ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 517.5

БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ БАЗИСЫ МУЛЬТИВСПЛЕСКОВ[1]

Е. А. Плещева

В работе приведен метод построения биортогональных базисов мультивсплесков по известным базисам мультимасштабирующих функций. Этот способ подобен способу, приведенному в моей совместной с Н. И. Черных статье 2014 г., и основан на том же принципе: в случае построения мультивсплесков на основе k мультимасштабирующих функций используется аналог векторного произведения векторов в $2k$-мерном пространстве.

Ключевые слова: мультивспеск, маска, биортогональный базис, масштабирующая функция, кратно-масштабный анализ.

E. A. Pleshcheva. Biorthogonal bases of multiwavelets.

A method for the construction of biorthogonal bases of multiwavelets from known bases of multiscaling functions is given. It is similar to the method presented in my 2014 paper coauthored with N.I. Chernykh and is based on the same principle: in the construction of multiwavelets based on k multiscaling functions, an analog of the vector product of vectors in a $2k$-dimensional space is used.

Keywords: multiwavelet, mask, biorthogonal basis, scaling function, multiresolution analysis.

Введение

В работе строятся биортогональные базисы пространств мультивсплесков. Пусть имеется две двойственные системы вложенных подпространств пространства $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$:

$$\ldots \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \ldots \ (j \in \mathbb{Z}), \quad \ldots \subset \widetilde{V}_j \subset \widetilde{V}_{j+1} \subset \ldots \ (j \in \mathbb{Z})$$

такие, что биортогональные базисы пространств $V_j, \widetilde{V}_j$ образованы соответственно сдвигами и сжатиями рисовских систем $\{2^{j/2}\varphi^l(2^jx-n)\colon l=\overline{1,k}, n\in\mathbb{Z}\}, \{2^{j/2}\widetilde{\varphi}^l(2^jx-n)\colon l=\overline{1,k}, n\in\mathbb{Z}\}$ k мультимасштабирующих функций $\{\varphi^1,\varphi^2,\ldots,\varphi^k\}$, $\{\widetilde{\varphi}^1,\widetilde{\varphi}^2,\ldots,\widetilde{\varphi}^k\}$ из $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$.

На основе таких систем функций в статье построены функции-мультивсплески $\{\psi^l(x)\colon l=\overline{1,k}\}, \{\widetilde{\psi}^l(x)\colon l=\overline{1,k}\}$ такие, что их сдвиги и сжатия порождают биортогональные базисы систем пространств всплесков $W_j, \widetilde{W}_j$ размерности $k>1$. Здесь, как и в случае $k=1$ (см., например, [2, гл. 3]), пространства всплесков обладают следующими свойствами:

1) $W_j \perp \widetilde{V}_j$, $\widetilde{W}_j \perp V_j$;

2) $V_j \bigoplus W_j = V_{j+1}$, $\widetilde{V}_j \bigoplus \widetilde{W}_j = \widetilde{V}_{j+1}$. Здесь $\bigoplus$ — прямая сумма подпространств.

Как отмечал Кейнерт [3, гл. 10], существуют способы построения мультивсплесков по известным мультимасштабирующим функциям, удовлетворяющим “минимальным условиям регулярности”. При дополнительных ограничениях на масштабирующие функции, например, если маски являются тригонометрическими полиномами, т. е. масштабирующие функции имеют компактный носитель [4], или в случае, когда масштабирующие функции симметричны [5], некоторые методы построения биортогональных базисов мультивсплесков, отличные от наших, были получены ранее.

Приведенный в работе новый метод построения биортогональных систем мультивсплесков по биортогональным системам мультимасштабирующих функций не использует никаких дополнительных ограничений на мультимасштабирующие функции, кроме естественных необходимых, указанных в первом абзаце, и является универсальным. Основным результатом статьи

[1]Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

является алгоритм, применяя который к заданным мультимасштабирующим биортогональным системам функций, порождающим базисы подпространств $V_j, \widetilde{V}_j$, получим биортогональные системы базисов пространств мультивсплесков.

Введем следующие обозначения:

$g_{j,n}(x) = 2^{j/2} g(2^j x - n)$; для скалярных и вектор-функций $g(x)$;

$\widehat{g}(\omega) = \mathbf{L}^2\text{-}\lim_{R\to\infty} \int_R^{-R} g(x) e^{-2\pi i x\omega} dx$ — преобразование Фурье в $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$;

$\langle u, v\rangle = \int_{\mathbb{R}} u(x)\overline{v(x)} dx$ — скалярное произведение функций в $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$;

$\mathbf{L}^2[0,1]$ — пространство 1-периодических интегрируемых с квадратом на $[0,1]$ функций;

$A^* = (\overline{A})^T$ — транспонированная комплексно сопряженная матрица для матрицы A;

$(u, v) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_m v_m$ — скалярное произведение m-мерных векторов в l^2_m;

$\langle A(x), B(x)\rangle = \int_{\mathbb{R}} A(x) B^*(x) dx$.

1. Пространства КМА размерности k

Введем следующее определение.

О п р е д е л е н и е. Последовательность вложенных друг в друга замкнутых подпространств

$$\ldots \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \ldots \ (j \in \mathbb{Z}) \tag{1.1}$$

пространства $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ называется его кратномасштабным анализом размерности k (КМА$_k$), если удовлетворяет следующим условиям:
а) $\overline{\bigcup_j V_j} = \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$; б) $\bigcap_j V_j = \{0\}$; в) $f(x) \in V_j \Leftrightarrow \forall l \in \mathbb{Z}\ \ f(x - l/2^j) \in V_j$; г) $f(x) \in V_0 \Leftrightarrow \forall j \in \mathbb{Z}\ \ f(2^j x) \in V_j$; д) найдутся такие функции $\varphi^s(x),\ s = \overline{1,k}$ из $V_0 \subset \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, что множество их целочисленных сдвигов $\varphi^s(x-n),\ s = \overline{1,k},\ n \in \mathbb{Z}$, образует базис Рисса пространства V_0.

Функции $\varphi^1(x), \varphi^2(x), \ldots, \varphi^k(x)$ называются *мультимасштабирующими*, если $\varphi^s(x) = \sum_{r=1}^k \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n^{s,r} \varphi_{1,n}(x)$.

Двойственный базис к базису из пункта д) состоит из целочисленных сдвигов функций $\widetilde{\varphi}^1(x), \widetilde{\varphi}^2(x), \ldots, \widetilde{\varphi}^k(x)$.

Ему соответствует система вложенных подпространств, также образующих КМА$_k$,

$$\ldots \subset \widetilde{V}_j \subset \widetilde{V}_{j+1} \subset \ldots \ (j \in \mathbb{Z}) \tag{1.2}$$

пространства $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, которая называется *двойственной системой подпространств.*

Системы $\varphi^1(x), \varphi^2(x), \ldots, \varphi^k(x)$ и $\widetilde{\varphi}^1(x), \widetilde{\varphi}^2(x), \ldots, \widetilde{\varphi}^k(x)$ называются *биортогональными*, если для них выполняется

$$\langle \varphi^r_{j,n}(x), \widetilde{\varphi}^s_{j,l}(x)\rangle = \delta_{r,s}\delta_{n,l}, \quad r, s = \overline{1,k}, \quad n, l \in \mathbb{Z}. \tag{1.3}$$

Для выполнения условий вложения пространств (1.1), (1.2) необходимо выполнение масштабирующих соотношений. Выпишем масштабирующие соотношения для функций, образующих базисы пространств КМА$_k$ и двойственных пространств, в векторной форме. Для этого введем масштабирующие вектор-функции

$$\overset{(\sim)}{\Phi}(x) = \Big(\overset{(\sim)}{\varphi}{}^1(x), \overset{(\sim)}{\varphi}{}^2(x), \ldots, \overset{(\sim)}{\varphi}{}^k(x)\Big)^T,$$

где с помощью верхнего символа $^{(\sim)}$ введено для краткости одновременно две формулы: соответственно для $\Phi(x), \varphi^1(x), \varphi^2(x), \ldots, \varphi^k(x)$ и $\widetilde{\Phi}(x), \widetilde{\varphi}^1(x), \widetilde{\varphi}^2(x), \ldots, \widetilde{\varphi}^k(x)$. Этот прием применяется и всюду далее.

Компоненты вектор-функций $\overset{(\sim)}{\Phi}_{j,n}(x) = 2^{j/2}\overset{(\sim)}{\Phi}(2^j x - n)$ образуют базисы Рисса пространств $\overset{(\sim)}{V}_j$. В терминах вектор-функций $\Phi(x), \widetilde{\Phi}(x)$ масштабирующие соотношения выглядят следующим образом:

$$\overset{(\sim)}{\Phi}(x) \overset{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overset{(\sim)}{H}_n \overset{(\sim)}{\Phi}_{1,n}(x) \tag{1.4}$$

с матричными коэффициентами

$$\overset{(\sim)}{H}_n = \begin{pmatrix} \overset{(\sim)}{h}{}^{1,1}_n & \overset{(\sim)}{h}{}^{1,2}_n & \dots & \overset{(\sim)}{h}{}^{1,k}_n \\ \overset{(\sim)}{h}{}^{2,1}_n & \overset{(\sim)}{h}{}^{2,2}_n & \dots & \overset{(\sim)}{h}{}^{2,k}_n \\ \dots \\ \overset{(\sim)}{h}{}^{k,1}_n & \overset{(\sim)}{h}{}^{k,2}_n & \dots & \overset{(\sim)}{h}{}^{k,k}_n \end{pmatrix}$$

и с покомпонентной сходимостью в $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ рядов, составляющих (1.4).

После преобразования Фурье равенства (1.4) принимают вид

$$\widehat{\overset{(\sim)}{\Phi}}(\omega) = \overset{(\sim)}{M}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\widehat{\overset{(\sim)}{\Phi}}\Big(\frac{\omega}{2}\Big), \tag{1.5}$$

где

$$\widehat{\overset{(\sim)}{\Phi}}(\omega) = \Big(\widehat{\overset{(\sim)}{\varphi}{}^1}(\omega), \widehat{\overset{(\sim)}{\varphi}{}^2}(\omega), \dots, \widehat{\overset{(\sim)}{\varphi}{}^k}(\omega)\Big)^T,$$

$$\overset{(\sim)}{M}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\overset{(\sim)}{H}_n e^{-2\pi i n\omega} = \begin{pmatrix} \overset{(\sim)}{m}{}^{1,1}(\omega) & \overset{(\sim)}{m}{}^{1,2}(\omega) & \dots & \overset{(\sim)}{m}{}^{1,k}(\omega) \\ \overset{(\sim)}{m}{}^{2,1}(\omega) & \overset{(\sim)}{m}{}^{2,2}(\omega) & \dots & \overset{(\sim)}{m}{}^{2,k}(\omega) \\ \dots \\ \overset{(\sim)}{m}{}^{k,1}(\omega) & \overset{(\sim)}{m}{}^{k,2}(\omega) & \dots & \overset{(\sim)}{m}{}^{k,k}(\omega) \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Функции $\overset{(\sim)}{m}{}^{r,s}(\omega)$ — 1-периодические из пространства $\mathbf{L}^2[0,1]$. Матрицы $M(\omega), \widetilde{M}(\omega)$ называют *масками систем мультимасштабирующих функций.*

Пусть

$$\overset{(\sim)}{\mathfrak{M}}(\omega) = \Big[\overset{(\sim)}{M}(\omega); M\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\Big]$$

$$= \begin{pmatrix} \overset{(\sim)}{m}{}^{1,1}(\omega) & \dots & \overset{(\sim)}{m}{}^{1,k}(\omega) & \overset{(\sim)}{m}{}^{1,1}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) & \dots & \overset{(\sim)}{m}{}^{1,k}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) \\ \overset{(\sim)}{m}{}^{2,1}(\omega) & \dots & \overset{(\sim)}{m}{}^{2,k}(\omega) & \overset{(\sim)}{m}{}^{2,1}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) & \dots & \overset{(\sim)}{m}{}^{2,k}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) \\ \dots \\ \overset{(\sim)}{m}{}^{k,1}(\omega) & \dots & \overset{(\sim)}{m}{}^{k,k}(\omega) & \overset{(\sim)}{m}{}^{k,1}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) & \dots & \overset{(\sim)}{m}{}^{k,k}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Хорошо известно, что условия биортогональности (1.3) эквивалентны условию

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}}\widehat{\Phi}(\omega-l)[\widehat{\widetilde{\Phi}}(\omega-l)]^* \overset{\text{п.в.}}{=} I, \tag{1.8}$$

где I — единичная матрица размерности k.

Отсюда следует необходимое условие биортогональности (1.3) в терминах функций $M(\omega)$, $\widetilde{M}(\omega)$ (см., например, [5]): $M(\omega)\big(\widetilde{M}(\omega)\big)^* + M\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\Big(\widetilde{M}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\Big)^* = 1$ Перепишем теперь это условие в терминах функций $\mathfrak{M}(\omega), \widetilde{\mathfrak{M}}(\omega)$ по аналогии с [1]:

$$\mathfrak{M}(\omega)(\widetilde{\mathfrak{M}}(\omega))^* \overset{\text{п.в.}}{=} I. \tag{1.9}$$

2. Базисы пространств мультивсплесков

Построим пространства мультивсплесков $W_j, \widetilde{W}_j$ со свойствами

$$W_j \perp \widetilde{V}_j, \widetilde{W}_j \perp V_j, W_j \bigoplus V_j = V_{j+1}, \widetilde{W}_j \bigoplus \widetilde{V}_j = \widetilde{V}_{j+1}.$$

При этом требуется, чтобы базисы пространств W_j были образованы сдвигами k функций $\psi^1_{j,n}, \dots, \psi^k_{j,n}$, а базисы пространств $\widetilde{W}_j$ — сдвигами k функций $\widetilde{\psi}^1_{j,n}, \dots, \widetilde{\psi}^k_{j,n}$, которые между собой биортогональны, т. е. $\langle \psi^r(x), \widetilde{\psi}^s(x-n)\rangle = \delta_{r,s}\delta_{0,n},\ r,s = \overline{1,k},\ n \in \mathbb{Z}$.

Обозначим через $\Psi(x)$ вектор-столбец

$$\Psi(x) = \Big(\psi^1(x), \psi^2(x), \dots, \psi^k(x)\Big)^T, \quad \psi^s(x) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}), \quad s = \overline{1,k}, \tag{2.1}$$

и через $\widetilde{\Psi}(x)$ двойственную вектор-функцию

$$\widetilde{\Psi}(x) = \Big(\widetilde{\psi}^1(x), \widetilde{\psi}^2(x), \dots, \widetilde{\psi}^k(x)\Big)^T, \quad \widetilde{\psi}^s(x) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}), \quad s = \overline{1,k}. \tag{2.2}$$

Для них должно быть справедливо равенство $\langle \Psi(x), \widetilde{\Psi}(x-n)\rangle = I\delta_{0,n}$ или, что эквивалентно, условие, аналогичное условию (1.8):

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{\Psi}(\omega - l)[\widehat{\widetilde{\Psi}}(\omega - l)]^* \overset{\text{п.в.}}{=} I. \tag{2.3}$$

Достаточно построить такие базисы пространств $W_0, \widetilde{W}_0$. Для того чтобы функции ψ^s принадлежали пространству W_0, требуется выполнение следующих условий:

1) $\psi^s \in V_1$;

2) $\psi^s \perp \widetilde{\varphi}^r, r, s = \overline{1,k}$.

Аналогично функции $\widetilde{\psi}^s$ из пространства $\widetilde{W}_0$ должны удовлетворять условиям

1) $\widetilde{\psi}^s \in \widetilde{V}_1$;

2) $\widetilde{\psi}^s \perp \varphi^r,\ r, s = \overline{1,k}$.

Условия 1) означают, что $\overset{(\sim)}{\Psi}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overset{(\sim)}{H}{}^{\psi}_n \overset{(\sim)}{\Phi}_{1,n}(x)$, где $H^\psi_n, \widetilde{H}^\psi_n$ — матрицы коэффициентов размерности $n \times n$. После преобразования Фурье данные выражения примут вид

$$\widehat{\overset{(\sim)}{\Psi}}(\omega) = \overset{(\sim)}{M}{}^{\psi}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\widehat{\overset{(\sim)}{\Phi}}\Big(\frac{\omega}{2}\Big), \tag{2.4}$$

Здесь матрицы $\overset{(\sim)}{M}_\psi(\omega)$ и $\overset{(\sim)}{\mathfrak{M}}_\psi(\omega)$ имеют ту же структуру, что и матрицы в (1.6) и (1.7):

$$\overset{(\sim)}{\mathfrak{M}}_\psi(\omega) = \Big[\overset{(\sim)}{M}_\psi(\omega), \overset{(\sim)}{M}_\psi\Big(\omega + \frac{1}{2}\Big)\Big]. \tag{2.5}$$

Обратим внимание на отличие формул (2.4) от (1.5): (1.5) отражает свойства вектор-функции Φ ($\widetilde{\Phi}$), а (2.4) отражает связь между Φ ($\widetilde{\Phi}$) и Ψ ($\widetilde{\Psi}$).

Покажем, каким условиям должны удовлетворять матрицы $M^\psi(\omega), \widetilde{M}^\psi(\omega)$, чтобы выполнялись условия 2) и условия биортогональности для функций $\psi^s, \widetilde{\psi}^r$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* КМА$_k$ *и двойственный порождены биортогональными системами для функций* $\{\varphi^s(x), s = \overline{1,k}\}, \{\widetilde{\varphi}^s(x), s = \overline{1,k}\}$. *Тогда для биортогональности систем* $\{\psi^s(x), s = \overline{1,k}\}$, $\{\widetilde{\psi}^s(x), s = \overline{1,k}\}$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\mathfrak{M}^\psi(\omega)(\widetilde{\mathfrak{M}}^\psi(\omega))^* \overset{\textit{п.в.}}{=} I, \tag{2.6}$$

а для ортогональности пространств W_0 и $\widetilde{V}_0$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\mathfrak{M}^{\psi}(\omega)(\widetilde{\mathfrak{M}}(\omega))^* \overset{n.в.}{=} \mathbf{0}, \tag{2.7}$$

для ортогональности пространств $\widetilde{W}_0$ и V_0 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\widetilde{\mathfrak{M}}^{\psi}(\omega)(\mathfrak{M}(\omega))^* \overset{n.в.}{=} \mathbf{0}, \tag{2.8}$$

где $\mathbf{0}$ — нулевая матрица размерности $k \times k$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Требование (2.3) с учетом (2.4) и $(AB)^* = B^*A^*$ можно переписать в виде

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{\Psi}(\omega-l)\Big[\widehat{\widetilde{\Psi}}(\omega-l)\Big]^* = \sum_{l\in\mathbb{Z}} M^{\psi}\Big(\frac{\omega-l}{2}\Big)\widehat{\Phi}\Big(\frac{\omega-l}{2}\Big)\Big[\widehat{\widetilde{\Phi}}\Big(\frac{\omega-l}{2}\Big)\Big]^*\Big[\widetilde{M}^{\psi}\Big(\frac{\omega-l}{2}\Big)\Big]^* \overset{\text{п.в.}}{=} I. \tag{2.9}$$

Разложение последней суммы по известной схеме на две, по четным и по нечетным l, вместе с (1.8) влечет

$$I \overset{\text{п.в.}}{=} M^{\psi}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\Big[\widetilde{M}^{\psi}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\Big]^* + M^{\psi}\Big(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\Big)\Big[\widetilde{M}^{\psi}\Big(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\Big)\Big]^*. \tag{2.10}$$

Эти рассуждения, очевидно, обратимы: (2.10) с учетом равенства (1.8) при ω и $\omega + 1/2$ влечет (2.9), т. е. (2.3).

Легко проверить, что равенство (2.10) после замены $\omega/2$ на ω в терминах матриц $\mathfrak{M}^{\psi}(\omega), \widetilde{\mathfrak{M}}^{\psi}(\omega)$ переписывается в эквивалентной форме (2.6). Действительно, например, первый элемент первой строки этой матрицы равен

$$\sum_{s=1}^{k} m_{\psi}^{1,s}(\omega)\overline{\widetilde{m}_{\psi}^{1,s}(\omega)} + \sum_{s=1}^{k} m_{\psi}^{1,s}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\overline{\widetilde{m}_{\psi}^{1,s}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)},$$

где первая и вторая суммы являются первыми элементами первой строки матриц $M(\omega)[\widetilde{M}(\omega)]^*$ и $M^{\psi}(\omega+1/2)\big[\widetilde{M}^{\psi}(\omega+1/2)\big]^*$ соответственно. Первое утверждение теоремы 1 доказано.

Аналогично доказываются остальные утверждения. □

3. Конструкция базисов мультивсплесков

Пусть заданы матрицы $\mathfrak{M}(\omega), \widetilde{\mathfrak{M}}(\omega)$, определенные в (1.7). Построим по ним матрицы $\mathfrak{M}^{\psi}(\omega), \widetilde{\mathfrak{M}}^{\psi}(\omega)$, удовлетворяющие теореме 1. Начнем со случая $k = 2$, а далее распространим метод на все четные k. Для этого рассмотрим следующий определитель:

$$\overrightarrow{\widetilde{b}_1(\omega)} = det\begin{pmatrix} \overrightarrow{i_1} & \overrightarrow{i_2} & \overrightarrow{i_3} & \overrightarrow{i_4} \\ \overline{m^{1,1}}(\omega) & \overline{m^{1,2}}(\omega) & \overline{m^{1,1}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) & \overline{m^{1,2}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) \\ \overline{m^{2,1}}(\omega) & \overline{m^{2,2}}(\omega) & \overline{m^{2,1}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) & \overline{m^{2,2}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) \\ a^1(\omega) & a^2(\omega) & a^1\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) & a^2\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

где $\overrightarrow{i_s}$ — орты, $\overrightarrow{i_1} = (1,0,0,0), \ldots, \overrightarrow{i_4} = (0,0,0,1)$, $m^{r,s}(\omega)$ — элементы маски $M(\omega)$; вектор $\overrightarrow{a(\omega)} = \Big(a^1(\omega), a^2(\omega), a^1\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big), a^2\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\Big)$ линейно независим с векторами

$$\overrightarrow{\overline{m_1}(\omega)} = \Big(\overline{m^{1,1}}(\omega), \overline{m^{1,2}}(\omega), \overline{m^{1,1}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big), \overline{m^{1,2}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\Big),$$

$$\overrightarrow{\overline{m}_2(\omega)} = \left(\overline{m^{2,1}}(\omega), \overline{m^{2,2}}(\omega), \overline{m^{2,1}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big), \overline{m^{2,2}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\right),$$

а в остальном функции $a^1(\omega), a^2(\omega)$ — произвольные 1-периодические из $\mathbf{L}^2[0,1)$. Легко видеть, что получившийся вектор $\overrightarrow{\widetilde{b}_1(\omega)}$ ортогонален в пространстве l_4^2 векторам $\overrightarrow{m^1(\omega)}$, $\overrightarrow{m^2(\omega)}$.

Если положить $\overrightarrow{\widetilde{m}_\psi^1(\omega)} = \left(\widetilde{m}_\psi^{2,1}(\omega), \widetilde{m}_\psi^{2,2}(\omega), \widetilde{m}_\psi^{2,1}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big), \widetilde{m}_\psi^{2,2}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\right)$ равным вектору $\overrightarrow{\widetilde{b}_1(\omega)}$, это обеспечит первую нулевую строку в левой части (2.8).

Аналогично построим вектор $\overrightarrow{b_1(\omega)}$:

$$\overrightarrow{b_1(\omega)} = det\begin{pmatrix} \overrightarrow{i_1} & \overrightarrow{i_2} & \overrightarrow{i_3} & \overrightarrow{i_4} \\ \overline{\widetilde{m}^{1,1}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{1,2}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{1,1}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) & \overline{\widetilde{m}^{1,2}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) \\ \overline{\widetilde{m}^{2,1}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{2,2}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{2,1}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) & \overline{\widetilde{m}^{2,2}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) \\ \widetilde{a}^1(\omega) & \widetilde{a}^2(\omega) & \widetilde{a}^1\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) & \widetilde{a}^2\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

при этом функции $\widetilde{a}^1(\omega), \widetilde{a}^2(\omega)$ таковы, что вектор $\left(\widetilde{a}^1(\omega), \widetilde{a}^2(\omega), \widetilde{a}^1\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big), \widetilde{a}^2\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\right)$, линейно независим с векторами

$$\overrightarrow{\overline{\widetilde{m}}_1(\omega)} = \left(\overline{\widetilde{m}^{1,1}}(\omega), \overline{\widetilde{m}^{1,2}}(\omega), \overline{\widetilde{m}^{1,1}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big), \overline{\widetilde{m}^{1,2}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\right),$$

$$\overrightarrow{\overline{\widetilde{m}}_2(\omega)} = \left(\overline{\widetilde{m}^{2,1}}(\omega), \overline{\widetilde{m}^{2,2}}(\omega), \overline{\widetilde{m}^{2,1}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big), \overline{\widetilde{m}^{2,2}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\right).$$

Нормируем получившийся вектор в соответствии с условием, налагаемым (2.6) на первый элемент матрицы $\mathfrak{M}^\psi[\widetilde{\mathfrak{M}}^\psi]^*$. Положим $\overrightarrow{m_\psi^1(\omega)} := \left(m_\psi^{2,1}(\omega), m_\psi^{2,2}(\omega), m_\psi^{2,1}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big), m_\psi^{2,2}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\right) = c(\omega)\overrightarrow{b_1(\omega)}$, где $c(\omega) = \dfrac{1}{(\overrightarrow{\widetilde{b}_1(\omega)}, \overrightarrow{b_1(\omega)})}$, т. е.

$$\overrightarrow{m_\psi^2(\omega)} = \frac{\overrightarrow{b_1(\omega)}}{(\overrightarrow{\widetilde{b}_1(\omega)}, \overrightarrow{b_1(\omega)})}.$$

Чтобы получить векторы $\overrightarrow{m_\psi^2(\omega)}, \overrightarrow{\widetilde{m}_\psi^2(\omega)}$, перепишем определители (3.1), (3.2), подставив в них векторы $\overrightarrow{m_\psi^1(\omega)}, \overrightarrow{\widetilde{m}_\psi^1(\omega)}$.

Тогда получим

$$\overrightarrow{\widetilde{m}_\psi^2(\omega)} = det\begin{pmatrix} \overrightarrow{i_1} & \overrightarrow{i_2} & \overrightarrow{i_3} & \overrightarrow{i_4} \\ \overline{m^{1,1}}(\omega) & \overline{m^{1,2}}(\omega) & \overline{m^{1,1}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) & \overline{m^{1,2}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) \\ \overline{m^{2,1}}(\omega) & \overline{m^{2,2}}(\omega) & \overline{m^{2,1}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) & \overline{m^{2,2}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) \\ \overline{m_\psi^{1,1}}(\omega) & \overline{m_\psi^{1,2}}(\omega) & \overline{m_\psi^{1,1}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) & \overline{m_\psi^{1,2}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

$$\overrightarrow{m_\psi^2(\omega)} = det\begin{pmatrix} \overrightarrow{i_1} & \overrightarrow{i_2} & \overrightarrow{i_3} & \overrightarrow{i_4} \\ \overline{\widetilde{m}^{1,1}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{1,2}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{1,1}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) & \overline{\widetilde{m}^{1,2}}(\omega+\frac{1}{2}) \\ \overline{\widetilde{m}^{2,1}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{2,2}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{2,1}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) & \overline{\widetilde{m}^{2,2}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) \\ \overline{m_\psi^{1,1}}(\omega) & \overline{m_\psi^{1,2}}(\omega) & \overline{m_\psi^{1,1}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) & \overline{m_\psi^{1,2}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Легко проверить, что определенные таким образом векторы $\overrightarrow{m^s_\psi(\omega)}, \overrightarrow{\widetilde{m}^s_\psi(\omega)}$ удовлетворяют условиям теоремы 1, следовательно, по таким $\overrightarrow{m^s_\psi(\omega)}, \overrightarrow{\widetilde{m}^s_\psi(\omega)}$ восстанавливаются функции $\psi^s(x), \widetilde{\psi}^s(x)$ по их преобразованию Фурье (2.4).

Построим базисы мультивсплесков для случая $k = 3$ и метод их построения распространим на все нечетные k.

Рассмотрим вектор

$$\overrightarrow{\widetilde{b}_1(\omega)} = det \begin{pmatrix} \overrightarrow{i_1} & \overrightarrow{i_2} & \overrightarrow{i_3} & \overrightarrow{i_4} & \overrightarrow{i_5} & \overrightarrow{i_6} \\ \overline{m^{1,1}}(\omega) & \overline{m^{1,2}}(\omega) & \overline{m^{1,3}}(\omega) & \overline{m^{1,1}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{m^{1,2}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{m^{1,3}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ \overline{m^{2,1}}(\omega) & \overline{m^{2,2}}(\omega) & \overline{m^{2,3}}(\omega) & \overline{m^{2,1}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{m^{2,2}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{m^{2,3}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ \overline{m^{3,1}}(\omega) & \overline{m^{3,2}}(\omega) & \overline{m^{3,3}}(\omega) & \overline{m^{3,1}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{m^{3,2}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{m^{3,3}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ a_1^1(\omega) & a_1^2(\omega) & a_1^3(\omega) & a_1^1\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & a_1^2\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & a_1^3\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ a_2^1(\omega) & a_2^2(\omega) & a_2^3(\omega) & a_2^1\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & a_2^2\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & a_2^3\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Построенную 1-периодическую по ω вектор-функцию $\overrightarrow{\widetilde{b}_1(\omega)} = (\widetilde{b}_1^1(\omega), \widetilde{b}_1^2(\omega), \ldots, \widetilde{b}_1^6(\omega))$ нельзя положить равной $\Big(\widetilde{m}_\psi^{1,1}(\omega), \widetilde{m}_\psi^{1,2}(\omega), \widetilde{m}_\psi^{1,3}(\omega), \widetilde{m}_\psi^{1,1}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big), \widetilde{m}_\psi^{1,2}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big), \widetilde{m}_\psi^{1,3}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big)\Big)$, как было при $k = 2$, так как в силу нечетности числа перестановок столбцов алгебраических дополнений элементов первой строки матрицы в правой части равенства (3.5) будем иметь равенства $\widetilde{b}_1^s\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) = -\widetilde{b}_1^{3+s}(\omega),\ s = 1,2,3$, а не $\widetilde{b}_1^{3+s}(\omega)$. Преобразуем вектор $\overrightarrow{\widetilde{b}_1}(\omega)$ так, чтобы он удовлетворял нужному условию. Для этого умножим его на функцию $\lambda_1(\omega)$ с условием

$$\lambda_1(\omega) = -\lambda_1\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big). \tag{3.6}$$

Вектор $\lambda_1(\omega)\overrightarrow{\widetilde{b}_1(\omega)}$ в l_6^2 ортогонален всем $\overrightarrow{m^s(\omega)},\ s = 1,2,3$, и определяет вектор

$$\overrightarrow{\widetilde{m}^1_\psi(\omega)} := \lambda_1(\omega)\overrightarrow{\widetilde{b}_1(\omega)} = \big(\lambda_1(\omega)\widetilde{b}_1^1(\omega), \lambda_1(\omega)\widetilde{b}_1^2(\omega), \lambda_1(\omega)\widetilde{b}_1^3(\omega), \lambda_1(\omega)\widetilde{b}_1^4(\omega), \lambda_1(\omega)\widetilde{b}_1^5(\omega), \lambda_1(\omega)\widetilde{b}_1^6(\omega)\big).$$

Построим теперь вектор-функцию $\overrightarrow{b_1(\omega)} = (b_1^1(\omega), b_1^2(\omega), \ldots, b_1^6(\omega))$:

$$\overrightarrow{b_1(\omega)} = det \begin{pmatrix} \overrightarrow{i_1} & \overrightarrow{i_2} & \overrightarrow{i_3} & \overrightarrow{i_4} & \overrightarrow{i_5} & \overrightarrow{i_6} \\ \overline{\widetilde{m}^{1,1}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{1,2}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{1,3}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{1,1}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{\widetilde{m}^{1,2}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{\widetilde{m}^{1,3}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ \overline{\widetilde{m}^{2,1}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{2,2}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{2,3}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{2,1}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{\widetilde{m}^{2,2}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{\widetilde{m}^{2,3}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ \overline{\widetilde{m}^{3,1}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{3,2}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{3,3}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{3,1}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{\widetilde{m}^{3,2}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{\widetilde{m}^{3,3}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ \widetilde{a}_1^1(\omega) & \widetilde{a}_1^2(\omega) & \widetilde{a}_1^3(\omega) & \widetilde{a}_1^1\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \widetilde{a}_1^2\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \widetilde{a}_1^3\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ \widetilde{a}_2^1(\omega) & \widetilde{a}_2^2(\omega) & \widetilde{a}_2^3(\omega) & \widetilde{a}_2^1\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \widetilde{a}_2^2\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \widetilde{a}_2^3\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Вектор-функцию $\overrightarrow{m^1_\psi(\omega)}$, для которой выполняются условия 1-периодичности компонент и условия биортогональности (2.6), получим из вектор-функции $\overrightarrow{b_1(\omega)}$ следующим образом:

$$\overrightarrow{m^1_\psi(\omega)} = \frac{\overrightarrow{b_1(\omega)}}{\lambda_1(\omega)(\overrightarrow{\widetilde{b}_1}, \overrightarrow{b_1})}.$$

Подставим теперь функцию-строку $\overrightarrow{\widetilde{m}^1_\psi(\omega)}$ в определитель (3.7) вместо строки $\overrightarrow{\widetilde{a}_1(\omega)}$, а функцию-строку $\overrightarrow{m^1_\psi(\omega)}$ в определитель (3.5) вместо строки $\overrightarrow{a_1(\omega)}$. Результаты обозначим соответственно как $\overrightarrow{b_2}$ и $\overrightarrow{\widetilde{b}_2}$. По ним построим вектор-функции $\overrightarrow{m^2_\psi(\omega)}$ и $\overrightarrow{\widetilde{m}^2_\psi(\omega)}$ по формулам

$$\overrightarrow{m^2_\psi(\omega)} = \lambda_2(\omega)\overrightarrow{b_2}; \qquad \overrightarrow{\widetilde{m}^2_\psi(\omega)} = \frac{\overrightarrow{\widetilde{b}_2}}{\lambda_2(\omega)(\overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{\widetilde{b}_2})}.$$

Функция $\lambda_2(\omega)$, как и $\lambda_1(\omega)$, является 1-периодической и обладает свойством $\lambda_2(\omega) = -\lambda_2(\omega + 1/2)$.

Наконец, построим вектор-функции $\overrightarrow{b_3}$ и $\overrightarrow{\widetilde{b}_3}$, используя уже найденные $\overrightarrow{\widetilde{m}^1_\psi(\omega)}$, $\overrightarrow{m^1_\psi(\omega)}$, $\overrightarrow{\widetilde{m}^2_\psi(\omega)}$ и $\overrightarrow{m^2_\psi(\omega)}$:

$$\overrightarrow{\widetilde{b}_3(\omega)} = det\begin{pmatrix} \overrightarrow{i_1} & \overrightarrow{i_2} & \overrightarrow{i_3} & \overrightarrow{i_4} & \overrightarrow{i_5} & \overrightarrow{i_6} \\ \overline{m^{1,1}}(\omega) & \overline{m^{1,2}}(\omega) & \overline{m^{1,3}}(\omega) & \overline{m^{1,1}}\Big(\omega+\dfrac12\Big) & \overline{m^{1,2}}\Big(\omega+\dfrac12\Big) & \overline{m^{1,3}}\Big(\omega+\dfrac12\Big) \\ \overline{m^{2,1}}(\omega) & \overline{m^{2,2}}(\omega) & \overline{m^{2,3}}(\omega) & \overline{m^{2,1}}\Big(\omega+\dfrac12\Big) & \overline{m^{2,2}}\Big(\omega+\dfrac12\Big) & \overline{m^{2,3}}\Big(\omega+\dfrac12\Big) \\ \overline{m^{3,1}}(\omega) & \overline{m^{3,2}}(\omega) & \overline{m^{3,3}}(\omega) & \overline{m^{3,1}}\Big(\omega+\dfrac12\Big) & \overline{m^{3,2}}\Big(\omega+\dfrac12\Big) & \overline{m^{3,3}}\Big(\omega+\dfrac12\Big) \\ \overline{m^{1,1}_\psi}(\omega) & \overline{m^{1,2}_\psi}(\omega) & \overline{m^{1,3}_\psi}(\omega) & \overline{m^{1,1}_\psi}\Big(\omega+\dfrac12\Big) & \overline{m^{1,2}_\psi}\Big(\omega+\dfrac12\Big) & \overline{m^{1,3}_\psi}\Big(\omega+\dfrac12\Big) \\ \overline{m^{2,1}_\psi}(\omega) & \overline{m^{2,2}_\psi}(\omega) & \overline{m^{2,3}_\psi(\omega)} & \overline{m^{2,1}_\psi}\Big(\omega+\dfrac12\Big) & \overline{m^{2,2}_\psi}\Big(\omega+\dfrac12\Big) & \overline{m^{2,3}_\psi}\Big(\omega+\dfrac12\Big) \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

$$\overrightarrow{b_3(\omega)} = det\begin{pmatrix} \overrightarrow{i_1} & \overrightarrow{i_2} & \overrightarrow{i_3} & \overrightarrow{i_4} & \overrightarrow{i_5} & \overrightarrow{i_6} \\ \overline{\widetilde{m}^{1,1}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{1,2}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{1,3}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{1,1}}\Big(\omega+\dfrac12\Big) & \overline{\widetilde{m}^{1,2}}\Big(\omega+\dfrac12\Big) & \overline{\widetilde{m}^{1,3}}\Big(\omega+\dfrac12\Big) \\ \overline{\widetilde{m}^{2,1}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{2,2}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{2,3}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{2,1}}\Big(\omega+\dfrac12\Big) & \overline{\widetilde{m}^{2,2}}\Big(\omega+\dfrac12\Big) & \overline{\widetilde{m}^{2,3}}\Big(\omega+\dfrac12\Big) \\ \overline{\widetilde{m}^{3,1}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{3,2}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{3,3}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{3,1}}\Big(\omega+\dfrac12\Big) & \overline{\widetilde{m}^{3,2}}\Big(\omega+\dfrac12\Big) & \overline{\widetilde{m}^{3,3}}\Big(\omega+\dfrac12\Big) \\ \overline{\widetilde{m}^{1,1}_\psi}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{1,2}_\psi}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{1,3}_\psi}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{1,1}_\psi}\Big(\omega+\dfrac12\Big) & \overline{\widetilde{m}^{1,2}_\psi}\Big(\omega+\dfrac12\Big) & \overline{\widetilde{m}^{1,3}_\psi}\Big(\omega+\dfrac12\Big) \\ \overline{\widetilde{m}^{2,1}_\psi}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{2,2}_\psi}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{2,3}_\psi(\omega)} & \overline{\widetilde{m}^{2,1}_\psi}\Big(\omega+\dfrac12\Big) & \overline{\widetilde{m}^{2,2}_\psi}(\omega+\dfrac12) & \overline{\widetilde{m}^{2,3}_\psi}\Big(\omega+\dfrac12\Big) \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

По векторам $\overrightarrow{b_3}$ и $\overrightarrow{\widetilde{b}_3}$ вектор-функции $\overrightarrow{m^3_\psi(\omega)}$ и $\overrightarrow{\widetilde{m}^3_\psi(\omega)}$ строятся по формулам

$$\overrightarrow{m^3_\psi(\omega)} = \lambda_3(\omega)\overrightarrow{b_3}; \qquad \overrightarrow{\widetilde{m}^3_\psi(\omega)} = \frac{\overrightarrow{\widetilde{b}_3}}{\lambda_3(\omega)(\overrightarrow{b_3}, \overrightarrow{\widetilde{b}_3})},$$

где $\lambda_3(\omega) = -\lambda_3\Big(\omega + \dfrac12\Big)$. Как и в случае $k = 1$ можно взять $\lambda_1(\omega) = \lambda_2(\omega) = \lambda_3(\omega) = e^{2\pi i\omega}$.

В общем случае метод построения биортогональных базисов мультивсплесков описывается следующим алгоритмом.

А л г о р и т м.

1) Построим вектор-функцию

$$\overrightarrow{\widetilde{b}_1(\omega)} = det\begin{pmatrix} \overrightarrow{i_1} & \dots & \overrightarrow{i_k} & \overrightarrow{i_{k+1}} & \dots & \overrightarrow{i_{2k}} \\ \overline{m^{1,1}}(\omega) & \dots & \overline{m^{1,k}}(\omega) & \overline{m^{1,1}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \dots & \overline{m^{1,k}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ \dots \\ \overline{m^{k,1}}(\omega) & \dots & \overline{m^{k,k}}(\omega) & \overline{m^{k,1}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \dots & \overline{m^{k,k}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ a_1^1(\omega) & \dots & a_1^k(\omega) & a_1^1\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \dots & a_1^k\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ \dots \\ a_{k-1}^1(\omega) & \dots & a_{k-1}^k(\omega) & a_{k-1}^1\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \dots & a_{k-1}^k\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

где векторы $\overrightarrow{a_s(\omega)}$ линейно независимы с векторами $\overrightarrow{\overline{m^s}(\omega)}$, а функции a_s^r — 1-периодические. Обозначим $\overrightarrow{\widetilde{m}_\psi^1(\omega)} := \overrightarrow{\widetilde{b}_1(\omega)}$, если k четно, и $\overrightarrow{\widetilde{m}_\psi^1(\omega)} := e^{2\pi i\omega}\overrightarrow{\widetilde{b}_1(\omega)}$, если k нечетно.

2) Далее строим двойственную вектор-функцию. Для этого введем

$$\overrightarrow{b_1(\omega)} = det\begin{pmatrix} \overrightarrow{i_1} & \dots & \overrightarrow{i_k} & \overrightarrow{i_{k+1}} & \dots & \overrightarrow{i_{2k}} \\ \overline{\widetilde{m}^{1,1}}(\omega) & \dots & \overline{\widetilde{m}^{1,k}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{1,1}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \dots & \overline{\widetilde{m}^{1,k}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ \dots \\ \overline{\widetilde{m}^{k,1}}(\omega) & \dots & \overline{\widetilde{m}^{k,k}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{k,1}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \dots & \overline{\widetilde{m}^{k,k}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ \widetilde{a}_1^1(\omega) & \dots & a_1^k(\omega) & a_1^1\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \dots & \widetilde{a}_1^k\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ \dots \\ \widetilde{a}_{k-1}^1(\omega) & \dots & \widetilde{a}_{k-1}^k(\omega) & \widetilde{a}_{k-1}^1\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \dots & \widetilde{a}_{k-1}^k\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

где также векторы $\overrightarrow{\widetilde{a}_s(\omega)}$, $s = 1, \dots, k-1$, линейно независимы с векторами $\overrightarrow{\overline{\widetilde{m}^q}(\omega)}$, $q = 1, \dots, k$, функции $\widetilde{a}_s^r$ — 1-периодические. Для согласования с условием биортогональности (2.6) функций $\psi_{j,k}^s(x), \widetilde{\psi}_{j,k}^s(x)$ в терминах масок нужно поделить вектор $\overrightarrow{b_1(\omega)}$ на скалярное произведение векторов $\overrightarrow{b_1(\omega)}$ и $\overrightarrow{\widetilde{b}_1(\omega)}$. Получаем, что нужный нам вектор определяется следующим образом:

$$\overrightarrow{m_\psi^1(\omega)} := \frac{\overrightarrow{b_1(\omega)}}{(\overrightarrow{b_1(\omega)}, \overrightarrow{\widetilde{b}_1(\omega)})} \qquad \text{для четных } k;$$

$$\overrightarrow{m_\psi^1(\omega)} := e^{-2\pi i\omega}\frac{\overrightarrow{b_1(\omega)}}{(\overrightarrow{b_1(\omega)}, \overrightarrow{\widetilde{b}_1(\omega)})} \qquad \text{для нечетных } k.$$

3) Заменим в (3.10), (3.11) строки $\overrightarrow{a_1(\omega)}$, $\overrightarrow{\widetilde{a}_1(\omega)}$ на $\overrightarrow{m_\psi^1(\omega)}$, $\overrightarrow{\widetilde{m}_\psi^1(\omega)}$. Результаты обозначим соответственно $\overrightarrow{\widetilde{b}_2(\omega)}$ и $\overrightarrow{b_2(\omega)}$. По этим вектор-функциям получим следующие вектор-функции:

$$\overrightarrow{\widetilde{m}_\psi^2(\omega)} := \overrightarrow{\widetilde{b}_2(\omega)}, \qquad \overrightarrow{m_\psi^2(\omega)} := \frac{\overrightarrow{b_2(\omega)}}{(\overrightarrow{b_2(\omega)}, \overrightarrow{\widetilde{b}_2(\omega)})} \qquad \text{для четных } k;$$

$$\overrightarrow{\widetilde{m}_\psi^2(\omega)} := e^{2\pi i\omega}\overrightarrow{\widetilde{b}_2(\omega)}, \qquad \overrightarrow{m_\psi^2(\omega)} := e^{-2\pi i\omega}\frac{\overrightarrow{b_2(\omega)}}{(\overrightarrow{b_2(\omega)}, \overrightarrow{\widetilde{b}_2(\omega)})} \qquad \text{для нечетных } k.$$

4) Последовательно заменяя в выражениях для $\overrightarrow{\widetilde{b}_s(\omega)}$ и $\overrightarrow{b_s(\omega)}$, $s = 1,\dots,k-1$, строки $\overrightarrow{a_s(\omega)}$, $\overrightarrow{\widetilde{a}_s(\omega)}$ на $\overrightarrow{m^s_\psi(\omega)}$, $\overrightarrow{\widetilde{m}^s_\psi(\omega)}$, получим выражения для $\overrightarrow{\widetilde{b}_{s+1}(\omega)}$ и $\overrightarrow{b_{s+1}(\omega)}$. По ним построим вектор-функции для четных k:

$$\overrightarrow{\widetilde{m}^{s+1}_\psi(\omega)} := \overrightarrow{b_{s+1}(\omega)}, \qquad \overrightarrow{m^{s+1}_\psi(\omega)} := \frac{\overrightarrow{b_{s+1}(\omega)}}{(\overrightarrow{b_{s+1}(\omega)}, \overrightarrow{\widetilde{b}_{s+1}(\omega)})},$$

а для нечетных k:

$$\overrightarrow{\widetilde{m}^{s+1}_\psi(\omega)} := e^{2\pi i\omega}\overrightarrow{b_{s+1}(\omega)}, \qquad \overrightarrow{m^{s+1}_\psi(\omega)} := e^{-2\pi i\omega}\frac{\overrightarrow{b_{s+1}(\omega)}}{(\overrightarrow{b_{s+1}(\omega)}, \overrightarrow{\widetilde{b}_{s+1}(\omega)})}. \qquad \square$$

Используя маски $M^\psi(\omega), \widetilde{M}^\psi(\omega)$ с построенными строками $\overrightarrow{\overset{(\sim)}{m}{}^s_\psi}$ для биортогональных систем мультивсплесков, как и в классическом случае, получаем выражение для преобразований Фурье мультивсплесков через преобразования Фурье мультимасштабирующих функций по формулам (2.4). После обратного преобразования Фурье будет известна вектор-функция (2.2), а значит, и набор мультивсплесков $\psi^s_{j,l}, \widetilde{\psi}^s_{j,l}$, $s = \overline{1,k}$, $j,l \in \mathbb{Z}$. К тому же результату можно прийти, разложив $M^\psi(\omega), \widetilde{M}^\psi(\omega)$ в тригонометрический ряд с матричными коэффициентами $H^\psi_n, \widetilde{H}^\psi_n$, а затем, воспользовавшись формулой (2.4) и свойствами преобразований Фурье, получить вектор-функции (2.2).

Докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Системы функций $\psi^s(x-n), \widetilde{\psi}^s(x-n)$, $s = \overline{1,k}$, $n \in \mathbb{Z}$, восстановленные по своим преобразованиям Фурье* (2.4), *где маски $M^\psi(\omega), \widetilde{M}^\psi(\omega)$ определены выше, образуют базисы пространств $W_0, \widetilde{W}_0$.*

Доказательство. Пусть $f(x) \in W_0$, т. е. 1) $f(x) \in V_1$; 2) $f(x) \perp \widetilde{V}_0$.

По условию 1) $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C^f_n \Phi_{1,n}(x)$, C^f_n — вектор-строка из $l^2_{2k}(\mathbb{Z})$ или, что равносильно,

$$\widehat{f}(\omega) = \overrightarrow{m^f\Big(\frac{\omega}{2}\Big)}\widehat{\Phi}\Big(\frac{\omega}{2}\Big),$$

где $\overrightarrow{m^f(\omega)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C^f_n e^{2\pi i n\omega}$ — 1-периодическая вектор-функция размерности k.

По условию 2) $\langle f(x), \widetilde{\varphi}^l(x-n)\rangle_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})} = 0$, $l = \overline{1,k}, n \in \mathbb{Z}$. В терминах преобразований Фурье с учетом (1.5) и суммируемости компонент вектор-функций $\widehat{f}(\omega)\widehat{\Phi}(\omega)$, это условие перепишется как

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \overrightarrow{m^f\Big(\frac{\omega}{2}\Big)}\widehat{\Phi}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\Big[e^{-2\pi i n\omega}\overrightarrow{\widetilde{m}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)}\widehat{\widetilde{\Phi}}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\Big]^* d\omega = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Разобьем интеграл на сумму по отрезкам $[\nu, \nu+1]$, затем перейдем к интегралу по отрезку $[0,1]$. Рассматривая отдельно сумму по четным и по нечетным ν, используя свойства произведения матриц и равенство (1.8), получаем эквивалентное равенство

$$\int\limits_0^1 \Big(\overrightarrow{m^f\Big(\frac{\omega}{2}\Big)}\Big[\overrightarrow{\widetilde{m}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)}\Big]^* + \overrightarrow{m^f\Big(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\Big)}\Big[\overrightarrow{\widetilde{m}\Big(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\Big)}\Big]^*\Big)e^{2\pi i n\omega}d\omega = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Это означает, что

$$\overrightarrow{m^f(\omega)}\big[\widetilde{M}(\omega)\big]^* + \overrightarrow{m^f\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)}\Big[\widetilde{M}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\Big]^* \overset{\text{п.в.}}{=} \overrightarrow{0}. \tag{3.12}$$

Так как вектор-столбцы матрицы M^{ψ} линейно независимы, то они образуют один из базисов пространства l^2_{2k} при каждом фиксированном ω на интервале $(0,1)$, и следовательно, $m^f(\omega)$ можно записать в виде

$$\overrightarrow{m^f(\omega)} = \overrightarrow{\alpha(\omega)} M^{\psi}(\omega), \tag{3.13}$$

где $\overrightarrow{\alpha(\omega)}$ — 1-периодический вектор-строка размерности k. Подставляя (3.13) в (3.12) и используя равенство (2.7), определим, каким условиям должно удовлетворять $\overrightarrow{\alpha(\omega)}$:

$$\overrightarrow{\alpha(\omega)} M^{\psi}(\omega)\big[\widetilde{M}(\omega)\big]^* + \overrightarrow{\alpha\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)} M^{\psi}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\Big[\widetilde{M}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\Big]^*$$

$$= \Big(\overrightarrow{\alpha\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)} - \overrightarrow{\alpha(\omega)}\Big) M^{\psi}(\omega+\frac{1}{2})\Big[\widetilde{M}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\Big]^* \overset{\text{п.в.}}{=} \overrightarrow{0},$$

откуда

$$\overrightarrow{\alpha\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)} = \overrightarrow{\alpha(\omega)}. \tag{3.14}$$

Поэтому

$$\widehat{f}(\omega) = \overrightarrow{\alpha(\frac{\omega}{2})} M^{\psi}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\widehat{\Phi}\Big(\frac{\omega}{2}\Big) = \overrightarrow{\alpha\Big(\frac{\omega}{2}\Big)}\widehat{\Psi}(\omega).$$

Здесь, как видно из (3.14), $\overrightarrow{\alpha(\omega)}$ — 1/2-периодический вектор-строка размерности k, следовательно, $\widehat{f}(\omega)$ — это произведение 1-периодического вектора на $\widehat{\Psi}(\omega)$. После обратного преобразования Фурье получим, что

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} D_n \Psi(x-n),$$

где D_n — коэффициенты из разложения

$$\alpha(\frac{\omega}{2}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} D_n e^{-2\pi i n\omega}.$$

Аналогичные выводы справедливы для $\widetilde{f} \in \widetilde{V}_1$, если в предыдущих рассуждениях заменить $f \in V_1$ на $\widetilde{f} \in \widetilde{V}_1$, $\widetilde{M}(\omega)$ на $M(\omega)$, $M^{\psi}(\omega)$ на $\widetilde{M}^{\psi}(\omega)$, $\overrightarrow{\alpha(\omega)}$ на $\overrightarrow{\widetilde{\alpha}(\omega)}$ и вместо (2.7) воспользоваться (2.8). В результате получим, что любую функцию $\widetilde{f} \in \widetilde{W}_0$ можно разложить по базису $\{\widetilde{\psi}^1(x-n), \ldots, \widetilde{\psi}^k(x-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$. □

Автор выражает благодарность Н. И. Черных за помощь и ценные замечания при подготовке статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Плещева Е.А., Черных Н.И.** Построение ортогональных базисов мультивсплесков // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 221–230.
2. **Добеши И.** Десять лекций по вэйвлетам. М.; Ижевск: Динамика, 2001, 464 с.
3. **Keinert F.** Wavelets and multiwavelets. London; New York: CRC Press, 2003, 275 p.
4. **Scopina M.** On construction of multivariate wavelet frames // Appl. Comput. Harmon. Anal. 2009. Vol. 27, no. 1. P. 55–72.
5. **Krivoshein A.V.** On construction of multivariate symmetric MRA-based wavelets // Appl. Comput. Harmon. Anal. 2014. Vol. 36, no. 2. P. 215–238.

Плещева Екатерина Александровна
Поступила 16.06.15
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: eplescheva@gmail.com