ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 519.65

ДВУХМАСШТАБНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ B-$\mathcal{L}$-СПЛАЙНОВ С РАВНОМЕРНЫМИ УЗЛАМИ[1]

Е. Г. Пыткеев, В. Т. Шевалдин

В статье без применения аппарата гармонического анализа построены аналоги масштабирующих соотношений для базисных экспоненциальных сплайнов с равномерными узлами, соответствующих линейному дифференциальному оператору произвольного порядка с постоянными коэффициентами, все корни характеристического многочлена которого являются действительными.

Ключевые слова: базисные экспоненциальные сплайны, двухмасштабные соотношения, масштабирующая функция, линейный дифференциальный оператор.

E. G. Pytkeev, V. T. Shevaldin. Two-scale relations for B-$\mathcal{L}$-splines with uniform knots.

Analogs of scaling relations are constructed for basis exponential splines with uniform knots corresponding to a linear differential operator of arbitrary order with constant coefficients and real pairwise distinct roots of the characteristic polynomial; the construction does not employ techniques from harmonic analysis.

Keywords: basis exponential splines, two-scale relations, scaling function, linear differential operator.

Введение

В теории всплесков (см., например, [1–4]) для построения кратномасштабного анализа вложенных друг в друга замкнутых подпространств $\{V_j \subset L^2(\mathbb{R}),\ j \in \mathbb{Z}\}$ основную роль играют двухмасштабные соотношения для специально выбранной функции $\varphi:\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ (она называется *масштабирующей*) вида

$$\varphi(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \gamma_j \varphi(2x - jh) \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{0.1}$$

Здесь $h > 0$ — фиксированное число, которое обычно полагают равным 1. При построении всплесков с компактным носителем в качестве функции φ может быть выбран полиномиальный базисный сплайн (B-сплайн) $B_{r,h}(x)$ порядка r (степени $r-1$) с равномерными узлами $0, h, 2h, \ldots, rh$ (см., например, монографию [1] К. Чуи). Для этого сплайна существует несколько различных представлений (см., например, [1; 5]). Для функции $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ обозначим через

$$\Delta_h^r f(x) = \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} C_r^s f(x + sh), \quad C_r^s = \frac{r!}{s!(r-s)!}, \tag{0.2}$$

конечную разность r-го порядка с шагом $h > 0$. *Полиномиальным B-сплайном порядка r* (см., например, [5]) называется функция

$$B_{r,h}(x) = m_r(h)\Delta_h^r((x - rh)_+)^{r-1} \quad (x \in \mathbb{R}), \tag{0.3}$$

где $m_r(h) > 0$ — нормирующий множитель и $t_+ = \max\{0, t\}$. Нормирующий множитель $m_r(h)$ в равенстве (0.3) положим равным 1. В случае $\varphi(x) = B_{r,h}(x)$ коэффициенты γ_j в представлении (0.1) явно вычислены, а именно имеет место следующее равенство [1, гл. 4]:

$$B_{r,h}(x) = C_r^r B_{r,h}(2x) + C_r^{r-1} B_{r,h}(2x - h) + \cdots + C_r^0 B_{r,h}(2x - rh) \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{0.4}$$

[1]Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

Здесь C_r^j $(j = \overline{0,r})$ — биномиальные коэффициенты (см. (0.2)). Для B-$\mathcal{L}$-сплайнов (см., например, [6; 7] и определения в следующем разделе) с равномерными узлами, соответствующих произвольному линейному дифференциальному оператору $\mathcal{L}_r$ порядка r с постоянными коэффициентами вида

$$\mathcal{L}_r = \mathcal{L}_r(D) = \prod_{j=1}^{r}(D - \beta_j) \tag{0.5}$$

(D — оператор дифференцирования, $\beta_j \in \mathbb{C}$), в отличие от полиномиального случая $\mathcal{L}_r(D) = D^r$ (т. е. $\beta_j = 0$; $j = \overline{0,r}$), соотношение (0.1) может не иметь места, поскольку если функция $e^{\beta x}$ принадлежит ядру оператора $\mathcal{L}_r$, т. е. $e^{\beta x} \in \operatorname{Ker}\mathcal{L}_r$, то функция $e^{2\beta x}$, вообще говоря, не лежит в этом ядре.

В данной статье мы покажем, как преодолеть эту трудность и получить аналог соотношения (0.4) для B-$\mathcal{L}$-сплайнов с равномерными узлами в случае, когда все корни характеристического многочлена оператора $\mathcal{L}_r$ являются действительными. Кроме того, для таких операторов $\mathcal{L}_r$ нами будет предложен один из вариантов построения кратномасштабного анализа неортогональных ψ-всплесков (т. е. аналогов пространств V_j и W_j в [1]) с выбором в качестве масштабирующей функции B-$\mathcal{L}$-сплайна $B_{\mathcal{L}_{r,h}}$ с равномерными узлами (см. определение в следующем разделе). Отметим, что данная работа продолжает исследования второго автора [8; 9].

1. Масштабирующие соотношения

Дадим необходимые определения. Пусть $h > 0$, D — оператор дифференцирования, $r \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{L}_r = \mathcal{L}_r(D)$ — линейный дифференциальный оператор вида (0.5), причем все числа β_j $(j = \overline{1,r})$ в его представлении являются действительными. Характеристический многочлен оператора $\mathcal{L}_r$ может быть записан в виде

$$p_r(x) = p_{\mathcal{L}_{r,h}}(x) = \prod_{j=1}^{r}(x - \beta_j) \quad (\beta_j \in \mathbb{R}).$$

А. Шарма и И. Цимбаларио [10] для функций $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ построили разностный оператор

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_r} f(x) = \prod_{j=1}^{r}(T - e^{\beta_j h}E)f(x) = \sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\mu_s^{(r)}(h)f(x+sh), \tag{1.1}$$

соответствующий линейному дифференциальному оператору $\mathcal{L}_r$. Здесь $Tf(x) = f(x+h)$, E — тождественный оператор и числа $\mu_s^{(r)}(h)$ $(s = \overline{0,r})$ находятся из следующего равенства:

$$P_r(x) = P_{\mathcal{L}_{r,h}}(x) = \prod_{j=1}^{r}(x - e^{\beta_j h}) = \sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\mu_s^{(r)}(h)x^s. \tag{1.2}$$

Многочлен $P_r(x)$ является характеристическим многочленом разностного оператора $\Delta_h^{\mathcal{L}_r}$. Ясно, что

$$\mu_r^{(r)}(h) = 1, \quad \mu_{r-1}^{(r)}(h) = \sum_{j=1}^{r} e^{\beta_j h}, \ldots, \mu_0^{(r)}(h) = \prod_{j=1}^{r} e^{\beta_j h}.$$

Разностный оператор $\Delta_h^{\mathcal{L}_r}$ выбран таким образом, что для любой функции $f \in \operatorname{Ker}\mathcal{L}_r$ имеет место тождество $\Delta_h^{\mathcal{L}_r} f(x) \equiv 0$. В частности, если все $\beta_j = 0$ $(j = \overline{1,r})$, т. е. $\mathcal{L}_r = D^r$, то $\Delta_h^{\mathcal{L}_r} = \Delta_h^r$ — конечная разность (см. (0.2)) порядка r с шагом h и при этом

$$P_r(x) = (x-1)^r, \quad \mu_j^{(r)}(h) = C_r^j \quad (j = \overline{0,r}).$$

Пусть $\varphi_r = \varphi_r(x)$ — решение линейного однородного уравнения $\mathcal{L}_r(D)f = 0$, удовлетворяющее условиям $\varphi_r^{(j)}(0) = \delta_{j,r-1}$ $(j = \overline{0, r-1})$. Здесь $\delta_{j,r-1}$ — символ Кронекера. Отметим, что если все числа β_j попарно различны, то эта функция может быть записана в явном виде:

$$\varphi_r(x) = \sum_{j=1}^{r} e^{\beta_j x} \prod_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{r} (\beta_j - \beta_k)^{-1}.$$

B-$\mathcal{L}$-сплайн с равномерными узлами $0, h, 2h, \ldots, rh$, соответствующий линейному дифференциальному оператору $\mathcal{L}_r$ вида (0.5), определяется равенством (см. [6; 7])

$$B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x) = m_{\mathcal{L}_r}(h)\Delta_h^{\mathcal{L}_r}\varphi_r((x-rh)_+) \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{1.3}$$

Нормирующий множитель $m_{\mathcal{L}_r}(h)$ положим равным 1. Естественно называть такой сплайн экспоненциальным, поскольку $\beta_j \in \mathbb{R}$ $(j = \overline{1, r})$. Таким образом, с учетом (1.1) имеем

$$B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x) = \mu_r^{(r)}(h)\varphi_r(x_+) - \mu_{r-1}^{(r)}(h)\varphi_r((x-h)_+) + \cdots + (-1)^r\mu_0^{(r)}(h)\varphi_r((x-rh)_+). \tag{1.4}$$

Носителем B-$\mathcal{L}$-сплайна является отрезок $[0; rh]$, и при $r \geq 2$ $B_{\mathcal{L}_{r,h}} \in C^{r-2}(\mathbb{R})$. Наряду с функцией $B_{\mathcal{L}_{r,h}}$ рассмотрим функцию $B_{\mathcal{L}_{r,2h}}$ вида

$$B_{\mathcal{L}_{r,2h}}(x) = \Delta_{2h}^{\mathcal{L}_r}\varphi_r((x-2rh)_+) = \mu_r^{(r)}(2h)\varphi_r(x_+)$$

$$- \mu_{r-1}^{(r)}(2h)\varphi_r((x-2h)_+) + \cdots + (-1)^r\mu_0^{(r)}(2h)\varphi_r((x-2rh)_+), \tag{1.5}$$

которая получена из функции $B_{\mathcal{L}_{r,h}}$ формальной заменой параметра h на $2h$. Ясно, что график функции $B_{\mathcal{L}_{r,2h}}$ не является растяжением по горизонтальной оси графика функции $B_{\mathcal{L}_{r,h}}$. Носителем функции $B_{\mathcal{L}_{r,2h}}$ является отрезок $[0; 2rh]$, а узлами — точки $0, 2h, 4h, \ldots, 2rh$. Характеристический многочлен, соответствующий разностному оператору $\Delta_{2h}^{\mathcal{L}_r}$, имеет вид

$$P_{\mathcal{L}_{r,2h}}(x) = \prod_{j=1}^{r}(x^2 - e^{2\beta_j h}) = \sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\mu_s^{(r)}(2h)x^{2s}, \tag{1.6}$$

поскольку

$$\Delta_{2h}^{\mathcal{L}_r}f(x) = \prod_{j=1}^{r}(T^2 - e^{2\beta_j h}E)f(x) = \sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\mu_s^{(r)}(2h)f(x+2sh). \tag{1.7}$$

Нас интересуют возможность представления функции $B_{\mathcal{L}_{r,2h}}$ в виде

$$B_{\mathcal{L}_{r,2h}}(x) = \sum_{s\in\mathbb{Z}}\gamma_s B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x-(r-s)h) \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{1.8}$$

и явный вид коэффициентов γ_s, если последняя формула имеет место. Поскольку носитель $\operatorname{supp} B_{\mathcal{L}_{r,2h}} = [0; 2rh]$, то изучаемое равенство может быть записано в виде

$$B_{\mathcal{L}_{r,2h}}(x) = \sum_{s=0}^{r}\gamma_s B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x-(r-s)h) = \gamma_r B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x) + \gamma_{r-1}B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x-h) + \cdots + \gamma_0 B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x-rh). \tag{1.9}$$

Всюду в дальнейшем полагаем $\gamma_s = \gamma_s(h)$ $(s = \overline{0, r})$. Обычно в теории всплесков (см., например, монографию Ч. Чуи [1]) равенства типа (0.1) (равенство (1.8) похоже по конструкции на (0.1)) устанавливаются с применением аппарата гармонического анализа прямого и обратного преобразований Фурье. Наша цель в данном разделе — изложение двух других способов нахождения коэффициентов $\gamma_s = \gamma_s(h)$ $(s = \overline{0, r})$ в равенствах (1.8) и (1.9).

Теорема 1. *Имеет место равенство*

$$B_{\mathcal{L}_{r,2h}}(x) = \mu_r^{(r)}(h) B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x) + \mu_{r-1}^{(r)} B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x-h) + \cdots + \mu_0^{(r)}(h) B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x-rh),$$

в котором коэффициенты $\mu_s^{(r)}(h)$ $(s = \overline{0,r})$ *выводятся из формул* (1.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ниже будут приведены два различных доказательства теоремы 1. Первое основано на связи разностных операторов с их характеристическими многочленами, и его идея заимствована нами из работы С. Б. Стечкина [11], посвященной доказательству неравенства Джексона об оценке сверху наилучшего приближения в C непрерывной функции тригонометрическими полиномами через ее r-й модуль непрерывности, в котором конечные разности с большим шагом раскладываются в линейную комбинацию конечных разностей с шагом, в целое число раз меньшим исходного. Второй способ доказательства теоремы 1 — индуктивный.

С п о с о б 1. Воспользуемся связью между характеристическими многочленами $P_{\mathcal{L}_{r,h}}$ и $P_{\mathcal{L}_{r,2h}}$ разностных операторов $\Delta_h^{\mathcal{L}_r}$ и $\Delta_{2h}^{\mathcal{L}_r}$. Из равенств (1.2), (1.3), (1.6) и (1.7) следует, что коэффициенты $\gamma_s = \gamma_s(h)$ $(s = \overline{0,r})$ в формулах (1.8) и (1.9) могут быть найдены из равенства

$$\Delta_{2h}^{\mathcal{L}_r} f(x) = \gamma_r \Delta_h^{\mathcal{L}_r} f(x+rh) + \gamma_{r-1} \Delta_h^{\mathcal{L}_r}(x+(r-1)h) + \cdots + \gamma_0 \Delta_h^{\mathcal{L}_r} f(x). \tag{1.10}$$

Поскольку

$$\frac{P_{\mathcal{L}_{r,2h}}(x)}{P_{\mathcal{L}_{r,h}}(x)} = \frac{\prod_{j=1}^r (x^2 - e^{2\beta_j h})}{\prod_{j=1}^r (x - e^{\beta_j h})} = \prod_{j=1}^r (x + e^{\beta_j h}) = \sum_{s=0}^r \mu_s^{(r)}(h) x^s = \gamma_r x^r + \gamma_{r-1} x^{r-1} + \cdots + \gamma_1 x + \gamma_0,$$

то

$$\gamma_s = \mu_s^{(r)}(h) \quad (s = \overline{0,r}), \tag{1.11}$$

т. е. $\gamma_r = 1$, $\gamma_{r-1} = \sum_{j=1}^r e^{\beta_j h}, \ldots, \gamma_0 = \prod_{j=1}^r e^{\beta_j h}$ — коэффициенты при степенях x в многочлене $\prod_{j=1}^r (x + e^{\beta_j h})$.

С п о с о б 2. Проведем доказательство равенств (1.10) и (1.11) по индукции по r. Тогда из равенств (1.3) – (1.5) будет следовать утверждение теоремы 1. Вначале отметим, что

$$\Delta_h^{D-\beta} f(x) = (T - e^{\beta h} E) f(x) = f(x+h) - e^{\beta h} f(x),$$

$$\Delta_{2h}^{D-\beta} f(x) = (T^2 - e^{2\beta h} E) f(x) = f(x+2h) - e^{2\beta h} f(x).$$

Следовательно,

$$\Delta_{2h}^{D-\beta} f(x) = f(x+2h) - e^{\beta h} f(x+h) + e^{\beta h} f(x+h) - e^{2\beta h} f(x) = \Delta_h^{D-\beta} f(x+h) + e^{\beta h} \Delta_h^{D-\beta} f(x).$$

Это равенство можно считать базой индукции (т. е. равенство (1.10) имеет место при $r = 1$). Пусть

$$\mathcal{L}_{r-1} = \mathcal{L}_{r-1}(D) = \prod_{j=1}^{r-1} (D - \beta_j)$$

и

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_{r-1}} f(x) = \sum_{s=0}^{r-1} (-1)^{r-1-s} \mu_s^{(r-1)}(h) f(x+sh),$$

$$\Delta_{2h}^{\mathcal{L}_{r-1}} f(x) = \sum_{s=0}^{r-1} (-1)^{r-1-s} \mu_s^{(r-1)}(2h) f(x+2sh)$$

— разностные операторы с шагами h и $2h$, соответствующие оператору $\mathcal{L}_{r-1}$. По предположению индукции имеет место равенство

$$\Delta_{2h}^{\mathcal{L}_{r-1}} f(x) = \mu_{r-1}^{(r-1)}(h)\Delta_h^{\mathcal{L}_{r-1}} f(x+(r-1)h) + \cdots + \mu_0^{(r-1)}(h)\Delta_h^{\mathcal{L}_{r-1}} f(x).$$

Используя это равенство, базу индукции и соотношение

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_r} f(x) = \Delta_h^{D-\beta_r}(\Delta_h^{\mathcal{L}_{r-1}} f(x)),$$

получаем

$$\Delta_{2h}^{\mathcal{L}_r} f(x) = \sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\mu_s^{(r)}(2h) f(x+2sh) = \prod_{j=1}^{r}(T^2 - e^{2\beta_j h}E) f(x) = (T^2 - e^{2\beta_r h}E)\Delta_{2h}^{\mathcal{L}_{r-1}} f(x)$$

$$= \Delta_{2h}^{D-\beta_r}\big(\mu_{r-1}^{(r-1)}(h)\Delta_h^{\mathcal{L}_{r-1}} f(x+(r-1)h) + \cdots + \mu_0^{(r-1)}(h)\Delta_h^{\mathcal{L}_{r-1}} f(x)\big)$$

$$= \Delta_h^{D-\beta_r}\big(\mu_{r-1}^{(r-1)}(h)\Delta_h^{\mathcal{L}_{r-1}} f(x+rh) + \cdots + \mu_0^{(r-1)}(h)\Delta_h^{\mathcal{L}_{r-1}} f(x+h)\big)$$

$$+ e^{\beta_r h}\Delta_h^{D-\beta_r}\big(\mu_{r-1}^{(r-1)}(h)\Delta_h^{\mathcal{L}_{r-1}} f(x+(r-1)h) + \cdots + \mu_0^{(r-1)}(h)\Delta_h^{\mathcal{L}_{r-1}} f(x)\big)$$

$$= \mu_r^{(r)}(h)\Delta_h^{\mathcal{L}_r} f(x+rh) + \mu_{r-1}^{(r)}(h)\Delta_h^{\mathcal{L}_r} f(x+(r-1)h) + \cdots + \mu_0^{(r)}(h)\Delta_h^{\mathcal{L}_r} f(x),$$

поскольку

$$\mu_s^{(r)}(h) = \mu_{s-1}^{(r-1)}(h) + e^{\beta_r h}\mu_{s-1}^{(r-1)}(h) \quad (s = \overline{0,r}).$$

Последнее равенство хорошо известно (см., например, [12]). При этом считается, что $\mu_{-1}^{(r-1)}(h) = \mu_r^{(r-1)}(h) = 0$. Равенство (1.10) установлено, и тем самым теорема 1 доказана еще одним способом. $\square$

Следствие. *Для полиномиальных B-сплайнов $B_{r,h}(x)$ (см.* (0.3) *при $m_r(h) = 1$), т. е. в случае $\beta_j = 0$ $(j = \overline{1,r})$, имеет место следующий аналог равенства* (0.4) :

$$B_{r,2h}(x) = C_r^r B_{r,h}(x) + C_r^{r-1} B_{r,h}(x-h) + \cdots + C_r^0 B_{r,h}(x-rh).$$

З а м е ч а н и е 1. В теореме 1 установлен аналог двухмасштабного соотношения для B-$\mathcal{L}$-сплайнов с равномерными узлами. При этом расстояние между узлами сплайна при переходе от функции $B_{\mathcal{L}_{r,h}}$ к функции $B_{\mathcal{L}_{r,2h}}$ увеличивается в два раза. Из первого способа доказательства теоремы 1 становится ясно, как найти коэффициенты $\gamma_{s,k} = \gamma_{s,k}(h)$ и в аналогичном k-масштабном соотношении $(k = 3, 4, \ldots)$, т. е. в формуле

$$B_{\mathcal{L}_{r,kh}}(x) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} \gamma_{s,k} B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x-(r-s)h).$$

Для их нахождения нужно разделить соответствующий многочлен

$$P_{\mathcal{L}_{r,kh}}(x) = \prod_{j=1}^{r}(x^k - e^{k\beta_j h})$$

на многочлен $P_{\mathcal{L}_{r,h}}(x) = \prod_{j=1}^{r}(x - e^{\beta_j h})$ и вычислить коэффициенты алгебраического многочлена, полученного в результате указанного деления.

2. ψ-всплески

В монографии [1] Ч. Чуи теория ортогональных всплесков строится, как и в других книгах, с помощью комплексного преобразования Фурье. Общепринято обозначать через $\overline{z}$ число, комплексно сопряженное числу $z \in \mathbb{C}$. В [1, гл. 5] изучаются свойства ψ-всплесков, масштабирующая функция φ у которых имеет компактный носитель и является кососимметричной в следующем смысле: существует такое число $a \in \mathbb{R}$, что

$$\varphi(a+x) = \overline{\varphi(a-x)} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Для функций φ со значениями только в действительной области $\mathbb{R}$ это равенство принимает вид

$$\varphi(a+x) = \varphi(a-x) \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{2.1}$$

Хорошо известно (см., например, [6; 7]), что для B-$\mathcal{L}$-сплайна $\varphi(x) = B_{\mathcal{L}_{l,h}}(x)$ это равенство имеет место не всегда. А именно (2.1) справедливо тогда и только тогда, когда оператор $\mathcal{L}_r = \mathcal{L}_r(D)$ вида (0.5) является формально самосопряженным, т. е. удовлетворяет следующему равенству:

$$\mathcal{L}_r(-D) = (-1)^r \mathcal{L}_r(D).$$

При этом число $a = rh/2$ — середина носителя B-$\mathcal{L}$-сплайна $B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x)$. Кроме того, в [1, гл. 5], в частности, установлено, что если масштабирующее соотношение для функции φ имеет вид

$$\varphi(x) = \sum_{s=0}^{r} d_s \varphi(2x - s), \quad d_s \in \mathbb{C}, \quad d_0 \neq 0, \quad d_r \neq 0,$$

то соответствующий ψ-всплеск может быть записан следующим образом:

$$\psi(x) = \sum_{s=-r+1}^{1} (-1)^s \overline{d_{1-s}} \varphi(2x - s)$$

(см. [1, равенство (5.6.14)]). Поскольку ψ-всплески можно определять с точностью до сдвига аргумента, то, исходя из этих формул (в случае, если функция φ имеет компактный носитель), можно добиться того, что функция φ и некоторый сдвиг по действительной оси функции ψ будут иметь один и тот же носитель.

При построении ψ-всплесков (точнее, их аналогов) для B-$\mathcal{L}$-сплайна $\varphi(x) = B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x)$ будем действовать в соответствии с этим классическим кратномасштабным анализом. А именно ψ-всплеском назовем функцию вида

$$\psi_{\mathcal{L}_{r,h}}(x) = (-1)^{r+1}\mu_0^{(r)}(h) B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x) + (-1)^r \mu_1^{(r)}(h) B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x-h) + \dots - \mu_r^{(r)}(h) B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x - rh), \tag{2.2}$$

где функция $B_{\mathcal{L}_{r,h}}$ и числа $\mu_s^{(r)}(h)$ $(s = \overline{0,r})$ определены равенствами (1.2) и (1.4). Поскольку в дальнейших рассуждениях оператор $\mathcal{L}_r$ и число h у нас фиксированы, то для краткости будем записывать

$$\mu_s = \mu_s^{(r)}(h) \quad (s = \overline{0,r}).$$

В силу определения B-$\mathcal{L}$-сплайна имеем

$$\operatorname{supp} B_{\mathcal{L}_{r,2h}} = \operatorname{supp} \psi_{\mathcal{L}_{r,2h}} = [0; 2rh].$$

Системы функций $\{B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x-kh)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\{B_{\mathcal{L}_{r,2h}}(x-kh)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\{\psi_{\mathcal{L}_{r,2h}}(x-kh)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ линейно независимы на $\mathbb{R}$. Положим

$$V_1 = \operatorname{span}\{B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x-kh)\}_{k\in\mathbb{Z}}, \quad V_2 = \operatorname{span}\{B_{\mathcal{L}_{r,2h}}(x-kh)\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

и

$$W_2 = \operatorname{span}\{\psi_{\mathcal{L}_{r,2h}}(x-kh)\}_{k\in\mathbb{Z}}.$$

Ясно, что

$$V_2 \subset V_1.$$

Теорема 2. *Имеет место равенство*

$$V_2 + W_2 = V_1. \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства теоремы 2 требуется установить, что существуют такие действительные числа $\{a_j\}$ и $\{b_j\}$, что при $0 \le x \le rh$ имеет место тождество

$$B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x) \equiv \sum_j a_j B_{\mathcal{L}_{r,2h}}(x-jh) + \sum_j b_j \psi_{\mathcal{L}_{r,2h}}(x-jh).$$

Поскольку носителем функций $B_{\mathcal{L}_{r,2h}}(x)$ и $\psi_{\mathcal{L}_{r,2h}}(x)$ является отрезок $[0;2rh]$, то это тождество принимает вид

$$B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x) \equiv \sum_{j=-(2r-1)}^{r-1} a_j B_{\mathcal{L}_{r,2h}}(x-jh) + \sum_{j=-(2r-1)}^{r-1} b_j \psi_{\mathcal{L}_{r,2h}}(x-jh). \tag{2.4}$$

Из (2.4), теоремы 1 и (2.2) имеем

$$B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x) \equiv \sum_{j=-(2r-1)}^{r-1} \Big[a_j \sum_{s=0}^{r} \mu_s B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x-(r-s+j)h)$$

$$+ b_j \sum_{s=0}^{r} (-1)^{s+1}\mu_{r-s} B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x-(r-s+j)h)\Big]$$

$$= \sum_{s=0}^{r} \sum_{j=-(2r-1)}^{r-1} B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x-(r-s+j)h)\big[a_j\mu_s + (-1)^{s+1}\mu_{r-s}b_j\big].$$

В последнем равенстве положим $k = r-s+j$. Тогда

$$B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x) \equiv \sum_{s=0}^{r} \sum_{k=-r-s+1}^{2r-1-s} B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x-kh)[a_{k-r+s}\mu_s + (-1)^{s+1}\mu_{r-s}b_{k-r+s}]. \tag{2.5}$$

В (2.5) поменяем порядок суммирования. Получаем

$$B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x) \equiv \sum_{k=r}^{2r-1} B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x-kh) \sum_{s=0}^{2r-1-k} [a_{k-r+s}\mu_s + (-1)^{s+1}\mu_{r-s}b_{k-r+s}]$$

$$+ \sum_{k=-(r-1)}^{r-1} B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x-kh) \sum_{s=0}^{r} [a_{k-r+s}\mu_s + (-1)^{s+1}\mu_{r-s}b_{k-r+s}]$$

$$+ \sum_{k=-(2r-1)}^{-r} B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x-kh) \sum_{s=-r-k+1}^{r} [a_{k-r+s}\mu_s + (-1)^{s+1}\mu_{r-s}b_{k-r+s}]. \tag{2.6}$$

Мы уже отмечали, что система функций $\{B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x-kh)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ линейно независима. Поэтому из тождества (2.6) следует, что коэффициенты при $B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x-kh)$ $(k \ne 0)$ в правой части (2.6) должны равняться нулю, и только коэффициент при $B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x)$ будет равен 1. Это замечание означает, что тождество (2.6) равносильно системе $4r-1$ линейных алгебраических уравнений относительно $6r-2$ неизвестных коэффициентов $\{a_j\}_{j=-(2r-1)}^{r-1}$ и $\{b_j\}_{j=-(2r-1)}^{r-1}$. Эта система имеет вид

$$A\mathbf{x} = \mathbf{m}, \tag{2.7}$$

где $\mathbf{x} = \{\alpha_{r-1}, \beta_{r-1}, \dots, \alpha_0, \beta_0, \alpha_{-1}, \beta_{-1}, \dots, \alpha_{-(2r-1)}, \beta_{-(2r-1)}\}^T$, $\mathbf{m} = \{\underbrace{0, \dots, 0}_{2r-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{2r-1}\}^T$ и матрица $A = (\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2 \dots \mathbf{c}_{6r-3} \mathbf{c}_{6r-2})$ составлена из столбцов

$$\mathbf{c}_1 = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_r, 0, \dots, 0)^T,$$

$$\mathbf{c}_2 = (-\mu_r, \mu_{r-1}, \dots, (-1)^{r+1}\mu_0, 0, \dots, 0)^T,$$

$$\mathbf{c}_3 = (0, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_r, 0, \dots, 0)^T,$$

$$\mathbf{c}_4 = (0, -\mu_r, \mu_{r-1}, \dots, (-1)^{r+1}\mu_0, 0, \dots, 0)^T,$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\mathbf{c}_{6r-3} = (0, \dots, 0, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_r)^T,$$

$$\mathbf{c}_{6r-2} = (0, \dots, 0, -\mu_r, \mu_{r-1}, \dots, (-1)^{r+1}\mu_0)^T.$$

Отметим, что в каждом из столбцов $\mathbf{c}_j$ $(j = \overline{1, 6r-2})$ ровно $r+1$ подряд идущих элементов: $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_r$ в столбцах с нечетными номерами и $-\mu_r, \mu_{r-1}, \dots, (-1)^{r+1}\mu_0$ в столбцах с четными номерами — отличны от нуля, а остальные элементы равны нулю. Наша задача — показать, что у матрицы A существует минор порядка $4r-1$, который не равен нулю. Тогда система уравнений (2.7) будет совместна. Для построения такого минора из матрицы A удалим 2-й, 4-й, $\dots, 2(2r-1)$-й столбцы (всего $2r-1$ столбцов). Заметим, что на самом деле это действие равносильно тому, что в системе (2.7) (т. е. в равенстве (2.4)) можно положить $b_{r-1} = \dots = b_0 = b_{-1} = \dots = b_{-(r-1)} = 0$. Оставшийся минор M_{4r-1} порядка $4r-1$ имеет вид

$$M_{4r-1} = |\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_3, \dots, \mathbf{c}_{4r-3}, \mathbf{c}_{4r-1}, \mathbf{c}_{4r}, \dots, \mathbf{c}_{6r-2}|.$$

У выписанной матрицы в левом верхнем углу стоит квадратная матрица порядка $2r-1$, которая является диагональной (выше главной диагонали все элементы равны нулю), а на ее главной диагонали расположены одинаковые числа μ_0. Точнее, первые $2r-1$ строк M_{4r-1} имеют следующий вид: первая — $(\mu_0, 0, \dots, 0)$, вторая — $(\mu_1, \mu_0, 0, \dots, 0), \dots, (r+1)$-я — $(\mu_r, \mu_{r-1}, \dots, \mu_0, 0, \dots, 0)$, $(r+2)$-я — $(0, \mu_r, \mu_{r-1}, \dots, \mu_0, 0, \dots, 0), \dots, (2r-1)$-я — $(0, \dots, 0, \mu_r, \mu_{r-1}, \dots, \mu_0)$. В первой строке лишь $\mu_0 \neq 0$.Раскладываем M_{4r-1} по первой строке, получившийся определитель — по второй и т. д. Действуя таким образом $2r-1$ раз, получаем

$$M_{4r-1} = \mu_0^{2r-1}|K|, \tag{2.8}$$

где $|K|$ — определитель матрицы

$$K = \begin{pmatrix} \mu_0 & -\mu_r & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mu_1 & \mu_{r-1} & \mu_0 & -\mu_r & \cdots & 0 & 0 \\ \mu_2 & -\mu_{r-2} & \mu_1 & \mu_{r-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{r-1} & (-1)^r\mu_1 & \mu_{r-2} & (-1)^{r+1}\mu_2 & \cdots & \mu_0 & -\mu_r \\ \mu_r & (-1)^{r+1}\mu_0 & \mu_{r-1} & (-1)^r\mu_1 & \cdots & \mu_1 & \mu_{r-1} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_r & (-1)^{r+1}\mu_0 \end{pmatrix}.$$

Транспонируем матрицу K (при этом ее определитель не меняется) и у транспонированной матрицы переставим строки в нужном нам порядке. Тогда

$$|K| = (-1)^{\frac{(r-1)r}{2}} \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{r-1} & \mu_r & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_r \\ -\mu_r & \mu_{r-1} & -\mu_{r-2} & \cdots & (-1)^{r+1}\mu_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\mu_r & \mu_{r-1} & \cdots & (-1)^r\mu_1 & (-1)^{r+1}\mu_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\mu_r & \mu_{r-1} & \cdots & (-1)^{r+1}\mu_0 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Пусть $Q_n(x) = \tau_0 x^n + \tau_1 x^{n-1} + \cdots + \tau_n,\ \tau_0 \neq 0,\ Q_m(x) = \theta_0 x^m + \theta_1 x^{m-1} + \cdots + \theta_m,\ \theta_0 \neq 0,$ — два алгебраических многочлена. Определитель

$$R(Q_n, Q_m) = \begin{vmatrix} \tau_0 & \tau_1 & \cdots & \cdots & \tau_n & & & \\ & \tau_0 & \tau_1 & \cdots & \cdots & \tau_n & & \\ \cdots & & & \cdots & & & & \cdots \\ & & & & \tau_0 & \tau_1 & \cdots & \tau_n \\ \theta_0 & \theta_1 & \cdots & \cdots & & \theta_m & & \\ & \theta_0 & \theta_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \theta_m & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & & \theta_0 & \theta_1 & \cdots & \cdots & \theta_m \end{vmatrix}$$

называется *результантом многочленов* Q_n и Q_m (см., например, [13, гл. 1, § 3.1]). В нем первая строка $(\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m})$ сдвигается вправо $(m-1)$ раз, а $(m+1)$-я строка $(\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_m, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n})$ — $(n-1)$ раз. Поэтому $R(Q_n, Q_m)$ — определитель $(m+n)$-го порядка. Если оба многочлена разлагаются в произведение линейных сомножителей

$$Q_n(x) = \tau_0(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n), \quad x_i \in \mathbb{R} \quad (i = \overline{1, n}),$$

$$Q_m(x) = \theta_0(x - y_1)(x - y_2)\cdots(x - y_m), \quad y_j \in \mathbb{R} \quad (j = \overline{1, m}),$$

то

$$R(Q_n, Q_m) = \tau_0^m \theta_0^n \prod_{i,k} (x_i - y_k)$$

(см. [13, гл. 1, § 3.1]).

Рассмотрим два многочлена степени r: $\mu_0 x^r + \mu_1 x^{r-1} + \cdots + \mu_r$ и $-\mu_r x^r + \mu_{r-1} x^{r-1} - \cdots + (-1)^{r+1}\mu_0$, и сравним их коэффициенты со строками в определителе (2.9). В силу (1.2) имеем

$$-\mu_r x^r + \mu_{r-1} x^{r-1} - \cdots + (-1)^{r+1}\mu_0 = -P_r(x) = -\prod_{j=1}^{r} (x - e^{\beta_j h}).$$

С другой стороны,

$$\mu_0 x^r + \mu_1 x^{r-1} + \cdots + \mu_r = x^r P_r\Big(-\frac{1}{x}\Big)(-1)^r = \mu_r \prod_{j=1}^{r} (1 + x e^{\beta_j h}).$$

Таким образом, из свойств результанта следует, что

$$|K| = (-1)^{\frac{(r-1)r}{2}} R\Big((-x^r)P_r\Big(-\frac{1}{x}\Big), -P_r(x)\Big) = (-1)^{\frac{(r-1)r}{2}+1} \mu_0^r \mu_r^r \prod_{i,j=1}^{r} (e^{\beta_i h} + e^{-\beta_j h}).$$

Поскольку $\mu_0 = \prod_{s=1}^{r} e^{\beta_s h}$, $\mu_r = 1$ (см. (1.2)), то из последнего равенства окончательно получаем, что

$$|K| = (-1)^{\frac{(r-1)r+2}{2}} \prod_{s=1}^{r} e^{\beta_s h} \prod_{i,j=1}^{r} (e^{\beta_i h} + e^{-\beta_j h}) \neq 0.$$

Следовательно, в матрице A существует ненулевой минор M_{4r-1} (см. (2.8)) порядка $4r-1$, что позволяет вычислить коэффициенты $\{a_j\}_{j=-(2r-1)}^{r-1}$ и $\{b_j\}_{j=-(2r-1)}^{r-1}$ в тождестве (2.4). Теорема 2 полностью доказана. □

З а м е ч а н и е 2. Равенство (2.3) является ключевым для дальнейшего построения системы вложенных подпространств $\{V_j,\ j \in \mathbb{N}\}$. А именно положим $V_3 = \mathrm{span}\{B_{\mathcal{L}_{r,4h}}(x - 2kh)\}_{k\in\mathbb{Z}}, \ldots, V_{n+1} = \mathrm{span}\{B_{\mathcal{L}_{r,2^n h}}(x - 2^{n-1}kh)\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Тогда $W_3 = \mathrm{span}\{\psi_{\mathcal{L}_{r,4h}}(x - 2kh)\}_{k\in\mathbb{Z}}, \ldots$, $W_{n+1} = \mathrm{span}\{\psi_{\mathcal{L}_{r,2^n h}}(x - 2^{n-1}kh)\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Имеем $V_{n+1} \subset V_n$ и в силу теоремы 2 получаем, что $V_n = V_{n+1} + W_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$). При этом нетрудно проверить, что подпространства V_j и W_j между собой неортогональны (при обычном определении скалярного произведения двух действительных функций).

З а м е ч а н и е 3. Все рассуждения в теоремах 1 и 2 справедливы и для оператора $\mathcal{L}_r = D^r$ r-кратного дифференцирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Чуи Ч.** Введение в вейвлеты: пер. с англ. М.: Мир, 2001. 412 с.
2. **Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.Л.** Теория всплесков. М.: Физматлит, 2005. 616 с.
3. **Малла С.** Вейвлеты в обработке сплайнов. М.: Мир, 2005. 671 с.
4. **Добеши И.** 10 лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. 461 с.
5. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
6. **Morsche H.G. ter** Interpolation and extremal properties of $\mathcal{L}$-spline functions: Dissertation. Eindhoven: Technische Hogeschool Eindhoven, 1982. 124 p.
7. **Шевалдин В.Т.** Аппроксимация локальными сплайнами / УрО РАН. Екатеринбург, 2014. 198 с.
8. **Шевалдин В.Т.** Двухмасштабные соотношения для аналогов базисных сплайнов малых степеней // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 319–323.
9. **Шевалдин В.Т.** Калибровочные соотношения для B-$\mathcal{L}$-сплайнов // Современные проблемы математики: тез. 42-й Всеросс. мол. шк.-конф. / Ин-т математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2011. С. 151–153.
10. **Шарма А., Цимбаларио И.** Некоторые линейные дифференциальные операторы и обобщенные разности // Мат. заметки. 1977. Т. 21, № 2. С. 161–173.
11. **Стечкин С.Б.** О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. РАН. Серия математическая. 1951. Т. 15, № 3. С. 219–242.
12. **Шевалдин В.Т.** Некоторые задачи экстремальной интерполяции в среднем для линейных дифференциальных операторов // Тр. МИАН. 1983. Т. 164. С. 203–240.
13. **Прасолов В.В.** Многочлены. М.: МЦНМО, 2003. 336 с.

Пыткеев Евгений Георгиевич
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

Поступила 19.01.2015

Шевалдин Валерий Трифонович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru