определенный соотношениями* (1.9), (1.10), *является четным.*

Рассмотрим множества четных и нечетных тригонометрических полиномов

$$\mathscr{C}_n = \Big\{T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx,\ a_k \in \mathbb{C}\Big\}, \quad \mathscr{S}_n = \Big\{T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx,\ b_k \in \mathbb{C}\Big\}.$$

Полиномы

$$\mathscr{S}^+{}_n = \Big\{T_n \in \mathscr{S}_n, \quad T_n(x) \ge 0,\ x \in [0,\pi]\Big\}.$$

называют *неотрицательными синус-полиномами.* Родственные (1.3) задачи для неотрицательных синус-полиномов рассматриваются в работе [10]. В работе Тайкова получено представление [2, (3)]

$$T_n^*(x) = \frac{\sin x \cos^2 \frac{(n+1)x}{2}}{2(n+1)} \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{\sin \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1}}{\Big(\cos \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1} - \cos x\Big)^2},$$

из которого следует, что полином $T_n^* \in \mathscr{S}^+{}_n$. Кроме того, в силу теоремы 2 среди экстремальных полиномов существуют четные. Отсюда вытекают следующие равенства для величины $C(n)$:

$$C(n) = \max_{\substack{T_n \in \mathscr{T}_n \\ \|T_n\| \le 1}} \|\widetilde{T}_n\| = \max_{\substack{T_n \in \mathscr{C}_n \\ \|T_n\| \le 1}} \|\widetilde{T}_n\| = \max_{\substack{T_n \in \mathscr{S}_n \\ \|T_n\| \le 1}} \|\widetilde{T}_n\| = \max_{\substack{T_n \in \mathscr{S}_n^+ \\ \|T_n\| \le 1}} \|\widetilde{T}_n\|;$$

$$C(n) = \max_{\substack{T_n \in \mathscr{T}_n \\ \|T_n\| \le 1}} \sum_{k=1}^{n} b_k = \max_{\substack{T_n \in \mathscr{S}_n \\ \|T_n\| \le 1}} \sum_{k=1}^{n} b_k = \max_{\substack{T_n \in \mathscr{S}_n^+ \\ \|T_n\| \le 1}} \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

2. Вспомогательные утверждения. Доказательства теорем 1 и 2

В силу соображений инвариантности задачи исследования неравенства (1.3) и неравенства

$$|\widetilde{T}_n(0)| \le C(n)\|T_n\|_C, \quad T_n \in \mathscr{T}_n, \tag{2.1}$$

эквивалентны. А именно, наилучшие константы в этих неравенствах совпадают. Более того, если полином $T_n \in \mathscr{T}_n$ является экстремальным в неравенстве (2.1), то при любом $a \in \mathbb{R}$ полином $T_n(x+a)$ является экстремальным в неравенстве (1.3); обратно, если T_n — экстремальный полином неравенства (1.3) и $a \in \mathbb{R}$ — точка, в которой полином $\widetilde{T}_n$ достигает равномерной нормы, то $T_n(x+a)$ — экстремальный полином неравенства (2.1).

Следующее простое утверждение будет использоваться несколько раз в последующем изложении. Оно фактически содержится в работе Л. В. Тайкова [2] и основано на интерполяционной формуле А. Зигмунда [9, гл. X, § 3, (3.28)] для сопряженного полинома

$$\widetilde{T}_n\Big(\theta\Big) = -\frac{1}{n+1}\sum_{\ell=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\Big\{T_n\Big(\theta+\frac{(2\ell+1)\pi}{n+1}\Big)-T_n\Big(\theta-\frac{(2\ell+1)\pi}{n+1}\Big)\Big\}\operatorname{ctg}\Big(\frac{(2\ell+1)\pi}{2(n+1)}\Big). \tag{2.2}$$

Лемма 1. *Полином $T_n \in \mathscr{T}_n$ является экстремальным в неравенстве* (2.1) *в том и только в том случае, если при некотором выборе знака $\epsilon = e^{i\phi}$, $\phi \in \mathbb{R}$, для полинома ϵT_n выполняются соотношения*

$$\epsilon T_n\Big(\frac{(2j+1)\pi}{n+1}\Big) = \|T_n\|, \quad 0 \le j \le \Big\lfloor\frac{n-1}{2}\Big\rfloor; \tag{2.3}$$

$$\epsilon T_n\Big(-\frac{(2\ell+1)\pi}{n+1}\Big) = -\|T_n\|, \quad 0 \le j \le \Big\lfloor\frac{n-1}{2}\Big\rfloor. \tag{2.4}$$

Доказательство. Действительно, допустим, что полином $T_n \in \mathscr{T}_n$ удовлетворяет условиям (2.3) и (2.4). Для полинома ϵT_n формула (2.2) в точке $\theta = 0$ превращается в равенство $\epsilon\widetilde{T}_n(0) = C(n)\|T_n\|$, так что T_n обращает (2.1) в равенство. Обратно, если при любом выборе знака ϵ нарушается хотя бы одно из условий (2.3) или (2.4), то имеет место строгое неравенство $|\widetilde{T}_n(0)| < C(n)\|T_n\|$, так что полином T_n не является экстремальным в (2.1). Лемма доказана.

Приведем свойства ядра Фейера (1.6), необходимые в дальнейшем. Из представления (1.6) видно, что полином K_n неотрицательный и принимает экстремальные значения в точках $x_\ell = 2\pi\ell/(n+1)$, $\ell \in \mathbb{Z}$. А точнее,

$$K_n\Big(\frac{2\pi\ell}{n+1}\Big) = 0, \quad \ell \ne 2\nu(n+1), \quad \nu \in \mathbb{Z}; \tag{2.5}$$

$$K_n(2\nu\pi) = \|K_n\| = \frac{n+1}{2}, \quad \nu \in \mathbb{Z}. \tag{2.6}$$

Кроме того, формула [9, т. 2, гл. X, (6.4)] для $m = n+1$ принимает вид

$$\sum_{\ell=0}^{n} K_n(x_\ell - x) = \sum_{\ell=0}^{n} K_n(x - x_\ell) = \frac{n+1}{2} = \|K_n\|. \tag{2.7}$$

Лемма 2. *Для четных n полином* (1.5) *является экстремальным в неравенстве* (1.3).

Доказательство. В условиях леммы коэффициенты (1.8) представления (1.7) полинома (1.5) обладают свойством $\max\{|\varepsilon_l| \colon 0 \le l \le n\} = 1$. Докажем, что в такой ситуации равномерная норма полинома (1.5) совпадает с нормой полинома Фейера:

$$\|T_n^{**}\| = \|K_n\| = \frac{n+1}{2}.$$

Для полиномов с вещественными коэффициентами этот факт содержится в [9, т. 2, гл. X, теорема (6.3)]. Для полиномов с комплексными коэффициентами доказательство аналогично. Действительно, используя представление (1.7), свойство неотрицательности ядра Фейера и равенство (2.7), получаем

$$|T_n^{**}(x)| \le \sum_{\ell=0}^{n} K_n\Big(x - \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1}\Big) = \sum_{\ell=0}^{n} K_n\Big(x - \frac{\pi}{n+1} - x_\ell\Big) = \|K_n\|.$$

В точках $t_j = (2j+1)\pi/(n+1),\ j \in \mathbb{Z}$, имеем

$$T_n^{**}(t_j) = \sum_{\ell=0}^{n} \varepsilon_\ell K_n\Big(\frac{2(j-\ell)\pi}{n+1}\Big). \tag{2.8}$$

Исходя из свойств (2.5) и (2.6) ядра Фейера, заключаем, что в сумме (2.8) отлично от нуля лишь одно слагаемое с $\ell = j$, и как следствие

$$T_n^{**}(t_j) = T_n^{**}\Big(\frac{2j+1}{n+1}\pi\Big) = \varepsilon_j \frac{n+1}{2}, \quad 0 \le j \le n.$$

Исходя из знаков ε_j, теперь нетрудно сделать вывод, что полином (1.5) удовлетворяет условиям леммы 1 со значением $\epsilon = 1$, а следовательно, является экстремальным в неравенстве (2.1). Лемма 2 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 1.

Случай 1. Число n нечетное: $n = 2k+1,\ k \ge 0$. Экстремальность полинома (1.4) доказана Г. Сегё и Л. В. Тайковым. Осталось убедиться, что произвольный экстремальный полином отличается от полинома (1.4) лишь постоянным множителем. Согласно лемме 1 экстремальный полином T_n неравенства (2.1) должен обладать свойствами (2.3) и (2.4) в $n+1$ точке

$$\pm t_j, \quad t_j = \frac{(2j+1)\pi}{n+1}, \quad 0 \le j \le \frac{n-1}{2}. \tag{2.9}$$

В этих же точках производная T_n' полинома равна нулю. Перечисленными свойствами обладает полином T_n^*. Отношение

$$A = \frac{T_n(\pm x_j)}{T_n^*(\pm x_j)}$$

не зависит от $j,\ 0 \le j \le (n-1)/2$. Полином $T_n - AT_n^*$ имеет на периоде $n+1$ двойных нулей в точках (2.9), а потому $T_n - AT_n^* \equiv 0$ или, что то же самое, $T_n = AT_n^*$. В случае нечетного n теорема доказана.

Случай 2. Число $n \ge 2$ четное. В силу леммы 2 полиномы $AT_n^{**}(x;\gamma)$, $A, \gamma \in \mathbb{C}$, $|\gamma| \le 1$, являются экстремальными в неравенстве (2.1). Убедимся теперь, что любой экстремальный полином T_n имеет такой вид; можно считать, что $T_n \not\equiv 0$. Согласно лемме 1 экстремальный полином T_n неравенства (2.1) должен обладать свойствами (2.3) и (2.4) в n точках

$$\pm t_j, \quad t_j = \frac{(2j+1)\pi}{n+1}, \quad 0 \le j \le \frac{n-2}{2}. \tag{2.10}$$

В этих же точках производная T_n' полинома T_n равна нулю. В результате имеем $2n$ (необходимых) условий на экстремальный полином. Величина $M^+(T_n) = T_n(t_j)$ не зависит от j для $0 \le j \le (n-2)/2$. Если необходимо, изменив знак полинома, можно считать, что $M^+(T_n) \ge 0$. Значение $T_n(\pi)$ удовлетворяет условию $|T_n(\pi)| \le \|T_n\|$, поэтому $T_n(\pi) = \gamma\|T_n\|$, где параметр $\gamma = \gamma(T_n)$ удовлетворяет условию $|\gamma| \le 1$.

Рассмотрим полином (1.5) со значением $\gamma = \gamma(T_n)$. Положим

$$A = \frac{M^+(T_n)}{\|T_n^{**}\|} = \frac{2\|T_n\|}{n+1}.$$

Полином $T_n - AT_n^{**}$ имеет на периоде $2n+1$ нуль с учетом их кратностей, а именно, двойные нули в n точках (2.10) и еще нуль в точке π (отличной от точек (2.10)). Поэтому $T_n - AT_n^{**} \equiv 0$ или, что то же самое, $T_n = AT_n^{**}$. В случае четного n теорема также доказана.

Доказательство теоремы 2.

Случай 1. Число n нечетное: $n = 2k+1,\ k \geq 0$. Нам предстоит доказать, что полином (1.9) является четным полиномом. Поскольку ядро Фейера (1.6) четное, то имеем

$$\Psi_n(-x) = \sum_{\ell=0}^{k} \Big\{ K_n\Big(-x + \frac{\pi}{2} - \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1}\Big) - K_n\Big(-x + \frac{\pi}{2} + \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1}\Big) \Big\}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{k} \Big\{ K_n\Big(x - \frac{\pi}{2} + \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1}\Big) - K_n\Big(x - \frac{\pi}{2} - \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1}\Big) \Big\}.$$

Заменив здесь ℓ на $k - \ell = (n-1)/2 - \ell = (n-1-2\ell)/2$, получаем

$$\Psi_n(-x) = \sum_{\ell=0}^{k} \Big\{ K_n\Big(x - \frac{\pi}{2} + \frac{(n-2\ell)\pi}{n+1}\Big) - K_n\Big(x - \frac{\pi}{2} - \frac{(n-2\ell)\pi}{n+1}\Big) \Big\}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{k} \Big\{ K_n\Big(x + \frac{\pi}{2} - \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1}\Big) - K_n\Big(x - 2\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1}\Big) \Big\}.$$

В силу свойства 2π-периодичности ядра Фейера последнее выражение совпадает с (1.9). Четность полинома (1.9) при нечетном значении номера n проверена.

Случай 2. Число n четное: $n = 2k,\ k \geq 1$. Нам предстоит доказать, что в данном случае полином (1.11) является четным. Положим

$$\Psi_n^+(x) = \sum_{\ell=0}^{k} K_n\Big(x - \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1} - \frac{n\pi}{2(n+1)}\Big), \tag{2.11}$$

$$\Psi_n^-(-x) = \sum_{\ell=0}^{k-1} K_n\Big(x + \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1} - \frac{n\pi}{2(n+1)}\Big). \tag{2.12}$$

В этих обозначениях $\Psi_n = \Psi_n^+ - \Psi_n^-$. Убедимся, что каждый из полиномов (2.11) и (2.12) является четным, тем самым утверждение леммы будет доказано и для четного n.

В силу четности ядра Фейера для полинома (2.12) имеем

$$\Psi_n^-(-x) = \sum_{\ell=0}^{k-1} K_n\Big(-x + \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1} - \frac{n\pi}{2(n+1)}\Big) = \sum_{\ell=0}^{k-1} K_n\Big(x - \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1} + \frac{n\pi}{2(n+1)}\Big).$$

Заменив в последней сумме ℓ на $k-1-\ell = n/2-1-\ell = (n-2-2\ell)/2$, $0 \leq \ell \leq k-1$, получаем для этого полинома представление

$$\Psi_n^-(-x) = \sum_{\ell=0}^{k-1} K_n\Big(x + \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1} - \frac{n\pi}{2(n+1)}\Big). \tag{2.13}$$

Сравнивая (2.12) и (2.13), видим, что полином (2.12) является четным.

Аналогично для полинома (2.11) имеем

$$\Psi_n^+(-x) = \sum_{\ell=0}^{k} K_n\Big(-x - \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1} - \frac{n\pi}{2(n+1)}\Big) = \sum_{\ell=0}^{k} K_n\Big(x + \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1} + \frac{n\pi}{2(n+1)}\Big).$$

В последней сумме заменим ℓ на $k-\ell=n/2-\ell=(n-2\ell)/2$, $0\le\ell\le k$. В результате получим выражение

$$\Psi_n^+(-x)=\sum_{\ell=0}^{k}K_n\Big(x-\frac{(2\ell+1)\pi}{n+1}-\frac{n\pi}{2(n+1)}+2\pi\Big). \tag{2.14}$$

Правые части (2.11) и (2.14) совпадают, т. е. полином (2.11) является четным. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Szegö G.** On conjugate trigonometric polynomials // American J. Math. 1943. Vol. 65, no. 4. P. 532–536.
2. **Тайков Л.В.** О сопряженных тригонометрических полиномах // Мат. заметки. 1990. Т. 48, вып. 4. С. 110–114.
3. **Günttner R.** On the norms of conjugate trigonometric polynomials // Acta Math. Hungar. 1995. Vol. 66, no. 4. P. 269–273.
4. **Jiang T.** Asymptotic expansion of norm associated with conjugate trigonometric polynomial // Per. Math. Hung. 1993. Vol. 27, no. 2. P. 89–93.
5. **Rahman Q.I., Schmeisser G.** Analytic Theory of Polynomials. Oxford: The Clarendon Press; Oxford University Press, 2002. 742 p. (London Mathematical Society Monographs. New Series; vol. 26.)
6. **Арестов В.В.** Точные неравенства для тригонометрических полиномов относительно интегральных функционалов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 1–15.
7. **Арестов В.В., Глазырина П.Ю.** Интегральные неравенства для алгебраических и тригонометрических полиномов // Докл. РАН. 2012. Т. 422, № 6. С. 727–731.
8. **Arestov V.V., Glazyrina P.Yu.** Sharp integral inequalities for fractional derivatives of trigonometric polynomials // J. Approx. Theory. 2012. Vol. 164, no. 11. P. 1501–1512.
9. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965. 537 с.
10. **Andreani R., Dimitrov D.K.** An extremal nonnegative sine polynomial // Rocky Mount. J. Math. 2003. Vol. 33, no. 3. P. 759–774.

Поступила 31.04.2015

Серков Андрей Олегович
магистрант
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета им. Б. Н. Ельцина
e-mail: aos@bmail.ru