ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 517.5

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЯМИ ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА С МИНИМАЛЬНОЙ L_p-НОРМОЙ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА [1]

С. И. Новиков

Рассматривается задача интерполяции с минимальным значением L_p-нормы ($1 \le p < \infty$) оператора Лапласа интерполянтов для класса ограниченных в l_p-норме интерполируемых последовательностей. Интерполирование осуществляется в узлах сетки, образованной точками из $\mathbb{R}^n$ с целочисленными координатами. В работе доказано, что если $1 \le p < n/2$, то L_p-норма оператора Лапласа интерполянта может быть сколь угодно малой для любой интерполируемой последовательности. Для случая $n = 2$ найдены двусторонние оценки L_2-нормы оператора Лапласа наилучшего интерполянта.

Ключевые слова: интерполяция, оператор Лапласа, пространство Соболева, вложение.

S. I. Novikov. Interpolation by functions from a Sobolev space with minimum L_p-norm of the Laplace operator.

We consider an interpolation problem with minimum value of the L_p-norm ($1 \le p < \infty$) of the Laplace operator of interpolants for a class of interpolated sequences that are bounded in the l_p-norm. The data are interpolated at nodes of the grid formed by points from $\mathbb{R}^n$ with integer coordinates. It is proved that, if $1 \le p < n/2$, then the L_p-norm of the Laplace operator of the interpolant can be arbitrarily small for any sequence that is interpolated. Two-sided estimates for the L_2-norm of the Laplace operator of the best interpolant are found for the case $n = 2$.

Keywords: interpolation, Laplace operator, Sobolev space, embedding.

Введение

Настоящая работа посвящена задаче интерполирования класса ограниченных в l_p-норме ($1 \le p < \infty$) последовательностей гладкими функциями с минимальным значением L_p-нормы оператора Лапласа.

Сначала введем обозначения и сформулируем постановку задачи.

Пусть $n \in \mathbb{N},\ n \ge 2,\ 1 \le p < \infty$. Для последовательности вещественных чисел $z = \{z_j\}_{j\in\mathbb{Z}^n}$ полагаем

$$\|z\|_{l_p(\mathbb{Z}^n)} = \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}^n} |z_j|^p\Big)^{1/p}.$$

Класс интерполируемых последовательностей определяем следующим образом:

$$\mathfrak{M}_p \ = \ \big\{z\colon z = \{z_j\}_{j\in\mathbb{Z}^n},\ \|z\|_{l_p(\mathbb{Z}^n)} \le 1\big\}\,.$$

Пусть $C^m(\mathbb{R}^n)$ — множество всех функций, определенных на $\mathbb{R}^n$, у которых существуют и непрерывны на $\mathbb{R}^n$ все производные до порядка m включительно, $C^0(\mathbb{R}^n) = C(\mathbb{R}^n)$ — множество всех непрерывных на $\mathbb{R}^n$ функций. Через $L_p(\mathbb{R}^n)$ обозначаем стандартное пространство Лебега функций, интегрируемых на $\mathbb{R}^n$ с p-й степенью при $1 \le p < \infty$ и существенно ограниченных при $p = \infty$. Оно снабжено нормой

$$\|f\|_p = \begin{cases} \Big(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}, & 1 \le p < \infty,\\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 14-01-00496а), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4538.2014.1) и Программы УрО РАН (проект 15-16-1-4).

Через $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ обозначаем пространство бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}^n$ функций, а через $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ — пространство бесконечно дифференцируемых финитных (т. е. имеющих компактный носитель) функций.

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$, $D^\alpha u = \partial^{|\alpha|} u / \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}$ — производная порядка α, понимаемая в обобщенном смысле Соболева (слабая производная), т. е. $v = D^\alpha u$ если $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ выполняется равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} v(x)\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x) D^\alpha \varphi(x)\,dx.$$

Как известно (см., например, [1]), функция f принадлежит пространству Соболева $W_p^l(\mathbb{R}^n)$, если $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), |\alpha| = l$ существует производная $D^\alpha f$ в обобщенном смысле Соболева, и норма

$$\|f\|_{p,l} = \|f\|_p + \sum_{|\alpha|=l} \|D^\alpha f\|_p$$

конечна. Всюду далее

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_2^n}$$

— оператор Лапласа.

Класс функций, интерполирующих фиксированный элемент $z \in \mathfrak{M}_p$ в точках с целочисленными координатами, определяем следующим образом:

$$Y_p(z) \ = \ \left\{ u \in C^1(\mathbb{R}^n) \cap W_p^2(\mathbb{R}^n) \colon u(j) = z_j \ \ \forall j \in \mathbb{Z}^n \right\}.$$

Целью настоящей работы является исследование величины

$$A_p(\mathbb{R}^n) \ = \ \sup_{z \in \mathfrak{M}_p} \ \inf_{u \in Y_p(z)} \ \|\Delta u\|_p, \tag{0.1}$$

которую можно интерпретировать как L_p-норму оператора Лапласа, примененного к “наилучшей” функции из класса $Y_p(z)$ при интерполировании “наихудшей” последовательности $z \in \mathfrak{M}_p$.

Для фиксированной последовательности $z \in \mathfrak{M}_p$ задача $\|\Delta u\|_p \longrightarrow \inf\limits_{u \in Y_p(z)}$ представляет собой вариант интерполяционной проблемы типа Фавара (см., например, [2–4]). Поэтому задачу нахождения величины (0.1) можно рассматривать как интерполяционную проблему типа Фавара для всего класса $\mathfrak{M}_p$ интерполируемых последовательностей.

Определение величины (0.1) близко постановкам задач экстремальной функциональной интерполяции [5; 6], однако в настоящей работе класс интерполируемых последовательностей определяется несколько иначе, чем в этих и других работах, посвященных задачам экстремальной функциональной интерполяции.

Для $p = \infty$ величина (0.1) ранее изучалась в работе автора [7].

В разд. 1 настоящей работы мы доказываем, что если $1 \le p < n/2$, то $A_p(\mathbb{R}^n) = 0$. Как известно, согласно классической теореме вложения Соболева ([8, § 8], а также, например, [1, § 4.6]), если $n < lp$, то имеет место вложение класса $W_p^l(\mathbb{R}^n)$ в пространство $C(\mathbb{R}^n)$, а при $n > lp$ этого вложения нет. Сопоставляя наш результат с этой теоремой, приходим к выводу, что исследуемая величина равна нулю в тех случаях, когда пространство Соболева $W_p^2(\mathbb{R}^n)$ не вкладывается в пространство непрерывных функций. При $p = 2$ нетривиальными с точки зрения величины $A_p(\mathbb{R}^n)$ являются только три случая: $n = 2, 3, 4$. Оценкам исследуемой величины при $n = 2,\ p = 2$ посвящен разд. 2.

1. **Случай** $1 \le p < n/2$

Имеет место следующая

Теорема 1. *Если* $1 \le p < n/2$, *то* $A_p(\mathbb{R}^n) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем произвольную последовательность $z \in \mathfrak{M}_p$ и произвольное число $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Определяем функции f_j $(j \in \mathbb{Z}^n)$ следующим образом:

$$f_j(x) = \begin{cases} c_j \ e^{\frac{\varepsilon^2}{\|x-j\|^2-\varepsilon^2}}, & \text{если } \|x-j\| \le \varepsilon, \\ \quad 0, & \text{если } \|x-j\| > \varepsilon, \end{cases}$$

где c_j — константы, которые находим из условий интерполяции $f_j(j) = z_j$, $j \in \mathbb{Z}^n$. В результате получаем $c_j = e \ z_j$. Известно (см., например, [1]), что $f_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Заметим, что f_j и некоторые аналогичные им функции применяются в качестве усредняющих ядер, в частности при доказательстве плотности $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ в $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, и в пространствах Соболева (см., например, [1] и имеющиеся там ссылки).

Далее определяем функцию $F = F(z, x)$, полагая $F = \sum_{j\in\mathbb{Z}^n} f_j$. Поскольку внутренности носителей функций $f_j(x)$ при различных значениях $j \in \mathbb{Z}^n$ не пересекаются, то при любом фиксированном $x \in \mathbb{R}^n$ бесконечная сумма в определении функции F содержит не более одного ненулевого слагаемого.

Убедимся, что $F \in L_p(\mathbb{R}^n)$. Действительно, с помощью замены переменных $y = x - j$ и известного тождества (см., например, [9, с. 402–403])

$$\int\limits_{\|y\|\le R} \varphi(\|y\|)\, dy = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \int\limits_0^R \rho^{n-1}\varphi(\rho)\, d\rho, \quad R > 0, \tag{1.1}$$

где $\Gamma(\cdot)$ — известная Γ-функция Эйлера, получаем

$$\|F\|_p = \Biggl(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |F(x)|^p\, dx\Biggr)^{1/p} \ = \ e\ \Biggl(\sum_{j\in\mathbb{Z}^n} |z_j|^p \int\limits_{\|x-j\|\le\varepsilon} e^{\frac{\varepsilon^2 p}{\|x-j\|^2-\varepsilon^2}}\, dx\Biggr)^{1/p}$$

$$= \ e\Biggl(\frac{\pi^{n/2}\ \varepsilon^n\ p}{\Gamma(n/2)} \int\limits_p^{+\infty} \frac{(p-t)^{(n-2)/2}\ e^{-t}}{t^{(n+2)/2}}\, dt\Biggr)^{1/p} \Biggl(\sum_{j\in\mathbb{Z}^n} |z_j|^p\Biggr)^{1/p} < +\infty,$$

поскольку $z \in \mathfrak{M}_p$. Аналогичными вычислениями убеждаемся в том, что и все производные второго порядка функции F принадлежат пространству $L_p(\mathbb{R}^n)$. Таким образом $F \in Y_p(z)$.

Для вычисления оператора Лапласа от функции F воспользуемся тем известным фактом, что если функция φ зависит только от $r = \|x\|$, то

$$\Delta\varphi = \varphi''_{rr} + \frac{n-1}{r}\ \varphi'_r \ {}^{2}.$$

После выполнения элементарных преобразований имеем

$$\Delta\bigl(e^{\frac{\varepsilon^2}{\|x-j\|^2-\varepsilon^2}}\bigr) = -2\varepsilon^2 \frac{e^{\frac{\varepsilon^2}{\|x-j\|^2-\varepsilon^2}} \Bigl(\varepsilon^4 n - 2\varepsilon^2(n-1)\|x-j\|^2 + (n-4)\|x-j\|^4\Bigr)}{(\varepsilon^2 - \|x-j\|^2)^4}.$$

[2] Для того чтобы убедиться в справедливости этого равенства, достаточно записать оператор Лапласа в сферических координатах и положить равными нулю все производные функции φ по угловым координатам.

Используя это равенство, получаем

$$\|\Delta F\|_p = \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\Delta F(x)|^p \, dx \Big)^{1/p} = e\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}^n} z_j^p \int\limits_{\|x-j\|\le\varepsilon} \Big|\Delta\Big(e^{\frac{\varepsilon^2}{\|x-j\|^2-\varepsilon^2}}\Big)\Big|^p dx \Big)^{1/p}$$

$$\le C_1\varepsilon^2 \Big(\int\limits_{\|y\|\le\varepsilon} e^{\frac{\varepsilon^2 p}{\|y\|^2-\varepsilon^2}} \frac{\big|\varepsilon^4 n - 2\varepsilon^2(n-1)\|y\|^2 + (n-4)\|y\|^4\big|^p}{(\varepsilon^2-\|y\|^2)^{4p}} \, dy \Big)^{1/p} \|z\|_{l_p(\mathbb{Z}^n)},$$

где константа $C_1 > 0$ не зависит от ε. Теперь применяем (1.1) и в получившемся (однократном) интеграле выполняем замену, полагая $\rho = \varepsilon\tau$. В результате приходим к неравенству

$$\|\Delta F\|_p \ \le C_2 \ \varepsilon^{n/p-2} \ I_{p,n}^{1/p} \ \|z\|_{l_p(\mathbb{Z}^n)}, \tag{1.2}$$

в котором константа $C_2 > 0$ не зависит от ε, а

$$I_{p,n} = \int\limits_0^1 \tau^{n-1} e^{-\frac{p}{1-\tau^2}} \ \frac{\big|n - 2(n-1)\tau^2 + (n-4)\tau^4\big|^p}{(1-\tau^2)^{4p}} \, d\tau.$$

При $1 \le p < n/2$ этот не зависящий от ε интеграл сходится, поскольку, выполнив в нем замену переменной $t = p\tau^2/(1-\tau^2)$ и воспользовавшись неравенством условия теоремы, получаем, что $I_{p,n}$ оценивается сверху линейной комбинацией конечного числа Г-функций Эйлера.

Поскольку $n/p - 2 > 0$, правая часть неравенства (1.2) может быть сделана сколь угодно малой для любой последовательности $z \in \mathfrak{M}_p$. В результате для величины $A_p(\mathbb{R}^n)$ получаем

$$A_p(\mathbb{R}^n) \le \sup_{z\in\mathfrak{M}_p} \|\Delta F(z,\cdot)\|_p \le C\varepsilon^{n/p-2}$$

с не зависящей от ε константой $C > 0$. Теорема 1 доказана.

Заметим, что теорема 1 фактически доказана для интерполянтов из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, т. е. с избыточной гладкостью. Можно было бы определить класс интерполянтов $\widetilde{Y}_p(z)$, заменив в определении класса $Y_p(z)$ пространство $C^1(\mathbb{R}^n)$ на $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ [3], и аналогично величине (0.1) ввести в рассмотрение величину $\widetilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$, которая связана с ней очевидным неравенством $A_p(\mathbb{R}^n) \le \widetilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$. Теорема 1 фактически означает, что при $1 \le p < n/2$ выполняется $\widetilde{A}_p(\mathbb{R}^n) = 0$.

Пусть теперь $p = 2$. Согласно теореме 1 при всех $n > 4$ имеем $A_2(\mathbb{R}^n) = 0$. Следовательно, только для трех размерностей $n = 2, 3, 4$ можно ожидать, что величина (0.1) отлична от нуля.

2. Оценки величины $A_2(\mathbb{R}^2)$

Сначала получим оценку величины $A_2(\mathbb{R}^2)$ снизу. Для того чтобы это сделать, нам потребуются некоторые неравенства, которые будут доказаны ниже с помощью методов гармонического анализа. Поэтому прежде всего определим прямое и обратное преобразования Фурье.

Следуя [10, гл. 2, § 1], определяем преобразование Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{R}^2) \bigcap L_2(\mathbb{R}^2)$ следующим образом:

$$\widehat{f}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{2\pi i(x,y)} f(y) \, dy,$$

где i — мнимая единица, $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$ — скалярное произведение элементов $x, y \in \mathbb{R}^2$. Затем с помощью хорошо известной процедуры непрерывного продолжения определяем преобразование Фурье на всем пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$.

[3]При этом все производные, естественно, понимались бы в обычном смысле.

Обратное преобразование Фурье есть

$$f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi i(x,y)} \widehat{f}(y)\, dy.$$

Иногда будем также обозначать $\widehat{f}$ через $\mathcal{F}f$, а обратное преобразование Фурье — через $\mathcal{F}^{-1}f$. Известно, что

$$(D^\alpha f)^\wedge = (-1)^{|\alpha|}(2\pi i x)^{|\alpha|}\widehat{f} \tag{2.1}$$

и $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$ (теорема Планшереля).

Лемма 1. *Пусть* $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$ *и* $\Delta f \in L_2(\mathbb{R}^2)$. *Тогда*

$$\|f\|_\infty \le \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\|f\|_2\|\Delta f\|_2\big)^{1/2}.$$

Доказательство. Сначала получим некоторый аддитивный аналог доказываемого неравенства с помощью рассуждений, аналогичных [1, p. 185]. Поскольку $f = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f$, то

$$\|f\|_\infty = \|\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^2}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi i(x,\xi)}(\mathcal{F}f)(\xi)\, d\xi\right| \le \|\mathcal{F}f\|_1$$

$$\le \bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{d\xi}{1+|\xi|^4}\bigg)^{1/2}\bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^2}(1+|\xi|^4)|(\mathcal{F}f)(\xi)|\, d\xi\bigg)^{1/2}$$

$$\le \bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{d\xi}{1+|\xi|^4}\bigg)^{1/2}\bigg[\bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^2}|(\mathcal{F}f)(\xi)|^2\, d\xi\bigg)^{1/2} + \bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^2}|\xi|^4\ |(\mathcal{F}f)(\xi)|^2\, d\xi\bigg)^{1/2}\bigg].$$

Здесь первый из интегралов легко вычисляется:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{d\xi}{1+|\xi|^4} = 4\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\xi_1\, d\xi_2}{1+(\xi_1^2+\xi_2^2)^2} = 2\pi\int\limits_0^{+\infty}\frac{r\, dr}{1+r^4} = \frac{\pi^2}{2}.$$

Из (2.1) замечаем, что $(\mathcal{F}(\Delta f)) = -4\pi^2\|\xi\|^2\ (\mathcal{F}f)(\xi)$, а затем применяем теорему Планшереля. В результате приходим к неравенству

$$\|f\|_\infty \le \frac{\pi}{\sqrt{2}}\Big(\|f\|_2 + \frac{1}{4\pi^2}\|\Delta f\|_2\Big). \tag{2.2}$$

Теперь неравенство (2.2) переписываем в мультипликативном виде. Мы будем делать это теми же методами, какими аналогичное преобразование выполнялось при доказательстве неравенств типа Колмогорова в $\mathbb{R}$ (см., например, [11, § 2.4] и имеющиеся там ссылки). Для $h > 0$ полагаем $x_1 = ht_1, x_2 = ht_2$, где t_1, t_2 — новые переменные, и записываем неравенство (2.2) для функции $\varphi(t) = f(ht)$. С помощью замены переменных получаем $\|f\|_\infty = \|\varphi\|_\infty$, $\|f\|_2 = h\|\varphi\|_2$, $\|\Delta f\|_2 = h^{-1}\|\Delta\varphi\|_2$ и в результате приходим к неравенству

$$\|\varphi\|_\infty \le \frac{\pi}{\sqrt{2}}\Big(h\|\varphi\|_2 + \frac{1}{4h\pi^2}\|\Delta\varphi\|_2\Big), \tag{2.3}$$

в котором правую часть минимизируем по всем $h \in (0, +\infty)$. Простые вычисления показывают, что $h_0 = (1/2\pi)\|\Delta\varphi\|_2^{1/2}\|\varphi\|_2^{-1/2}$ является единственной точкой минимума и подстановка ее в правую часть неравенства (2.3) завершает доказательство леммы 1.

Лемма 2. *Пусть* $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$ *и* $\Delta f \in L_2(\mathbb{R}^2)$. *Тогда*

$$\Big\|\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big\|_2^2 \le 2\|f\|_2\|\Delta f\|_2, \quad j = 1, 2. \tag{2.4}$$

Доказательство. Воспользовавшись (2.1) и теоремой Планшереля, имеем

$$\Big\|\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big\|_2 = \Big\|\Big(\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big)^\wedge\Big\|_2 = \|(-2\pi i x_j)\widehat{f}\|_2 = 2\pi\bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x_j|^2\ |\widehat{f}(x_1, x_2)|^2\, dx_1\, dx_2\bigg)^{1/2}$$

$$= 2\pi\bigg(\max_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2} \frac{|x_j|}{\sqrt{1 + (x_1^2 + x_2^2)^2}}\bigg)\bigg\{\int\limits_{\mathbb{R}^2} |\widehat{f}(x)|^2\, dx + \int\limits_{\mathbb{R}^2} \|x\|^4\ |\widehat{f}(x)|^2\, dx\bigg\}^{1/2}$$

$$\le \pi\sqrt{2}\bigg\{\int\limits_{\mathbb{R}^2} |\widehat{f}(x)|^2\, dx + \int\limits_{\mathbb{R}^2} \|x\|^4 |\widehat{f}(x)|^2\, dx\bigg\}^{1/2}.$$

Применяя неравенство Минковского, учитывая, что $(\Delta f)^\wedge = -4\pi^2\|x\|^2\widehat{f}$ и вновь используя теорему Планшереля, приходим к неравенствам

$$\Big\|\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big\|_2 \le \pi\sqrt{2}\Big(\|f\|_2 + \frac{1}{4\pi^2}\|\Delta f\|_2\Big), \quad j = 1, 2. \tag{2.5}$$

Для того, чтобы завершить доказательство, переписываем эти неравенства в мультипликативной форме тем же методом, какой был использован при доказательстве леммы 1: в неравенствах (2.5) полагаем $f(ht) = \varphi(t)$, $h > 0$, с помощью замены переменных получаем $\|\partial f/\partial t_j\|_2 = \|\partial \varphi/\partial t_j\|_2$, $\|f\|_2 = h\|\varphi\|_2$, $\|\Delta f\|_2 = h^{-1}\|\Delta\varphi\|_2$, подставляем эти выражения в (2.5) и минимизируем правые части получившихся неравенств по всем $h \in (0, +\infty)$. В результате приходим к неравенствам (2.4). Лемма 2 доказана.

Далее нам нужны операторы Рисса, определяемые на классе $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ следующим образом (см., например, [10, с. 71–72]):

$$(R_j f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{y_j}{\|y\|^3}\ f(x - y)\, dy, \quad j = 1, 2,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. В [10, гл. 3, § 1] доказано, что

$$(R_j f)^\wedge(x) = i\frac{x_j}{\|x\|}\widehat{f}(x), \quad j = 1, 2, \tag{2.6}$$

где i — мнимая единица.

L_p-нормы операторов Рисса на классе $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ найдены Т. Иваничем и Г. Мартином [12], где доказано, что

$$\|R_j\|_{L_p}^{L_p} = \begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2p}, & 1 \le p < 2, \\ \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2p}, & 2 \le p < \infty. \end{cases}$$

Для $p = 2$ из этого результата имеем

$$\|R_j\|_{L_2}^{L_2} = 1, \quad j = 1, 2. \tag{2.7}$$

Лемма А. *Для любой функции* $f \in W_2^2(\mathbb{R}^2)$ *выполняются следующие неравенства*:

$$\Big\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\Big\|_2 \le \|\Delta f\|_2, \tag{2.8}$$

$$\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} \right\|_2 \le \|\Delta f\|_2, \quad j = 1, 2. \tag{2.9}$$

Доказательство этой леммы получается объединением результатов [10, с. 73–74], соотношений (2.6) и факта плотности класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ в пространстве $W_2^2(\mathbb{R}^2)$. Для удобства мы приводим это доказательство полностью.

Доказательство. Сначала доказываем неравенства (2.8) и (2.9) для функций, принадлежащих классу $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Пусть $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Применив (2.1) и (2.6), имеем

$$\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2}\Big)^\wedge = -4\pi^2 x_1 x_2 \widehat{f}(x) = -\frac{ix_1}{\|x\|}\frac{ix_2}{\|x\|}(-4\pi^2\|x\|^2\widehat{f}) = -\frac{ix_1}{\|x\|}\frac{ix_2}{\|x\|}(\Delta f)^\wedge = -((R_1R_2)\Delta f)^\wedge.$$

Отсюда с помощью теоремы Планшереля и соотношений (2.7) получаем

$$\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2}\right\|_2 = \|(R_1R_2)\Delta f\|_2 \le \|R_1\|_{L_2}^{L_2} \cdot \|R_2\|_{L_2}^{L_2} \cdot \|\Delta f\|_2 = \|\Delta f\|_2.$$

Доказательства неравенств (2.9) получаются тем же методом с заменой произведения переменных x_1x_2 на их квадраты x_1^2 и x_2^2 соответственно.

Теперь переходим к функциям из пространства Соболева $W_2^2(\mathbb{R}^2)$. Известно (см., например, [1, p. 41]), что пространство $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ всюду плотно в $W_p^l(\mathbb{R}^n)$ при всех значениях $n \ge 1$, $p \in [1,\infty)$, $l \in \mathbb{N}$. Поэтому для любой функции $f \in W_2^2(\mathbb{R}^2)$ можно указать такую последовательность функций $\{f_m\}_{m=1}^{+\infty} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, что $\forall\varepsilon > 0$ $\exists m_0 \in \mathbb{N}$: $\forall m \ge m_0$ выполняется неравенство

$$\|f_m - f\|_2 + \sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha(f_m - f)\|_2 < \varepsilon.$$

Отсюда вытекает, что

$$\|f_m - f\|_2 < \varepsilon, \quad \left\|\frac{\partial^2(f_m - f)}{\partial x_1 \partial x_2}\right\|_2 < \varepsilon, \quad \left\|\frac{\partial^2(f_m - f)}{\partial x_j^2}\right\|_2 < \varepsilon, \quad j = 1, 2.$$

Тогда $\Delta f_m \to \Delta f$ при $m \to +\infty$ в смысле L_2-нормы, поскольку

$$\|\Delta(f_m - f)\|_2 \le \left\|\frac{\partial^2(f_m - f)}{\partial x_1^2}\right\|_2 + \left\|\frac{\partial^2(f_m - f)}{\partial x_2^2}\right\|_2 < 2\varepsilon.$$

Остается записать неравенства (2.8) и (2.9) для элементов последовательности $\{f_m\}_{m=1}^{+\infty}$ и перейти к пределу при $m \to +\infty$. Лемма A доказана.

Следующее утверждение является частным случаем [13, лемма 1].

Лемма B. *Пусть $Q \subset \mathbb{R}^2$ — замкнутый квадрат со сторонами длины $h > 0$, $\|f\|_{L_2(Q)} = \Big(\int_Q |f(x)|^2\, dx\Big)^{1/2}$ и $W_2^2(Q)$ — пространство Соболева на Q с нормой $\|f\|_{2,2,Q} = \|f\|_{L_2(Q)} + \sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha f\|_{L_2(Q)}$. Тогда для любой функции $f \in W_2^2(Q)$ и любой точки x_0 из квадрата Q выполняется неравенство*

$$\|f\|_{L_2(Q)} \le h|f(x_0)| + h\Big(\left\|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right\|_{L_2(Q)} + \left\|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\|_{L_2(Q)}\Big) + \frac{h^2}{\sqrt{2}} \sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha f\|_{L_2(Q)}. \tag{2.10}$$

В связи с неравенством (2.10) отметим следующее. В работе [13] более общее неравенство доказано без указания явного вида констант перед нормами производных в правой части. Однако в тексте этой работы, предваряющем ее результаты, авторы пишут, что если проследить за тем, как возникают константы в процессе доказательства, можно выписать для них некоторые оценки. Именно в результате такого анализа мы получили множители перед нормами производных во втором и третьем слагаемых правой части неравенства (2.10).

Утверждение 1. *Справедливо неравенство*

$$A_2(\mathbb{R}^2) \geq \frac{\sqrt{\sqrt[4]{2}-1}}{\sqrt[4]{2}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выбираем последовательность $\widetilde{z} = \{\widetilde{z}_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ такую, что

$$\widetilde{z}_{j,k} = \begin{cases} 1, & (j,k) = (0,0), \\ 0, & (j,k) \neq (0,0). \end{cases}$$

Так как $\|\widetilde{z}\|_{l_2(\mathbb{Z}^2)} = 1$, то $\widetilde{z} \in \mathfrak{M}_2$, и потому

$$A_2(\mathbb{R}^2) \geq \inf_{u\in Y_2(\widetilde{z})} \|\Delta u\|_2. \tag{2.11}$$

Пусть $u \in Y_2(\widetilde{z})$ — произвольный интерполянт для $\widetilde{z}$. Применяя лемму 1, получаем

$$\|\Delta u\|_2 \geq \frac{2\,\|u\|_\infty^2}{\|u\|_2} \geq \frac{2}{\|u\|_2} \sup_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} |u(j,k)| = \frac{2}{\|u\|_2}. \tag{2.12}$$

Теперь $\|u\|_2$ оцениваем сверху. Разбиваем $\mathbb{R}^2$ на единичные замкнутые квадраты с целочисленными вершинами

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} Q_{j,k}, \quad Q_{j,k} = [j, j+1]\times[k, k+1].$$

При таком разбиении любые два соседних квадрата пересекаются только по их общей стороне, и в каждом квадрате имеются точки, в которых интерполянт u обращается в нуль.

Фиксируем произвольный квадрат $Q = Q_{j,k}$ и к нему применяем лемму B, выбрав в качестве точки x_0 любую из его вершин, в которой интерполирующая функция u принимает нулевое значение. В результате имеем

$$\|u\|_{L_2(Q)} \leq \Big\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big\|_{L_2(Q)} + \Big\|\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big\|_{L_2(Q)} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha u\|_{L_2(Q)}.$$

После возведения этого неравенства в квадрат получаем

$$\|u\|^2_{L_2(Q)} \leq (W_1(Q))^2 + \frac{1}{2}(W_2(Q))^2 + \sqrt{2}\, W_1(Q)W_2(Q), \tag{2.13}$$

где

$$W_1(Q) = \Big\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big\|_{L_2(Q)} + \Big\|\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big\|_{L_2(Q)}, \quad W_2(Q) = \sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha u\|_{L_2(Q)}.$$

Применение простого числового неравенства $2ab \leq a^2 + b^2$ дает

$$(W_1(Q))^2 \leq 2\Big(\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big\|^2_{L_2(Q)} + \Big\|\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big\|^2_{L_2(Q)}\Big),$$

$$(W_2(Q))^2 \leq 4\,\Big(\Big\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Big\|^2_{L_2(Q)} + 2\,\Big\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\Big\|^2_{L_2(Q)} + \Big\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\Big\|^2_{L_2(Q)}\Big),$$

$$W_1(Q)\,W_2(Q) \leq \Big\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big\|^2_{L_2(Q)} + \Big\|\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big\|^2_{L_2(Q)} + 2\Big\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Big\|^2_{L_2(Q)} + 4\Big\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\Big\|^2_{L_2(Q)} + 2\Big\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\Big\|^2_{L_2(Q)}.$$

Заменяем в неравенстве (2.13) величины $(W_1(Q))^2$, $(W_2(Q))^2$ и $W_1(Q)W_2(Q)$ на правые части полученных неравенств, суммируем по всем квадратам из выбранного разбиения, а затем оцениваем L_2-нормы производных первого порядка с помощью леммы 2, а L_2-нормы производных второго порядка — с помощью леммы A. В результате получаем

$$\|u\|_2^2 - 4\sqrt{2}\,(1+\sqrt{2})\|u\|_2\,\|\Delta u\|_2 - 8(1+\sqrt{2})\|\Delta u\|_2^2 \le 0.$$

Обозначив $\tau = \|u\|_2/\|\Delta u\|_2$, после простых преобразований приходим к квадратному неравенству

$$\tau^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\tau - \frac{1}{8(1+\sqrt{2})} \ge 0,$$

которое выполняется только для $\tau \ge \dfrac{\sqrt[4]{2}-1}{2\sqrt{2}}$. Тем самым установлено, что

$$\|u\|_2 \le \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}-1}\,\|\Delta u\|_2.$$

Возвращаясь к (2.12), получаем, что для любого интерполянта $u \in Y_2(\widetilde{z})$ справедлива оценка

$$\|\Delta u\|_2 \ge \frac{\sqrt{\sqrt[4]{2}-1}}{\sqrt[4]{2}}\,.$$

Обращение к неравенству (2.11) завершает доказательство. Утверждение 1 доказано. □

Теперь получим оценку сверху величины $A_2(\mathbb{R}^2)$.

Утверждение 2. *Справедливо неравенство*

$$A_2(\mathbb{R}^2) \le \frac{\sqrt{\pi}}{8\sqrt{2}}\,\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-v}(v+8)^2(v^2+2v-16)^2\,dv\right)^{1/2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $z \in \mathfrak{M}_2$ — произвольная последовательность интерполируемых данных, $G(z,\cdot) \in Y_2(z)$ — какая-либо функция, интерполирующая эту последовательность. Тогда

$$A_2(\mathbb{R}^2) \le \sup_{z\in\mathfrak{M}_2} \|\Delta G(z,\cdot)\|_2. \tag{2.14}$$

Будем строить интерполянт $G(z,\cdot)$ тем же методом, который мы применяли в разд. 1. Определяем семейство функций $g_j(x), (j \in \mathbb{Z}^2)$ следующим образом:

$$g_j(x) = \begin{cases} c_j\, e^{\frac{1}{\|x-j\|^2-1/4}}, & \text{если } \|x-j\| \le 1/2, \\ 0, & \text{если } \|x-j\| > 1/2, \end{cases}$$

где константы c_j $(j \in \mathbb{Z}^2)$ находим из условий интерполяции $g_j(j) = z_j$. В результате получаем $c_j = e^4\, z_j$. Затем строим функцию $G(z,\cdot)$ с помощью функций $g_j(x)$, полагая

$$G(z,x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^2} g_j(x).$$

Вычислениями проверяется, что $G(z,\cdot) \in W_2^2(\mathbb{R}^2)$. Теперь к функции G применяем оператор Лапласа

$$\|\Delta G\|_2 = \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^2}\int\limits_{\|x-j\|\le 1/2} |\Delta g_j(x)|^2\,dx\right)^{1/2} = e^4\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^2} z_j^2 \int\limits_{\|x-j\|\le\ 1/2} \left|\Delta\left(e^{\frac{1}{\|x-j\|^2-1/4}}\right)\right|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Непосредственными вычислениями проверяется равенство

$$\Delta\left(e^{\frac{1}{\|x-j\|^2-1/4}}\right) = \frac{64\, e^{\frac{4}{4\|x-j\|^2-1}}}{(4\|x-j\|^2-1)^4}\,\bigl(16\|x-j\|^4+16\|x-j\|^2-1\bigr).$$

Воспользовавшись этим равенством и выполнив в последнем интеграле замену $y = x - j$, получаем

$$\|\Delta G\|_2 = 64\|z\|_{l_2(\mathbb{Z}^2)}\left\{\int\limits_{\|y\|\le 1/2} e^{\frac{4}{4\|y\|^2-1}}\left(\frac{16\|y\|^4+16\|y\|^2-1}{4(\|y\|^2-1)^4}\right)^2 dy\right\}^{1/2}.$$

Теперь учитываем, что $\|z\|_{l_2(\mathbb{Z}^2)} \le 1$, переходим в интеграле к полярным координатам (r,φ) и затем полагаем $r^2 = t$. В результате приходим к неравенству

$$\|\Delta G\|_2 \le 64e^4\sqrt{\pi}\left(\int\limits_0^{1/4} e^{\frac{8}{4t-1}}\frac{(16t^2+16t-1)^2}{(4t-1)^8}\,dt\right)^{1/2}.$$

Интеграл преобразуем с помощью замены переменной $v = 32t/(1-4t)$ и получаем

$$\|\Delta G(z,\cdot)\|_2 \le \frac{\sqrt{\pi}}{8\sqrt{2}}\sqrt{I},$$

где

$$I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-v}(v+8)^2(v^2+4v-16)^2\,dv.$$

Обращение к (2.14) завершает доказательство утверждения 2. □

Заметим, что интеграл в правой части утверждения 2 представляет собой конечную сумму Г-функций Эйлера, умноженных на некоторые константы, в чем нетрудно убедиться возведением в квадрат и перемножением выражений, стоящих в круглых скобках под знаком интеграла.

Константы в правых частях утверждений 1 и 2 можно найти численно. В результате получаем границы, в пределах которых находится исследуемая величина $A_2(\mathbb{R}^2)$:

$$0.36576... \le A_2(\mathbb{R}^2) \le 19.34534... \,.$$

Эти численные результаты получены с помощью системы символьных вычислений Maple 17 (см. [14]). Точное значение величины $A_2(\mathbb{R}^2)$ неизвестно.

Заметим, что для получения оценки сверху величины $A_2(\mathbb{R}^2)$ можно было бы использовать вместо функций g_j функции f_j, которые применялись в разд. 1 настоящей работы. Однако вычисления показывают, что, применяя функции f_j, мы получаем худшую оценку сверху по сравнению с найденной в утверждении 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Burenkov V.I.** Sobolev spaces on domains. Stuttgart: B. G. Teubner Verlag GmbH, 1998. 312 p. (Teubner Texts in Math; vol. 137.)
2. **Favard J.** Sur l'interpolation // J. Math. Pures Appl. 1940. Vol. 19, no. 9. P. 281–306.
3. **Fisher S., Jerome J.** Minimum norm extremals in function spaces // Lecture Notes in Math. 1975. Vol. 479. P. 1–209.
4. **Тихомиров В.М., Боянов Б.Д.** О некоторых выпуклых задачах теории приближений // Serdica. 1979. Vol. 5, no. 1. P. 83–96.

5. **Субботин Ю.Н.** Функциональная интерполяция в среднем с наименьшей n-й производной // Тр. МИАН. 1967. Т. 88. С. 30–60.
6. **Новиков С.И., Шевалдин В.Т.** Об одной задаче экстремальной интерполяции для функций многих переменных // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2001. Т. 7, № 1. С. 144–159.
7. **Novikov S.I.** Interpolation in $\mathbb{R}^2$ with minimum value of the uniform norm of the Laplace operator // J. Math. and System Science. 2013. Vol. 3, no. 2. P. 55–61.
8. **Соболев С.Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. 3-е изд. М.: Наука, 1988. 336 с.
9. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М.: Наука, 1969. 656 с.
10. **Стейн И.М.** Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973. 344 с.
11. **Тихомиров В.М.** Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976. 304 с.
12. **Iwaniec T., Martin G.** Riesz transforms and related singular integrals // J. Reine Angew. Math. 1996. Vol. 473, no. 1. P. 25–57.
13. **Madych W.R., Potter E.H.** An estimate of multivariate interpolation // J. Approx. Theory. 1985. Vol. 43, no. 2. P. 132–139.
14. Maplesoft [site]: Maple 17.
URL: http://www.maplesoft.com/support/help/Maple/view.aspx?path=updates/Maple17 .

Новиков Сергей Игоревич
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: Sergey.Novikov@imm.uran.ru

Поступила 21.01.2015